

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: CONFÉRENCES INTERNATIONALES SUR LES ÉQUATIONS AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CONFÉRENCES INTERNATIONALES SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ¹

Conditions propres à déterminer les solutions.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LES CONDITIONS DÉFINIES EN GÉNÉRAL. — LE CAS
HYPERBOLIQUE ²

PAR

J. HADAMARD, Membre de l'Institut (Paris).

On ne conçoit plus aujourd'hui l'intégration d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles comme consistant en la recherche de l'«intégrale générale». Il s'agit de trouver, non pas n'importe laquelle des solutions (en nombre infini) que comporte l'équation, mais *une* déterminée d'entre elles. A cet effet, on devra assujettir la quantité cherchée, non plus seulement à l'équation donnée — dite encore «équation indéfinie» — laquelle doit être vérifiée dans tout son domaine d'existence, mais aussi à des conditions supplémentaires — «conditions définies» —, à vérifier le long de certaines lignes ou surfaces particulières.

Il convient, à mon avis, de faire revivre cette dénomination de «conditions définies», employée par les anciens auteurs, de préférence à celle de «conditions aux limites». Cette dernière

¹ Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 17 au 20 juin 1935, sous la présidence de M. Jacques HADAMARD, Membre de l'Institut. La série comprenait en outre une conférence de M. R. FUETER, Professeur à l'Université de Zurich, intitulée: La Théorie des fonctions qui sont solutions de l'équation de Laplace à quatre variables réelles; elle a été reproduite dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 7, p. 307-330.

² Conférence faite le 17 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Équations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

doit, semble-t-il, s'appliquer spécialement à certaines des conditions définies, pendant que d'autres doivent être plutôt nommées « conditions initiales », les premières se comportant d'une façon très différente des secondes.

Avant même de résoudre des problèmes de cette espèce, on doit se demander quels sont ceux qu'il convient de se poser, autrement dit, de quelle nature sont les conditions définies propres à déterminer une solution. Ce premier aspect du sujet est le seul auquel seront consacrées les réunions qui vont suivre, et il suffira amplement à les occuper toutes.

I

Pour l'Analyse classique, la question était censée comporter une première réponse, simple et générale, donnée par le théorème de Cauchy pour lequel on possède la célèbre et belle démonstration de Sophie KOWALEWSKI. En se bornant, pour prendre le cas le plus intéressant, à une équation du second ordre, et en appelant x, x_1, \dots, x_n les variables indépendantes, ce théorème s'énonce de la manière suivante: *si l'équation aux dérivées partielles*

$$F\left(x, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 = x \end{array}\right) \quad (1)$$

peut être résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right), \quad (1')$$

la fonction f contenant ou pouvant contenir toutes les variables indépendantes, la fonction inconnue u, toutes ses dérivées du premier ou du second ordre à l'exception de celle qui figure au premier membre et étant fonction holomorphe de ces quantités, cette équation admet une solution et une seule holomorphe en x, x_1, \dots, x_n satisfaisant aux conditions

$$u = g(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h(x_1, \dots, x_n),$$

pour $x = 0$, g et h étant des fonctions holomorphes données de x_1, x_2, \dots, x_n .

Plus généralement, au lieu de l'hyperplan $x = 0$, on peut considérer une hypersurface

$$S(x, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (S)$$

et, en chaque point de cette hypersurface, se donner la valeur de l'inconnue u et d'une de ses dérivées premières (convenablement choisie, c'est-à-dire dans une direction non tangente à S). Telles seront les conditions définies que l'on adjoindra à l'équation aux dérivées partielles indéfinie (1) pour déterminer u ; le problème de Cauchy ainsi posé se ramène évidemment, par une transformation ponctuelle, au précédent, auquel il se réduit lorsque la surface qui porte les données, c'est-à-dire la surface S , est le plan $x = 0$.

La surface S étant elle-même supposée analytique et sans point régulier dans la région Ω que l'on considère, le problème admettra, en général, une solution et une seule. On sait en effet que les données de Cauchy permettent de calculer successivement, en chaque point de S , les valeurs numériques de toutes les dérivées partielles de u et d'en déduire, pour cette quantité, un développement de Taylor, lequel se trouve être convergent.

Il y a toutefois un cas d'exception, à savoir celui où la surface S est *caractéristique*, c'est-à-dire, physiquement parlant, représente la propagation d'une onde compatible avec l'équation (1). Si cette dernière est linéaire, ou, tout au moins, linéaire par rapport aux dérivées secondes, soit

$$\sum A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + H = 0, \quad \left(\begin{array}{l} i, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 = x \end{array} \right) \quad (2)$$

la condition qui définit les caractéristiques s'obtient en remplaçant, dans les termes du second ordre, chacune des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ par le produit correspondant de deux indéterminées $\gamma_i \gamma_k$, ce qui donne une forme quadratique, la *forme caractéristique*

$$A = \sum A_{ik} \gamma_i \gamma_k \quad (3)$$

et prenant pour $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ les dérivées partielles (du premier ordre) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$. Le résultat ainsi obtenu doit être nul pour que S soit caractéristique. S'il en est ainsi, on a bien une exception au théorème fondamental; mais cette exception confirme, en un sens, la règle; car le problème qui consiste à trouver u et, tout d'abord, à en calculer les dérivées successives en chaque point de S est, en général impossible et, s'il n'est pas impossible, est nécessairement indéterminé, absolument comme il arrive pour un système de n équations du premier degré à n inconnues dont le déterminant est nul.

Ce cas mis à part, il faut encore observer que, comme pour les équations différentielles ordinaires, la solution n'est ainsi formée et son existence établie que *localement*, c'est-à-dire, dans le premier cas envisagé tout à l'heure, pour x inférieur à un certain nombre positif α et, dans le second, pour les points suffisamment voisins de S. On pourra d'ailleurs habituellement faire, mais seulement jusqu'à une certaine limite, que l'on ne peut même pas assigner *a priori*, le prolongement analytique de ce premier élément de solution, ainsi qu'il arrive pour les équations différentielles ordinaires.

II

Les contemporains de Cauchy et leurs successeurs immédiats ont considéré le résultat ainsi obtenu comme donnant une première réponse définitive à la question. On avait d'autant moins de raisons d'en douter qu'on avait l'exemple tout analogue des équations différentielles ordinaires. Une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (4)$$

admet en général une solution et une seule correspondant à des *conditions initiales* données, savoir que pour $x = a, y$ prenne une valeur numérique donnée b et $\frac{dy}{dx}$ une valeur numérique donnée b' (sauf pour certains systèmes exceptionnels de valeurs

de a, b, b'). Mais par un phénomène curieux de véritable cécité psychique, une différence importante était passée inaperçue. Le théorème fondamental que nous venons de rappeler et qui est relatif à l'équation (4) admet, comme on sait, deux sortes de démonstrations très différentes. L'une repose sur un développement en série entière et sur un « Calcul des limites », ou, comme on dit aujourd'hui, la formation de séries majorantes; l'autre sur des approximations successives de tout autre nature (méthode de Cauchy-Lipschitz et méthode de M. Picard). Les géomètres de la fin du XIX^e siècle ne remarquaient pas qu'il y avait là non seulement deux espèces de démonstrations différentes, mais deux théorèmes différents, puisque, dans un cas, on supposait essentiellement le second membre de l'équation (4) analytique et holomorphe, défini, par conséquent, dans le champ complexe, au lieu qu'aucune hypothèse de cette nature n'est postulée dans la seconde catégorie de méthodes, où l'on peut se borner aux valeurs réelles des variables.

La démonstration de Sophie Kowalewski est l'analogue de la première méthode dont nous venons de parler: elle procède par séries entières et suppose essentiellement les données analytiques tant en ce qui concerne le second membre f de l'équation (1') qu'en ce qui concerne les données initiales g et h .

On a parfois tenté d'établir le même théorème par des méthodes analogues à celles de Cauchy-Lipschitz ou de M. Picard; et même des méthodes de cette espèce se sont montrées fécondes sous certaines conditions convenablement spécifiées. Dans le cas général, elles ont toujours échoué et, comme on va le voir, sont nécessairement vouées à l'échec.

III

Pendant que l'Analyse envisageait ainsi les données de Cauchy comme propres à définir une solution d'une équation telle que (1), un autre chapitre de la Science, à savoir l'étude des potentiels, c'est-à-dire de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

introduisait des données d'un type tout différent, à savoir celles de Dirichlet. Il est bien connu qu'une fonction harmonique et régulière à l'intérieur d'un volume donné V est connue dès qu'on se donne sa valeur numérique en chaque point de la surface frontière S de V . Entre cette donnée de Dirichlet et les données de Cauchy, on aperçoit immédiatement une sorte de contradiction: puisque la connaissance de la valeur de u en chaque point de S détermine complètement cette fonction du moment qu'elle doit être solution de (5), il apparaît évidemment qu'on n'a pas le droit de se donner, le long de S , la valeur de u ET celle d'une de ses dérivées.

La donnée de Dirichlet n'est pas la seule que la Physique mathématique puisse introduire pour déterminer une fonction harmonique: *au lieu* de se donner la valeur de u , on peut se donner celle de sa dérivée normale (problème de Neumann) ou (cas de la conductibilité) une de leurs combinaisons linéaires, ou [4] une dérivée oblique ¹, ou même [14] une combinaison analogue contenant des dérivées d'ordre supérieur. On peut aussi — et c'est le cas en Hydrodynamique, toutes les fois qu'il y a une surface libre — avoir affaire à des « problèmes mixtes », dans lesquels les données sont d'une espèce (par exemple, u lui-même) sur certaines régions de la frontière S et d'une autre (par exemple, la dérivée normale de u) sur le reste. Mais si variés que soient ces différents problèmes, ils ont tous un caractère commun: la donnée est toujours *unique* en chaque point de S , contrairement à ce que voudrait l'énoncé de Cauchy-Kowalewski.

Des circonstances tout analogues se présentent pour l'équation « biharmonique »

$$\Delta\Delta u = 0 \quad (6)$$

¹ Ce problème de la dérivée oblique présente une circonstance exceptionnelle dans la théorie qui nous occupe: il peut être à la fois possible et indéterminé. C'est du moins ce qui arrive lorsque la direction de dérivation est, en certains points, tangente à la surface S (cas d'ailleurs exclu par les auteurs cités). Si, par exemple, la quantité dont on se donne les valeurs le long de S est $\frac{\partial u}{\partial x}$, la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$, laquelle est elle-même harmonique, peut être obtenue par la résolution d'un problème de Dirichlet, et la détermination qui en résulte pour u (par quadrature relative à x), est elle-même harmonique si le terme additif, fonction de y et de z , que comporte la quadrature est convenablement choisi. Mais il reste un terme additif complètement arbitraire (une fonction harmonique quelconque de y et de z). La donnée, à la frontière, de $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ donne lieu à des circonstances analogues (l'origine étant supposée extérieure à V).

qui se présente dans l'étude de l'équilibre élastique plan ou spatial. Une solution régulière de cette équation est déterminée, dans un volume de l'espace ou dans une aire plane, par *deux* données — par exemple u et sa dérivée normale — en chaque point de la frontière au lieu des quatre qu'imposerait, pour cette équation du quatrième ordre, le théorème de Cauchy-Kowalewski. On voit à nouveau apparaître la même discordance que pour l'équation des potentiels (5).

A cette discordance on voit, il est vrai, une première explication. Les deux questions ne se posent pas, par ailleurs, de manière analogue. La solution donnée par le théorème de Cauchy-Kowalewski ne l'est que *localement*: on ne prétend pas affirmer son existence et sa régularité en dehors d'un certain voisinage plus ou moins immédiat de la surface S ; au contraire, la solution au problème de Dirichlet doit être définie et régulière dans tout le volume V considéré, et il est même aisé de voir que si l'on renonce à cette condition, le problème devient largement indéterminé¹.

Confrontons donc les deux résultats en nous plaçant dans des conditions entièrement comparables. Considérons une *portion* de surface S — par exemple une portion du plan $x = 0$ — le long de laquelle nous choisirons arbitrairement (quoique, au besoin, avec certaines conditions de régularité) des données de Cauchy et voyons si aux données ainsi assignées correspondra, au moins dans le voisinage de S , une solution de l'équation (5).

Il faut d'ailleurs encore préciser. Dans les conférences qu'il a prononcées à l'Université de Paris, en 1913-14, un géomètre américain dont nous déplorons la perte, Maxime Bôcher, insistait à juste titre sur la nécessité de bien définir ce qu'on acceptera comme solutions d'un problème de cette espèce, définition qui n'a pas toujours été assez nettement spécifiée par les auteurs. Pour le moment, contentons-nous, à ce point de vue, d'observer que la région de l'espace voisine de S est divisée par cette surface en deux régions partielles 1 et 2, de sorte qu'on peut se proposer:

soit de trouver une solution valable dans l'une et dans l'autre de ces deux régions partielles;

¹ Il suffit, par exemple, pour le voir, d'imaginer que le domaine V soit creusé d'une cavité V' , dont la frontière S' servira également de frontière supplémentaire au domaine restant V_1 . Si la fonction harmonique cherchée ne doit être définie que dans V_1 , on peut se donner arbitrairement, non seulement ses valeurs sur S , mais ses valeurs sur S' .

soit (par analogie avec ce qui se passe dans le problème de Dirichlet) de définir une solution d'un côté seulement de S.

La solution peut-elle exister des deux côtés de S ? *Il n'en peut être ainsi* (la surface S étant elle-même analytique) *que si les deux données de Cauchy g et h sont analytiquement distribuées le long de cette surface.* En effet, d'après une remarque de Duhem [13], les deux solutions partielles définies respectivement dans 1 et dans 2 doivent nécessairement former, par leur ensemble, une fonction harmonique unique, laquelle est analytique.

L'existence de la solution même d'un côté de la surface exige, entre les deux fonctions g et h, une relation qui, lorsque l'une d'elles est donnée, définit l'autre à une fonction analytique près¹. C'est ce que l'on peut voir en traçant une surface auxiliaire Σ qui, avec S, délimite un volume V dans lequel une fonction harmonique peut être définie par des données de Dirichlet, coïncidant avec g le long de S et arbitraires le long de Σ . La fonction de Green G(M, P) relative à V étant, d'autre part, analytique dès que les deux points dont elle dépend ne s'approchent pas l'un de l'autre, on aura, au voisinage de S,

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{dG(M, P)}{dn_M} u_M dS_M + \text{fonct. analyt.} = u_1 + \text{fonct. analyt.} \quad (7)$$

et, par conséquent, on devra avoir, pour la dérivée normale,

$$h = \frac{du_1}{dn} + \text{fonct. analyt.} \quad (7')$$

En l'absence d'une relation de cette espèce, le problème de Cauchy est impossible. Ce n'est pas lui, mais le problème de Dirichlet ou un problème analogue, qui est ce que nous appellerons « correctement posé », c'est-à-dire possible et déterminé.

Cette conclusion, lorsque nous l'avons formulée, a étonné autour de nous plusieurs géomètres. Peu importe, nous a-t-on

¹ Lorsque S est plan, ce second problème se ramène au premier, en supposant l'une des deux données g, h nulle et étendant la solution d'un côté à l'autre par réflexion à la manière de Schwartz. Mais la méthode indiquée dans le texte a l'avantage de s'étendre aux surfaces courbes et aussi à toutes les équations (linéaires analytiques) du type elliptique.

objecté, que les données g, h ne soient pas analytiques, puisque, d'après le théorème classique de Weierstrass, on peut les remplacer par des fonctions analytiques (et même des polynômes) avec des erreurs aussi petites qu'on le veut.

La réponse à cette objection met en évidence un aspect remarquable du problème. La question n'est évidemment pas de savoir si l'on commet une erreur très petite sur des données, mais si l'on commet une erreur très petite sur la solution. Or, ici, les deux sont loin de revenir au même, comme le montre l'exemple de l'équation à deux variables indépendantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5')$$

avec les données initiales

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= A \sin ny. \end{aligned} \quad (8)$$

La fonction h ainsi définie est nécessairement très petite en même temps que le coefficient A . Or la solution, savoir

$$\frac{A}{n} \sin ny \operatorname{Sh} nx, \quad (8')$$

prend, si petit que soit x (du moment qu'il n'est pas nul) et si petit que soit A , des valeurs énormes, du moment que n est très grand, c'est-à-dire du moment que la fonction h est oscillatoire à période très courte¹.

¹ La recherche des surfaces minima se ramène, comme on sait, à l'intégration de l'équation (5'), les coordonnées cartésiennes x, y, z étant fonctions harmoniques de deux paramètres ξ, η . Les formules de Schwarz qui déterminent la surface S passant par une ligne donnée L et inscrite le long de cette ligne à une développable donnée \mathcal{D} , sous la supposition que L et \mathcal{D} soient analytiques, résolvent un problème de Cauchy relatif à l'équation (5'). On voit que de très petites altérations sur la distribution des plans tangents à \mathcal{D} le long de la ligne L peuvent modifier du tout au tout la forme de la surface cherchée au voisinage, si immédiat qu'il soit, de L .

Le même problème avait, comme on sait [10] été résolu auparavant par O. BONNET et par BJÖRLING [3]. Ces travaux — particulièrement les deux Notes d'Ossian Bonnet — manifestent nettement le point de vue adopté, en la matière, pendant le siècle dernier. Il n'y est fait aucune distinction entre une fonction donnée pour des valeurs réelles de la variable et une fonction définie dans le champ complexe.

Avant de quitter le problème de Dirichlet, lequel sera repris dans les conférences suivantes, rappelons que son exemple est un de ceux qui illustrent le mieux le précepte rappelé par Bôcher. Il faut définir avec précision chacune des deux propriétés que l'on impose à la solution cherchée. C'est PAINLEVÉ qui, le premier [31], a précisé ce que l'on doit entendre en disant qu'une fonction « prend », sur une ligne ou une surface donnée, des valeurs données. P étant un point déterminé quelconque de la ligne ou de la surface S en question, M un point du domaine Ω qu'elle limite, il faut que u_M tende vers u_P lorsque M tend vers P le long d'un chemin quelconque intérieur à Ω .

D'autre part, u doit satisfaire aux équations aux dérivées partielles. Ceci implique, en principe, l'existence des dérivées secondes (au moins celles qui figurent dans l'équation) et, par conséquent, la continuité des dérivées premières. On a pu d'ailleurs remplacer ces conditions par d'autres moins restrictives dont l'énonciation ne rentre pas dans l'exposé actuel (sauf en un point dont il sera parlé plus loin). Mais une circonstance remarquable est l'apparente contradiction qui existe entre cette condition et la nature des données de Dirichlet, lesquelles ne sont nullement assujetties à être dérivables même une fois. Il en résulte que la surface S sur laquelle ont été prises les données de Dirichlet est en général, pour la solution, une surface singulière, la solution ainsi engendrée étant, au contraire, analytique et holomorphe dès qu'on s'éloigne de cette surface.

Si l'on renonce à cette précision, on peut changer complètement le caractère du problème, et celui-ci peut devenir indéterminé. Un exemple classique est celui de la fonction $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, harmonique et régulière dans tout l'intérieur de la sphère S ($x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$) et qui, sur toute la surface de cette sphère, prend la valeur constante $\frac{1}{2a}$, ceci cessant seulement d'avoir lieu au sens précisé par Painlevé pour l'origine des coordonnées, non sans qu'il n'y ait encore des chemins intérieurs à S et aboutissant en O (tous ceux qui ont un contact du second ordre avec S) avec la valeur limite $\frac{1}{2a}$ pour u .

IV

Doit-on conclure de ce qui précède que le théorème de Cauchy-Kowalewski cesse d'être valable dès qu'on ne suppose pas les données analytiques ?

La réponse n'est pas aussi simple ni aussi absolue. Au lieu de l'équation des potentiels, considérons l'équation des ondes sphériques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad (9)$$

qui gouverne les petites oscillations d'un milieu homogène remplissant tout l'espace. De telles oscillations seront parfaitement déterminées si l'on se donne les *conditions initiales*

$$u(x, y, z, 0) = g(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = h(x, y, z) \quad (10)$$

ce qui revient à se donner, à cet instant initial, les déplacements (infinitésimaux) et les vitesses des différentes molécules. On voit qu'on est précisément en présence des données de Cauchy. Or le problème ainsi posé admet une solution bien déterminée, donnée par la formule classique de Poisson. Etant donnée l'interprétation du problème, on ne saurait d'ailleurs concevoir qu'il en soit autrement et que l'existence de la solution soit subordonnée à l'analyticité des données initiales.

On ne saurait non plus concevoir, dans ce nouveau problème, l'intervention d'expressions analogues à celle que donne notre formule (8'), et qui se présenteraient forcément si les valeurs de la solution étaient profondément liées aux coefficients des développements de g et de h en séries entières. S'il en était ainsi, le phénomène de la propagation du son, qui est régi par l'équation (9), nous paraîtrait régi par le pur hasard et nous n'y pourrions reconnaître aucune loi, puisqu'il serait totalement bouleversé lorsque les données subiraient des altérations imperceptibles à nos moyens d'observation.

Ainsi, entre les équations (5) et (9), la différence apparaît totale sous le point de vue qui nous occupe ¹.

La signification physique de chacune de ces deux équations nous fait comprendre cette différence, puisqu'un problème physique relatif à un milieu régi par l'équation des ondes sphériques se traduit analytiquement par un problème de Cauchy tandis qu'aucun problème de Cauchy relatif à l'équation (5) n'est posé par l'application concrète. Celle-ci nous offre donc, et va continuer à nous offrir un guide sûr pour discerner la vérité au milieu de discordances aussi paradoxales, au premier abord, que celles qui précèdent.

Il nous importe cependant de savoir distinguer les unes des autres, par un critère d'ordre purement mathématique, les équations aux dérivées partielles qui se comportent de manière si différente, pour ne pas dire si opposée. C'est à quoi l'on arrive à l'aide de la forme caractéristique (3). L'examen de cette forme quadratique conduit à distinguer différents types d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

I. La forme quadratique (3) peut être *définie*, c'est-à-dire comprendre autant de carrés indépendants qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation, ces carrés étant tous du même

¹ Il est même impossible de poser d'une manière analogue le problème de Cauchy actuel et le problème de Dirichlet pour l'équation (5). Dans ce dernier, nous avons vu que la fonction g , représentant les valeurs données de la fonction cherchée le long de S , pouvait, par exemple, avoir des dérivées premières discontinues, et que de telles singularités s'effacent, se noient en quelque sorte, dès qu'on s'écarte si peu que ce soit de S en entrant dans le domaine Ω . Rien de pareil ne se produit pour l'équation des ondes sphériques: si une solution u de cette équation était continue ainsi que ses dérivées premières pour $t = +\varepsilon$, elle le serait aussi pour $t = 0$. C'est ce que l'on peut voir en écrivant la formule de Poisson à partir de $t = +\varepsilon$. Les discontinuités, pour les équations du type hyperbolique, ne s'effacent pas comme pour l'équation des potentiels: elles se propagent par ondes.

On ne peut pas, d'autre part, introduire des discontinuités du premier ordre, c'est-à-dire portant sur les dérivées premières, se produisant sur des hypersurfaces situées dans la région $t \geq 0$. Si de pareilles discontinuités étaient admises, les problèmes perdraient tout sens. Soit, en effet, S une telle hypersurface, à orientation d'espace (voir plus loin): des deux côtés de cette surface, on pourrait se poser le problème de Cauchy, les valeurs de u étant les mêmes de part et d'autre, mais les valeurs de la dérivée normale étant choisies arbitrairement de chaque côté. Il n'y a évidemment aucun intérêt à considérer comme une solution unique de l'équation l'ensemble des deux fonctions différentes ainsi formées dans les deux régions.

Les phénomènes qui obéissent à des équations telles que (9) peuvent donner lieu à des « ondes de choc » ou discontinuités du premier ordre. Mais les lois qui régissent cette sorte de discontinuités ne peuvent plus se déduire des seules propriétés mathématiques de l'équation: un appel direct aux principes dynamiques ou physiques qui régissent le phénomène est nécessaire pour les établir.

signe. L'équation aux dérivées partielles est alors dite du type *elliptique*.

II. Si le discriminant de la forme caractéristique est nul¹, c'est-à-dire si celle-ci ne comprend pas son nombre normal de carrés indépendants, l'équation est du type *parabolique*.

III. Enfin, si, le discriminant étant différent de zéro, la forme caractéristique est *indéfinie*, autrement dit si elle est susceptible de valeurs tant positives que négatives, les carrés dont elle se compose n'étant pas tous de même signe, on a affaire au type *hyperbolique*.

Toutefois, eu égard à ce dernier, une distinction est nécessaire. Toutes les équations aux dérivées partielles hyperboliques introduites par des applications dynamiques ou physiques appartiennent au type hyperbolique que nous appellerons *normal*, dans lequel la forme caractéristique a tous ses carrés de même signe à l'exception d'un seul. Dans ce cas, le cône caractéristique (ainsi qu'il arrive pour un cône du second degré dans l'espace ordinaire) se compose de deux nappes distinctes et divise l'espace en trois régions, deux intérieures et une extérieure, au lieu que, pour une équation hyperbolique non normale [9], le cône caractéristique ne se compose que d'une seule nappe et divise l'espace en deux régions seulement, aucune des deux ne méritant d'ailleurs plus que l'autre d'être dénommée intérieure².

Pour une équation hyperbolique normale, il y a, en chaque point, indépendamment des plans caractéristiques (c'est-à-dire tangents au cône caractéristique) deux sortes d'orientation de plans: ceux que, en s'inspirant de la Théorie de la Relativité, on peut appeler « orientés dans l'espace », c'est-à-dire qui sont extérieurs au cône caractéristique (un plan parallèle infiniment voisin coupant ce cône suivant une ellipse ou une surface fermée du genre ellip-

¹ En fait, on n'a jamais eu à considérer d'autres équations paraboliques que celles pour lesquelles la forme caractéristique est semi-définie, et qui correspondent aux équations du type hyperbolique que nous appelons normal.

² Certaines équations du type hyperbolique non normal ont été étudiées par M. COULON [9] et la plus simple d'entre elles, savoir $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}$, par M. HAMEL [21], cette dernière à propos d'un problème de Géométrie. Pour aucune d'entre elles, on ne connaît de problème correctement posé, au sens adopté dans ce qui précède.

soïde) et ceux qui sont « orientés dans le temps », c'est-à-dire qui coupent le cône caractéristique suivant deux génératrices. Une surface ou hypersurface S non caractéristique peut donc être elle-même, suivant la situation de son plan tangent en un quelconque de ses points, orientée dans l'espace ou orientée dans le temps.

Toutes les équations linéaires du type elliptique donnent lieu aux mêmes conclusions que l'équation des potentiels. Tout au moins, c'est ce que l'on peut démontrer par les mêmes méthodes lorsque l'équation est à coefficients analytiques, en formant d'abord une « solution élémentaire » analytique et holomorphe tant que les deux points dont elle dépend ne s'approchent pas l'un de l'autre. Il en sera de même pour la fonction de Green correspondant à un domaine quelconque, par exemple à celui qui est formé par la surface S et une portion de surface auxiliaire Σ , de sorte que le raisonnement présenté plus haut s'appliquera de nouveau. Il permettra encore de montrer que, la surface S qui porte les données étant analytique et la première donnée g étant choisie, la condition que le problème de Cauchy soit possible détermine la seconde donnée h à une fonction analytique près, c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$h = h_1 + H, \quad .$$

h_1 pouvant être calculé à l'aide de g et H étant nécessairement analytique. En particulier, si g est identiquement nul (ou analytique), h devra lui-même être analytique pour que le problème soit possible.

Il en est tout autrement pour les équations hyperboliques ou, plus exactement, du type hyperbolique normal. Pour toute équation de cette nature, une surface S à orientation d'espace en chacun de ses points permet de se poser un problème de Cauchy dans lequel les données ne sont assujetties à aucune condition d'analyticité.

Une circonstance curieuse se présente toutefois lorsque le nombre $n + 1$ des variables indépendantes augmente. Les formules de résolution du problème de Cauchy introduisent en effet les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{n + 1}{2}$ (si n est impair)

pour g et jusqu'à l'ordre $\frac{n-1}{2}$ pour h . Ceci, en toute rigueur, ne suffit pas pour démontrer que les fonctions g , h doivent être dérivables jusqu'à l'ordre en question pour que le problème soit possible; mais on peut démontrer en toute rigueur une conclusion très voisine de celle-là: par exemple, pour l'équation, à $n+1 = 2n_1$ variables, analogue à celle des ondes sphériques, la fonction g étant supposée identiquement nulle, si l'on prend la moyenne des valeurs de h sur une sphère quelconque de l'espace à n dimensions défini par $x = 0$, il faudra, pour la possibilité du problème, que cette quantité soit dérivable jusqu'à l'ordre n_1 par rapport au rayon de la sphère. Cette condition de possibilité assez inattendue établit une sorte de passage entre une équation de type hyperbolique normal, dont la forme caractéristique comprend un grand nombre de carrés d'un même signe contre un seul du signe contraire, et une équation du type elliptique dont la forme caractéristique a tous ses carrés du même signe et pour laquelle, l'une des données étant nulle, nous savons que l'autre doit être analytique.

Mais un autre correctif beaucoup plus important doit être apporté à notre constatation précédente. Comme nous l'avons dit, le problème de Cauchy relatif à l'équation (9) et à la multiplicité $t = 0$ permet de déterminer, en fonction des conditions initiales, les oscillations d'un milieu homogène *remplissant l'espace entier*. Si ce milieu — un gaz, pour fixer les idées — est au contraire limité par des parois solides — soit, par exemple, qu'il soit contenu dans un récipient soit, au contraire [13], que l'espace renferme une sphère solide pulsante —, le problème est autre. A la paroi solide considérée dans l'espace ordinaire correspond, dans l'espace-temps, un hypercylindre S_2 , et nous avons à déterminer l'inconnue u dans une région Ω de l'espace-temps limitée d'une part par S_2 , de l'autre par notre portion S_1 d'espace ordinaire considérée pour $t = 0$. Les conditions propres à déterminer u seront alors:

les données de Cauchy sur la portion d'espace ordinaire S_1 ;
sur S_2 , des données analogues à celle de Dirichlet, nous voulons dire une seule donnée (la valeur de u ou celle de sa dérivée normale ou une de leurs combinaisons linéaires, etc.) en chaque point.

Autrement dit, nous sommes ici en présence d'un *problème mixte*¹. Il en sera ainsi toutes les fois que, parmi les frontières limitant la région de définition de l'inconnue u , il y en aura d'orientées dans le temps, comme c'est le cas pour S_2 .

Les équations du type elliptique gouvernent les phénomènes d'équilibre (équilibre électrique, élastique, calorifique, etc.). Les équations du type hyperbolique normal gouvernent les phénomènes du mouvement ou, plus généralement, d'état variable avec intervention d'inertie ou de phénomène équivalent (inertie électro-magnétique), inertie grâce à laquelle les perturbations introduites dans le mouvement se propagent en général par ondes, c'est-à-dire, en langage mathématique, par caractéristiques.

Une seule exception à cet égard: les liquides parfaits. Dans ce cas, entièrement théorique d'ailleurs, le mouvement obéit à l'équation des potentiels (5), l'absence de caractéristiques réelles correspondant au fait que toute perturbation se propage de manière instantanée dans toute la masse, et non par ondes.

Mais, même dans ce cas du liquide incompressible parfait, l'influence de l'inertie sur le caractère du phénomène se manifeste dès qu'il y a une surface libre, surface dont on a à étudier le mouvement. Un beau et important Mémoire de M. Volterra [42] montre (du moins en ce qui concerne les petites oscillations) qu'on a alors affaire à un problème mixte: les parois mouillées introduisent des conditions aux limites analogues à celles de Dirichlet — d'une manière précise, des conditions de Neumann —, mais, à la surface libre, on a des conditions initiales (relatives à l'origine des temps) qui sont du type de Cauchy².

V

Le cas parabolique est celui qui se présente pour l'état variable de la propagation de la chaleur, laquelle se fait sans inertie, et

¹ Cette catégorie de « problèmes mixtes » est complètement différente de celle dont nous avons vu l'intervention dans le cas elliptique. Il serait utile d'introduire, pour deux idées aussi nettement distinctes, deux dénominations différentes.

² L'équation des potentiels s'applique au mouvement considéré dans toute la masse du liquide. Mais si, comme il est naturel de le faire en l'espèce, on porte son attention sur ce qui se passe à la surface libre, en prenant pour inconnue par conséquent l'altitude z de cette surface en fonction de x , y , t , on est conduit, comme nous l'avons fait voir précédemment [20e], à une équation intégral-différentielle, que ses propriétés rapprochent visiblement du type hyperbolique.

aussi dans l'étude des phénomènes (mouvement des fluides visqueux) où des résistances passives masquent en quelque sorte l'inertie (et à la limite, pourraient en annuler complètement l'effet).

Ce cas sera traité dans un exposé suivant. Sans entrer, par conséquent, dans son examen, disons que le rôle qui, pour le cas elliptique, était dévolu aux fonctions analytiques, appartient ici (au moins en ce qui concerne les conditions de possibilité du problème de Cauchy) aux fonctions que MM. GOURSAT et GEVREY [18a, 17] ont appelées fonctions de classe 2, en appelant, d'une manière générale, « fonctions de classes α » ($\alpha > 1$) celles dont les dérivées existent pour tous les ordres et satisfont aux inégalités ¹

$$|h^{(p)}(x)| < \frac{M \Gamma(\alpha p)}{\rho^p}$$

où M et ρ sont deux nombres positifs indépendants de l'indice p de dérivation (mais pouvant varier d'une fonction de la classe considérée à l'autre).

Le problème que nous envisageons ici enrichit ainsi la Théorie des fonctions de variables réelles, délimitant, parmi ces fonctions, des catégories nouvelles et intéressantes. En particulier, on est ainsi conduit à la notion de *fonction quasi-analytique*, si remarquablement élucidée par les célèbres travaux de MM. BOREL, DENJOY, CARLEMAN et, à un point de vue un peu différent, de M. SERGE BERNSTEIN: les classes α , pour $\alpha > 1$, se distinguent, en effet, complètement, à ce point de vue, de celle qui correspond à $\alpha = 1$, c'est-à-dire de celle des fonctions analytiques; elles ne sont que quasi-analytiques, le prolongement analytique n'étant pas déterminé.

Ce n'est pas le seul problème relatif aux fonctions de variables réelles qui se pose à propos de la théorie qui nous occupe. Indiquons en un qui n'est pas encore résolu ou, du moins, qui demanderait à être « plus résolu » suivant la parole célèbre de Poincaré. Nous avons dit que pour l'équation des ondes sphériques le

¹ Il est remarquable que des inégalités du même type, mais avec $\alpha < 1$, se soient également introduites en Analyse: ce sont elles qui caractérisent les fonctions entières de genre fini.

problème de Cauchy, lorsque les données en sont portées par l'hyperplan $t = 0$, est correctement posé, ainsi que le fait prévoir son interprétation physique. Mais il en est tout autrement lorsque, l'équation aux dérivées partielles restant la même, on prend les données de Cauchy le long d'une multiplicité orientée dans le temps, par exemple de l'hyperplan $x = 0$, soit

$$u(0, y, z, t) = g(y, z, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z, t) = h(y, z, t).$$

Pour montrer que le problème de Cauchy ainsi posé ne l'est pas en général correctement, il suffit de considérer le cas où les fonctions g, h sont indépendantes de t . Il devra alors en être de même pour la solution si elle existe (en vertu du théorème d'unicité sur lequel nous reviendrons plus loin), de sorte que celle-ci devra satisfaire à l'équation (5), pour laquelle nous avons vu que le problème est, en général, impossible. Mais, comme dans les cas précédents, il est intéressant d'aller plus loin et, supposant, par exemple, la première donnée g nulle, de chercher comment il faudra choisir la seconde. Nous avons obtenu [20g] un système de conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir cette dernière pour que le problème admette une solution: en particulier, la fonction cherchée, quoique n'étant pas forcément dérivable, admet nécessairement, et un nombre infini de fois, une série d'opérations dans lesquelles les différentiations par rapport à y et à z alternent avec des quadratures par rapport à t . Mais la réponse est donnée sous une forme qui laisse beaucoup à désirer sous le rapport de la simplicité et qui, de plus, manque d'un caractère essentiel, à savoir l'invariance par rapport aux transformations linéaires (transformations de Lorentz) qui conservent l'équation aux dérivées partielles.

Il y a donc là un problème nouveau de théorie des fonctions de variables réelles; et ce problème se distingue de tous ceux qui ont été posés jusqu'ici dans cet ordre d'idées par le fait de ne prendre naissance que pour les fonctions de deux variables au moins. Si, en effet, les données de Cauchy n'avaient à dépendre que d'une variable, c'est que l'équation aux dérivées partielles n'en mettrait en jeu que deux et, dans ce cas, la distinction entre

variétés d'espace et variétés de temps tombe : dans l'équation des cordes vibrantes ou des tuyaux sonores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (9')$$

les variables x et t jouent un rôle entièrement analogue.

VI

Ce cas de deux variables indépendantes dans lequel l'équation, supposée linéaire et hyperbolique, peut s'écrire sous la forme connue de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = \varphi(x, y) \quad (11)$$

a été serré de plus près au point de vue qui nous occupe ¹. La remarque initiale est celle de M. Picard [33c], d'après laquelle les données de Cauchy ne sont pas admissibles sur un arc de courbe le long duquel les deux coordonnées x, y ne sont pas toutes deux monotones. Si, par exemple, x est monotone, mais que y ait un maximum, on a une figure telle que celle qui est représentée fig. 1 et, dans ce cas, conformément à ce qui précède, les problèmes correctement posés sont des problèmes mixtes (données de Cauchy sur un des arcs partiels, une seule donnée en chaque point sur l'autre).

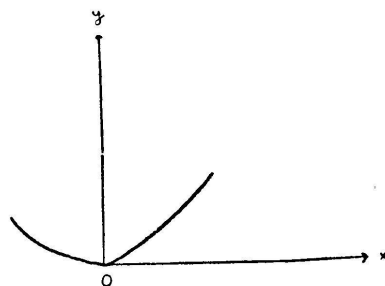


Fig. 1.

Un cas limite de la figure précédente est celui dans lequel, l'un des arcs partiels étant quelconque (quoique sans extremum de

¹ Certains des résultats dont nous allons parler ont été d'ailleurs étendus à des équations à plus de deux variables [25, 37a, 37b].

La récente théorie unitaire du champ de gravitation et d'électromagnétisme de M. Einstein [15] pose une question relative à la compatibilité de certains systèmes aux dérivées partielles. Cette question a été complètement élucidée par M. Cartan [8], mais dans l'hypothèse analytique. Il serait intéressant de se débarrasser de cette hypothèse, ainsi qu'on en doit présumer la possibilité, étant donné que les caractéristiques du système sont réelles.

x ou de y), l'autre serait remplacé par un segment de caractéristique issu d'une de ses extrémités et n'ayant pas d'autre point commun avec lui (fig.): ce cas, qui a fait tout particulièrement l'objet des études de M. PICARD [33*b*] et aussi de M. GOURSAT [18*b*], n'est pas, au fond, distinct de celui dont nous venons de parler ¹.

Mais ceci a conduit M. Goursat à envisager tous les cas de figure auxquels peuvent donner lieu deux arcs de lignes qui partent d'un même point A, chacun d'eux étant assujéti, pour son compte, à la condition de monotonie posée ci-dessus. Tout dépend des relations de position qui existent entre les deux arcs dont il s'agit et les caractéristiques issues du point A.

Si les deux arcs sont dans des angles opposés formés par les caractéristiques, la condition de monotonie est remplie sur la courbe entière formée par leur réunion, et on a le droit de se donner les données de Cauchy.

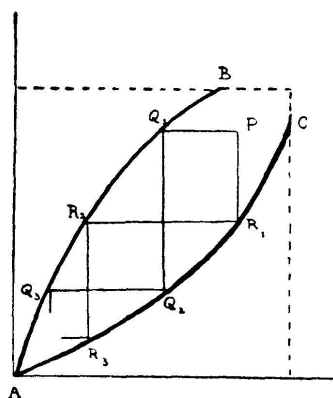


Fig. 2.

S'ils sont dans deux angles adjacents, on a la figure considérée il y a un instant, et qui donne lieu à un problème mixte.

Mais il reste le cas (fig. 2) où les deux arcs sont dans un seul et même angle formé par les caractéristiques: on constate alors que la donnée admissible est unique sur chacun des arcs. Un tel problème ne correspond pas à une application physique, mais il se présente comme cas limite de problèmes physiquement posés (milieux à une dimension limités dans les deux sens). Il est déterminé [18*c*, 20*d*] si on impose ² la continuité au point A.

En combinant ces divers résultats on peut, comme l'a indiqué M. Picard dans son enseignement à la Sorbonne (1907) et dans

¹ Le cas d'une caractéristique se trouve participer des deux entre lesquels il est intermédiaire (lignes inclinées dans un sens ou dans l'autre par rapport à la caractéristique), grâce au fait que la donnée de u le long d'une caractéristique revient, pratiquement, à l'ensemble des deux données de Cauchy: la dérivée de u qui intervient dans les calculs est, en effet, celle qui est prise le long de la caractéristique elle-même.

² Si on renonce à cette condition, ainsi que l'ont fait quelques auteurs [35, 30], il est aisé de voir que le problème devient largement indéterminé.

ses *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles* [33d], assigner les données que l'on peut choisir le long de contours plus compliqués, où chacune des deux coordonnées peut présenter un nombre arbitraire de maxima ou de minima.

VII

Un cas particulièrement intéressant est celui d'un contour fermé. Pour ne pas multiplier à l'excès les hypothèses possibles, bornons-nous au cas d'un contour convexe, ou tout au moins le long duquel chacune des coordonnées caractéristiques n'admet

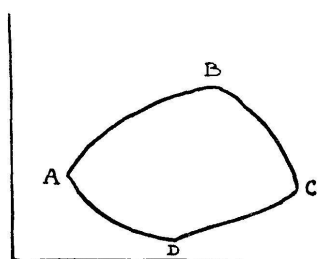


Fig. 3.

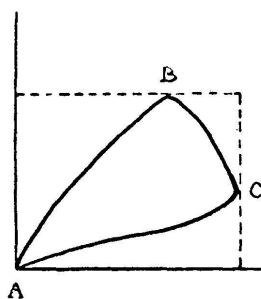


Fig. 3 bis.

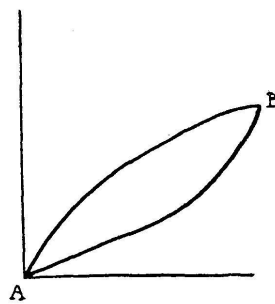


Fig. 3 ter.

qu'un seul maximum et un seul minimum. Avec M. HUBER [24], employons le mot *angle*, en le détournant de son sens habituel, pour désigner l'un des points qui correspondent à de tels maxima ou minima. Notre contour sera donc en général un quadrangle ABCD (fig. 3), mais pourra aussi se réduire à un triangle ABC (fig. 3bis) ou même à un biangle AB (fig. 3ter). Dans le premier cas, les résultats généraux montrent qu'une solution de l'équation est déterminée si on se donne :

- les données de Cauchy sur l'un des arcs partiels, BC, par exemple;
- une seule donnée sur les deux arcs adjacents AB, CD;
- rien sur le quatrième arc AD.

Une question se pose alors d'elle-même. Peut-on, le long d'un tel contour fermé, se poser pour l'équation (11) le problème qui intervient dans le cas elliptique, à savoir le problème de Dirichlet ?

Comme l'a remarqué M. Sommerfeld [39a], ce point a attiré l'attention de DU BOIS REYMOND lui-même dans le travail fondamental [12] où, comme on sait [10, t. II], il reprend et généralise la méthode d'intégration de Riemann. Les deux auteurs dont nous venons de parler considèrent d'ailleurs comme probable qu'en effet, de telles données de Dirichlet peuvent être encore choisies dans le cas de l'équation hyperbolique (11).

Or la réponse est toute contraire. Pas plus que le problème de Cauchy ne convient au type elliptique, le problème de Dirichlet ne peut se poser pour le cas hyperbolique.

La manière la plus immédiate de le constater est de prendre pour contour portant les données un rectangle parallèle aux axes, c'est-à-dire à côtés caractéristiques. Ainsi qu'il est classique [10, t. II], une inconnue u , solution de l'équation (11), est déterminée dans tout ce rectangle si l'on donne ses valeurs le long de deux côtés adjacents: aucune donnée relative aux deux autres côtés ne peut donc être jointe à celles-là.

Considérons les autres formes possibles du contour. La réponse peut encore être donnée aisément en ce qui regarde un biangle ou un triangle. Dans ce dernier cas (fig. 3bis), nous savons que la connaissance des valeurs de u sur les deux côtés AB, AC suffit à déterminer cette fonction dans tout le rectangle circonscrit, donc aussi sur le troisième côté BC.

Le cas du biangle demande un peu plus d'attention. Reprenons, pour un instant, la figure 2. Les valeurs de u étant données le long de AB, AC, le calcul de cette fonction en un point P conduit [20d] à tracer deux lignes brisées $PQ_1 Q_2 \dots$, $PR_1 R_2 \dots$ à côtés caractéristiques (et tous dirigés dans le sens des x ou des y décroissants, si les arcs donnés AB, AC sont dans l'angle positif des parallèles aux axes menées par A), inscrites à l'angle formé par les deux arcs donnés, lignes polygonales qui tendent évidemment toutes deux vers le point A. La valeur de u en P, cette fonction étant assujettie à être continue en A, s'exprime par une somme de termes dont les uns sont proportionnels aux valeurs données aux sommets des lignes polygonales et les autres sont des intégrales définies le long des arcs partiels en lesquels ces sommets décomposent AB ou AC. Tout ceci reste valable lorsque les extrémités B, C des deux arcs issus de A coïncident, c'est-à-dire

lorsque la figure devient le triangle AB de la figure 3^{ter}. Mais s'il en est ainsi, l'expression ainsi formée est discontinue en B: il est clair, en effet, qu'à deux points P, P' très voisins l'un de l'autre et de B correspondent, par le tracé qui vient d'être indiqué, deux lignes polygonales très différentes entre elles.

On pourrait, de même, former, pour le même problème, une solution continue en B; mais elle serait alors discontinue en A.

Reste le cas du quadrangle. Nous en avons précédemment [20f] traité un exemple simple, celui d'une ellipse quelconque, l'équation aux dérivées partielles étant simplement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (11')$$

Cette équation, en raison de la forme bien connue de son intégrale générale, possède cette propriété que tout rectangle ABCD parallèle aux axes donne lieu, pour l'une quelconque u de ses solutions, à la relation

$$u_A + u_C = u_B + u_D . \quad (12)$$

Plus généralement, toute ligne polygonale fermée à côtés parallèles aux axes donne lieu à une relation de même forme entre les sommes de valeurs de u prises l'une aux sommets de rangs pairs, l'autre aux sommets de rangs impairs.

Dès lors, si l'ellipse E a ses axes parallèles aux axes de coordonnées, en particulier si elle est un cercle, on peut y inscrire une infinité de rectangles donnant lieu chacun à la relation (12), ce qui fait apparaître immédiatement l'impossibilité de se donner les valeurs de u en tous les points d'une telle ellipse. Plus généralement, si l'ellipse E est telle qu'on peut y inscrire une ligne polygonale fermée à côtés parallèles aux axes, on peut lui en inscrire une infinité d'autres, d'où encore une infinité de conditions de possibilité du problème. Il en sera ainsi si un certain argument h est commensurable avec π .

Si l'argument h est incommensurable avec π , les impossibilités apparaissent sous une autre forme, à savoir par la divergence de séries trigonométriques susceptibles de représenter la fonction de x et la fonction de y qui figurent dans l'intégrale générale (ou,

plus rigoureusement, par le fait que les constantes de Fourier correspondantes ne sont plus nécessairement bornées).

Certaines de ces considérations ont été notablement généralisées dans le travail de M. Huber. Ce que nous avons noté dans le cas du cercle s'étend de soi-même à un « deltoïde » quelconque, c'est-à-dire à tout quadrangle dans lequel on peut inscrire une infinité de rectangles parallèles aux axes.

On peut évidemment construire un tel deltoïde si l'on s'en donne trois côtés (sans fixer les extrémités libres des côtés extrêmes). La ligne qui fermera le deltoïde (fig. 4) sera alors le lieu du quatrième sommet d'un rectangle inscrit s'appuyant sur les trois côtés donnés.

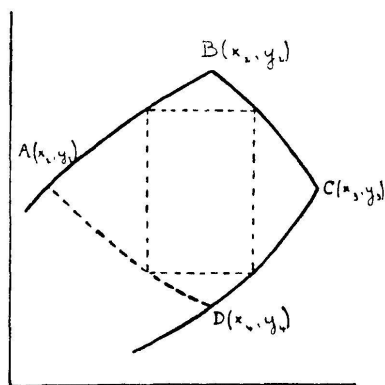


Fig. 4.

Pour tout deltoïde, il est clair que les valeurs de u ne peuvent être choisies que sur trois côtés seulement, celles qui sont relatives au quatrième s'en déduisant par l'égalité rectangulaire (12). Par contre, les données étant ainsi choisies, le problème de Dirichlet, qui

devient ainsi possible, devient indéterminé. Ce fait, qui apparaît aisément sur le cercle [20g], [24], se constate pour un deltoïde quelconque en remarquant qu'aux valeurs de u sur trois côtés on peut adjoindre celles de sa dérivée transversale sur le côté médian ¹.

Soit maintenant un quadrangle ABCD qui ne soit pas un deltoïde: on peut, avec M. Huber, transformer le problème de plusieurs façons, en formant (fig. 5), par la construction précédente, un deltoïde BCEF ayant trois côtés communs avec le quadrangle donné. Les valeurs de u le long de EF étant connues d'après ce que nous venons de dire, on est

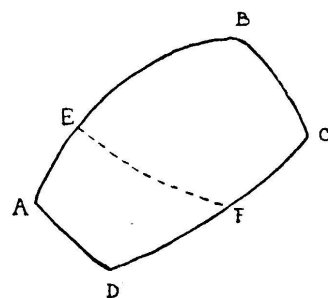


Fig. 5.

¹ On peut encore aisément former une solution de (11') s'annulant sur tout le périmètre du deltoïde de la figure 4 sans être identiquement nulle, de la manière suivante. Désignant par A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) , C (x_3, y_1) , D (x_4, y_4) les quatre sommets, on choisira arbitrairement, dans l'intervalle (x_1, x_2) , le premier terme $\varphi(x)$ de la valeur de u , après quoi le second terme $\psi(y)$ sera défini, dans l'intervalle (y_1, y_2) , par la condition que

ramené à un problème de Dirichlet relatif, suivant la disposition de la figure, à un biangle, à un triangle ou à un quadrangle. Dans les deux premiers cas, l'impossibilité du problème (pour des données arbitraires) est démontrée¹.

Si ADEF est à nouveau un quadrangle, l'opération pourra être recommencée. Mais la discussion devient alors difficile en raison de la multiplicité des cas de figure possibles et il peut arriver que les opérations se continuent indéfiniment sans aboutir².

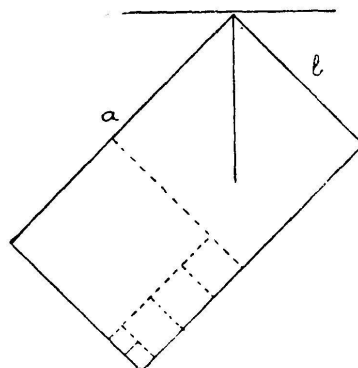


Fig. 6.

La question n'est donc pas complètement élucidée, en toute rigueur, pour le cas d'un quadrangle. De plus, tout ce que nous avons dit concernant ce cas ne vaut que pour l'équation (11'), la seule qui donne lieu à une égalité rectangulaire de la forme (12).

VIII

Les principes précédents ont déjà [25a, 37a, 23b, c, 43] reçu des généralisations étendues relatives aux équations d'ordre supérieur *totale*ment hyperboliques, c'est-à-dire, pour le cas des deux variables indépendantes, telles que l'équation aux coefficients angulaires des caractéristiques ait toutes ses racines réelles

$\varphi(x) + \psi(y)$ s'annule sur le côté AB; puis les conditions analogues relatives aux côtés BC, CD détermineront $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_2, x_3) , puis $\psi(y)$ dans l'intervalle (y_4, y_1) . La somme $\varphi(x) + \psi(y)$ ainsi formée, nulle, sur AB, BC, CD, le sera aussi sur DA, en vertu de l'identité rectangulaire.

¹ M. Huber conclut à la possibilité du problème dans le cas du biangle et dans ceux qui s'en déduisent par la transformation indiquée dans le texte. Nous avons dit plus haut la raison qui nous fournit une conclusion contraire.

² Prenons, par exemple, pour notre quadrangle, un parallélogramme ayant ses côtés a, b symétriquement inclinés sur les axes (fig. 6). Un tel parallélogramme est un deltoïde s'il est un losange. Dans le cas contraire, soit $a > b$, la construction de M. Huber revient à tracer, autant de fois que possible, à l'intérieur du parallélogramme donné, des losanges successifs adjacents les uns aux autres, jusqu'à ce que la bande parallélogramme restante, s'il y en a une, ait son côté parallèle à a plus petit que celui qui est parallèle à b . Opérant de même (mais avec interversion des rôles de a et de b) sur cette bande, et continuant ainsi, il est aisé de voir que cette suite d'opérations est celle même qui détermine, par l'algorithme d'Euclide, la commune mesure à a et à b . Elle se termine donc si cette commune mesure existe (d'où des conditions de possibilité du problème) et continue indéfiniment dans le cas contraire.

Dans ce dernier cas, une discontinuité devra, en général, se manifester au sommet au voisinage duquel les losanges partiels viennent s'accumuler.

et distinctes et, si le nombre des variables est supérieur à deux [40, 22], telles que le cône caractéristique se compose de nappes toutes réelles et emboîtées les unes dans les autres.

Le cas des équations totalement elliptiques (caractéristiques toutes imaginaires), lequel ne rentre pas dans le cadre de la conférence actuelle, a été, comme on sait, traité par E. E. LEVI.

Mais d'autres circonstances sont possibles, et, quoique non imposées par les applications, soulèvent des problèmes intéressants.

C'est d'abord le cas du *type mixte* étudié, sur une suggestion de M. Volterra, par M. Tricomi [41]. Dans l'équation linéaire

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (13)$$

les coefficients A, B, C, ... sont, en général, des fonctions x, y et il en est de même, par conséquent, de la quantité $AC - B^2$. Rien n'empêche donc que cette quantité ne puisse changer de signe suivant la position du point (x, y) dans le plan et, par conséquent, que l'équation soit tantôt elliptique, et tantôt hyperbolique. On peut, bien entendu, toujours, par une transformation ponctuelle, faire que la ligne de démarcation soit l'axe des x et, par conséquent, on obtient déjà un degré assez grand de généralité en s'adressant à l'équation

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

qui est elliptique pour $y > 0$ et hyperbolique dans la région située au-dessous de l'axe des x . Dans cette dernière, on constate

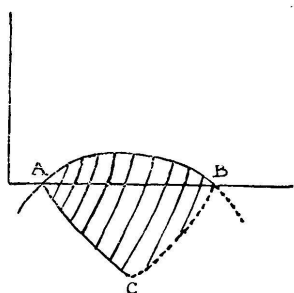


Fig. 7.

que l'équation peut se ramener à l'équation classique d'Euler et de Poisson (10) (la ligne singulière des coefficients entrant, toutefois, en ligne de compte: elle correspond précisément à l'axe des x). Grâce à cette circonstance, M. TRICOMI, par une étude d'ailleurs très délicate, mais qui a été simplifiée

sur un point par M. HOLMGREN [23e], arrive à montrer que l'on peut déterminer une solution de l'équation (14) par les données suivantes (fig. 7):

valeurs de u sur un arc AB ayant pour corde l'axe des x et situé dans la région elliptique;

valeurs de la même quantité sur un arc de caractéristique¹ issu de A et limité à la caractéristique analogue issue de B, la région où u est ainsi déterminé étant celle qui est limitée par l'arc supérieur et les deux caractéristiques.

L'équation un peu plus générale

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

réductible également à celle d'Euler et de Poisson, se traite d'une manière analogue: elle est de type mixte si l'entier m est impair; elle a été également étudiée pour m pair, où elle est partout de type elliptique, sauf le long de l'axe des x où elle a le caractère parabolique.

Si maintenant l'équation est d'ordre supérieur, elle peut participer des deux types en étant de *type composite*, c'est-à-dire en ayant, en chaque point, des caractéristiques dont les unes seront réelles, les autres imaginaires. La plus simple des équations de cette nature est l'équation du troisième ordre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 .$$

D'après le caractère elliptique de cette équation, il est à prévoir que le problème de Cauchy, consistant à se donner, pour $x = 0$, les valeurs de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ doit être en général impossible; et c'est ce que l'on voit effectivement en prenant pour inconnue la quantité $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, assujettie à être harmonique. On a un problème correctement posé en se donnant les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ le long d'un contour fermé rencontré en deux points et deux seulement par une parallèle à l'axe des x , et les valeurs de u le long de l'un des deux arcs compris entre les points d'ordonnées extrêmes².

¹ A et B sont, pour les caractéristiques correspondantes, des points de rebroussement.

² On connaîtra ainsi, en effet, par la résolution d'un problème de Dirichlet, la fonction harmonique $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, après quoi il restera à opérer une quadrature par rapport à x , à partir de l'un des deux points où une parallèle à l'axe des x coupe le contour.

Soit maintenant l'équation du quatrième ordre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad (15)$$

laquelle peut évidemment aussi s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = 0. \quad (15')$$

Pour la même raison que tout à l'heure, on ne peut pas se poser le problème de Cauchy relatif à $x = 0$. Mais il est également impossible de se poser, comme pour l'équation totalement elliptique (6), le problème « biharmonique », c'est-à-dire de se donner, le long d'un contour fermé, les valeurs de u et de sa dérivée normale. Cela se voit d'une manière particulièrement simple en prenant l'équation sous la forme (15') et, pour contour, un rectangle parallèle aux axes des X et des Y . Un système de données admissibles sera alors :

la dérivée normale tout le long du périmètre du rectangle ;
les valeurs de u le long de deux côtés adjacents (avec des relations de concordance évidentes aux extrémités de ces côtés).

La première série de données fournit en effet, par dérivation, les valeurs au contour de la fonction harmonique

$$s = \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} \quad (16)$$

et, celle-ci une fois calculée, la seconde série de données est bien celle qui convient à la détermination d'une solution de l'équation (16).

Le cas d'un contour circulaire, bien que ne se traitant pas avec la même simplicité, donne lieu à la même conclusion : les données biharmoniques n'y sont pas admissibles.

D'autres formes de contours — par exemple, l'équation étant prise sous la forme (15), un contour fermé comprenant (fig. 7) un segment d'axe des y — suggèrent encore d'autres systèmes de données [20j], les conclusions à cet égard restant, toutefois, insuffisamment établies.

IX.

L'équation aux dérivées partielles a été jusqu'ici supposée linéaire. Ce cas, nul n'en doute aujourd'hui, doit, dans toutes les applications physiques, être considéré uniquement comme une première approximation. Mais, précisément à ce titre, son étude devait devenir la première et servir de préparation à celle du cas général. On verra, dans les exposés suivants, particulièrement celui de M. Schauder, que cette dernière est déjà entreprise et même notablement avancée en ce qui regarde le problème de Dirichlet. Elle l'est aussi, grâce également à M. SCHAUDER [36], en ce qui regarde le problème de Cauchy (et, par conséquent, le cas hyperbolique) à $n > 2$ variables indépendantes, le cas de $n = 2$ ayant été traité dans des recherches de M. Hans LEWY [26] sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Dès que l'équation n'est plus linéaire — ou, tout au moins, « quasi linéaire » au sens le plus restreint, c'est-à-dire linéaire par rapport aux dérivées secondes avec des coefficients fonctions données des seules variables indépendantes —, elle n'est plus, *a priori*, d'un type donné: pour nous borner au cas de deux variables indépendantes, l'équation

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad (1 \text{ bis})$$

a ses caractéristiques définies par l'équation différentielle

$$F_r dy^2 - F_s dx dy + F_t dx^2 = 0 \quad (15'')$$

et, ici, les coefficients F_r , F_s , F_t , dérivées partielles de F par rapport à r , s , t , dépendent en général de u lui-même et de ses dérivées, de sorte que, en un même point (x, y) du plan, la quantité $F_r F_t - F_s^2$ peut être positive ou négative suivant qu'on s'adresse à une solution ou à une autre de l'équation ¹. On ne peut donc assigner un type déterminé à cette dernière tant que u est lui-même inconnu.

¹ Un problème très curieux, analogue, mais avec plus de difficulté, à celui du type mixte traité par M. Tricomi, serait, pour une équation telle que (13) l'étude des solutions voisines d'une de celles qui annulent en tout point le discriminant du trinôme (3) correspondant.

Toutefois, cette sorte de cercle vicieux cesse de se présenter lorsque les données sont celles de Cauchy le long d'une ligne déterminée L : on connaît alors en effet, en chaque point de L , les valeurs numériques de u , p , q et, comme on sait, on peut en déduire celles de r , s , t . On a donc le droit, pour une équation telle que (1 bis) (ou pour une équation analogue à un nombre quelconque de variables) de parler d'un problème de Cauchy elliptique¹, parabolique ou hyperbolique.

M. SCHAUDER traite le problème de Cauchy du type hyperbolique normal (le nombre n des variables étant quelconque) pour une équation quasi-linéaire, mais en un sens plus large que tout à l'heure, les coefficients des dérivées secondes pouvant dépendre, non seulement des variables indépendantes, mais de u et de ses dérivées premières². Il s'en faut qu'une pareille généralisation soit banale et facile: c'est ce dont on se rend immédiatement compte d'après la remarque, faite plus haut, que les données de Cauchy, pour donner lieu à un problème possible, doivent être dérivables jusqu'à un ordre qui croît, et qui croît indéfiniment, avec n . Il y a même lieu de chercher à améliorer à ce point de vue la belle méthode de M. Schauder, car son analyse suppose la dérivabilité des données au moins jusqu'à l'ordre n , tandis que l'exemple du cas linéaire conduit à présumer qu'il suffit d'aller jusqu'à l'ordre $\frac{n}{2}$.

Remarquable est le rôle indispensable que jouent, dans ce travail comme dans les résultats analogues qui seront exposés à propos du cas elliptique, les principes empruntés au Calcul fonctionnel.

D'autre part, il est essentiel de noter que, jusqu'aux recherches

¹ Dans le cas général comme dans le cas linéaire, une équation analytique du type elliptique n'admet que des solutions analytiques en tout point intérieur à leur domaine d'existence. Ce théorème, énoncé par M. Hilbert, a reçu plusieurs démonstrations dues soit à M. Serge Bernstein, et à ses successeurs, soit à M. Hans Lewy. On est toutefois obligé de supposer, pour les solutions en question, l'existence de dérivées continues jusqu'à l'ordre trois (Serge Bernstein) ou même quatre (Hans Lewy).

D'après cela, l'un des raisonnements que nous avons présentés en commençant pour le type elliptique reste valable lorsqu'on ne suppose plus l'équation linéaire: un problème de Cauchy elliptique relatif à une équation analytique, la ligne S qui porte les données étant elle-même supposée analytique, mais non les données elles-mêmes, ne peut pas admettre de solution *des deux côtés* de S , étant toutefois supposé qu'il s'agit de solutions à dérivées continues (même sur S) jusqu'au troisième ordre.

² Il est à peine besoin de dire que la multiplicité qui porte les données doit avoir une orientation d'espace.

dont nous sommes en train de parler, on ne pouvait pas affirmer, en toute rigueur, qu'une équation *non analytique* de la forme (1) (supposée algébriquement vérifiable) admet toujours des solutions, puisque la seule réponse classiquement connue est celle que fournit le théorème de Cauchy-Kowalewsky. On n'avait jamais répondu à une question de ce genre, même pour une équation linéaire, jusqu'aux importants Mémoires [1, 27] dans lesquels M. Serge Bernstein et le regretté Lichtenstein ont établi la possibilité de la représentation conforme pour une portion de surface non analytique.

On verra dans les conférences suivantes comment le problème est résolu dans le cas elliptique. La réponse, pour le cas hyperbolique résulte des travaux que nous venons de citer.

X

Après nous être demandé si la solution du problème de Cauchy¹ existe, nous avons à nous demander si elle est unique (le cas caractéristique excepté, bien entendu). La question se pose même lorsque toutes les données du problème sont analytiques, car le théorème de Cauchy-Kowalewsky affirme seulement qu'il n'y a qu'une seule solution *holomorphe*.

Pour une équation linéaire à coefficients analytiques², le théorème en question — autrement dit, le fait qu'une telle équation (supposée sans second membre) n'admet, pour des données de Cauchy nulles, d'autre solution que zéro — a été établi par M. HOLMGREN [23a].

Il suffirait d'ailleurs, comme on le constate aisément [20c], de l'établir pour une équation linéaire à *coefficients quelconques*: la question serait, du même coup, élucidée pour le cas général.

Une Note de HAAR [19a, b] ouvre une première voie à cet effet en résolvant le problème pour l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (pour laquelle les méthodes clas-

¹ En ce qui regarde le problème de Dirichlet pour le type hyperbolique nous avons, plus haut, constaté des cas d'indétermination.

² M. HOLMGREN opère, ainsi qu'il est légitime, sur un système d'équations linéaires analytiques du premier ordre.

Une méthode particulière, d'une nature toute différente, s'applique [20b] au cas spécial de l'équation (5).

siques ne fournissent de réponse que si la fonction inconnue est supposée au moins deux fois dérivable, ce que Harr montre n'être pas nécessaire).

La méthode employée fournit d'ailleurs une conclusion plus précise que le théorème d'unicité. Pour une équation à deux variables indépendantes, si un segment de la droite $x = 0$ n'est nulle part tangent à une caractéristique, non seulement deux solutions de l'équation coïncidant le long de ce segment doivent, par cela même, coïncider dans toute une région du plan avoisinant, mais, dans la même région, les valeurs obtenues pour la solution dépendent continûment des valeurs données sur le segment.

Seulement, cette précision de plus, cette augmentation de « compréhension », pour employer le langage des logiciens, limite nécessairement par ailleurs la portée de la méthode, autrement dit, son « extension ». Nous avons vu, en effet, que pour l'équation des potentiels (5), cette continuité de la solution par rapport aux données *n'a pas lieu*. On ne peut donc songer à employer, dans un tel cas, la méthode de Haar.

L'objection ne vaut pas pour le cas hyperbolique, auquel, en effet, M. O. Perron a pu appliquer [32] une analyse toute semblable à celle de Haar.

Mais des résultats beaucoup plus décisifs se dégagent des recherches [26] de M. Hans LEWY (entreprises partiellement en collaboration avec M. K. FRIEDRICHS). Dans le cas hyperbolique, la méthode de M. Hans Lewy, tout en démontrant comme nous l'avons dit l'existence de la solution, en démontre en même temps l'unicité. La démonstration repose sur une analyse des plus intéressantes en elle-même par la portée et la souplesse toutes nouvelles qu'elle donne à l'intégration par approximations successives: l'auteur établit en effet l'existence d'une solution unique pour le problème de Cauchy relatif à n'importe quel système de $m = m' + m''$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes et à m inconnues, de la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= a_1^{i'} u_1 + \dots + a_m^{i'} u_m, & (i' = 1, 2, \dots, m') \\ \frac{\partial u_{i''}}{\partial \eta} &= a_1^{i''} u_1 + \dots + a_m^{i''} u_m, & (i'' = m' + 1, \dots, m) \end{aligned} \right\} (16')$$

Les coefficients a pouvant soit être fonctions des seules variables indépendantes ξ , η , soit dépendre des inconnues u elles-mêmes, et la ligne qui porte les données étant assujettie à ce que ξ et η varient chacun d'une façon monotone (ou au contraire, à être formée d'un segment de parallèle à l'axe des ξ et d'un segment de parallèle à l'axe des η). Le caractère remarquable de la méthode est que, le nombre total m des inconnues étant donné, le nombre m' peut être quelconque, c'est-à-dire que le partage des m équations correspondantes entre celles qui comportent une différentiation par rapport à ξ et celles qui comportent une différentiation par rapport à η peut être quelconque.

A l'aide de ce nouvel outil analytique, M. Hans LEWY peut démontrer, pour tout problème de Cauchy hyperbolique à deux variables indépendantes, à la fois l'existence et l'unicité de la solution. Il arrive à appliquer une méthode analogue au cas elliptique, mais dans des conditions notablement plus délicates, puisqu'il s'agit de démontrer l'unicité sans démontrer en même temps l'existence, celle-ci n'ayant pas lieu en général. Par contre, on démontre du même coup, dans ce cas, le théorème de M. Hilbert sur l'analyticité des solutions des équations du type elliptique, et cela par une voie particulièrement élégante et simple, en étendant la solution supposée connue au domaine complexe grâce à l'intégration d'un système de la forme (16'). Ceci fait, la démonstration d'unicité peut se ramener au fait connu que deux fonctions analytiques ne peuvent coïncider tout le long d'un arc de courbe déterminé quelconque sans être identiquement égales entre elles.

Mais, contrairement à ce qui se passait pour le cas hyperbolique, cette deuxième partie des recherches de M. Hans Lewy suppose l'équation donnée analytique. La solution de la question n'était donc pas complète, même pour deux variables indépendantes. Le complément nécessaire lui a été apporté par une note de M. CARLEMAN [7], le problème étant ramené, comme cela est toujours possible, à l'intégration d'un système de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha u + \beta v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma u + \delta v, \quad (17)$$

où on reconnaît, aux premiers membres, les premiers membres de l'équation de monogénéité de Cauchy et où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions continues définies dans un certain domaine convexe D . Moyennant une définition convenablement précisée de ce qu'on doit entendre par solution du système, on peut démontrer qu'une telle solution ne peut admettre ni un zéro d'ordre de multiplicité infini à l'intérieur de D , ni une infinité de zéros ayant un point d'accumulation intérieur à D . Il est donc en particulier impossible que u et v s'annulent simultanément en tous les points d'une ligne intérieure au domaine en question¹.

Le problème est donc élucidé d'une manière satisfaisante pour les équations à deux variables indépendantes: malheureusement, les méthodes de MM. Hans LEWY et CARLEMAN sont, par essence, limitées à ce cas, puisqu'elles reposent sur la distinction des caractéristiques en deux familles (réelles ou imaginaires) distinctes².

XI.

Dans toutes les étapes que nous venons de passer en revue, l'Analyse n'a pu progresser, conformément aux vues classiques de Poincaré, qu'en se laissant constamment guider par l'interprétation physique. Point de résultats où, au fond, la théorie pure et l'application concrète n'aient été solidaires l'une de l'autre et n'aient marché du même pas.

Il commence à en être autrement dans certaines recherches récentes. Il est d'abord un problème posé par l'application mécanique et où les principes généraux posés dans ce qui précède paraissent tomber en défaut, sans qu'on voie bien nettement quant à présent de quelle manière ils devront être complétés ou corrigés: c'est celui des marées, tel que le

¹ La méthode met également en évidence la propagation par ondes, c'est-à-dire le fait que la valeur de l'inconnue en un point voisin de la ligne qui porte les données dépend uniquement de ce que sont ces données le long d'un *certain arc* de cette ligne.

² Le cas linéaire, pour relativement classique qu'il soit, appellerait de nouvelles recherches. On sait que la démonstration d'unicité s'y fait par transformation d'intégrales de domaines en intégrales de frontières. Mais les intégrales utilisées ne sont pas les mêmes pour les problèmes elliptiques et pour les problèmes mixtes hyperboliques [45] et cette circonstance entraîne, en particulier, des difficultés lorsqu'on veut appliquer des méthodes de ce genre à des équations d'ordre supérieur et de type composite [20].

traitent MM. M. BRILLOUIN et J. COULOMB. Une masse liquide étant en rotation, soit [5] autour d'un noyau sphérique solide, soit [6] dans un récipient cylindrique de révolution et soumise à une force perturbatrice périodique, les oscillations forcées ainsi engendrées dépendent d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (18)$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation et θ la pulsation de la force perturbatrice. On voit que, suivant la grandeur relative de ces deux quantités ω et θ , l'équation peut être du type elliptique ou du type hyperbolique. Dans le premier cas, on a bien affaire à un des problèmes que nous avons mentionnés (problème mixte elliptique) mais ces mêmes données aux limites ne cadrent plus avec nos principes généraux lorsque l'équation devient hyperbolique, et il y a là une sorte de paradoxe qui demande à être élucidé.

Voici maintenant des problèmes que les géomètres ont pu traiter au point de vue qui nous occupe, sans avoir à leur disposition, pour faire prévoir le résultat, une application concrète. Nous avons considéré, pour une équation du type hyperbolique, des données formées par deux arcs *issus* d'un même point (fig. 1, 2) et indiqué ce que doivent être ces données suivant l'orientation relative des arcs en question et des caractéristiques issues de leur point commun. Or on sait aujourd'hui traiter [25b, 28] le cas de deux arcs ayant non plus une extrémité commune, mais (fig. 8) un point *intérieur* commun. Une seule donnée en chaque point convient alors et on verra, par exemple, dans un travail d'E. E. LEVI [25k] et dans celui de M. MASON [28], comment les résultats paraissent dépendre d'une façon beaucoup moins étroite de l'orientation relative des arcs donnés et des caractéristiques. Une étude analogue a été faite pour le troisième ordre par M. SJÖSTRAND [37c].



Fig. 8.

Peut-on, d'autre part, instituer des théories et des méthodes de calcul communes aux trois types d'équations ? Tout ce qui précède conduirait, au contraire, à les considérer comme relevant

de théories entièrement séparées. On est cependant arrivé, dans ces dernières années, à s'affranchir de cette nécessité. Les recherches dont nous voulons parler reposent sur l'emploi de la transformation de Laplace, transformation qui fait correspondre à une fonction $u(x, y, t)$ une nouvelle fonction des deux premières variables x, y et d'une variable auxiliaire positive τ définie par la formule

$$P(x, y, \tau) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) e^{-\tau t} dt. \quad (19)$$

M. Doetsch a, comme on sait, traité d'une manière très approfondie cette transformation et, comme il l'exposera dans une des conférences qui vont suivre, montré le parti important qu'on en peut tirer pour l'étude de l'équation de la chaleur. Mais, d'autre part, il a constaté [11] qu'une méthode tout analogue s'applique à des problèmes de propagation télégraphique qui relèvent du cas hyperbolique. Or, plus récemment, M. PICONE [34] est allé plus loin et, avec le même point de départ, a développé une théorie qui, presque jusqu'à la fin des calculs, s'applique indifféremment aux trois cas.

Ces résultats — auxquels on peut toutefois reprocher d'impliquer une hypothèse sur l'allure de la fonction u à l'infini ¹, afin d'assurer l'existence de l'intégrale (19) — ouvrent, dans le sujet qui nous occupe, la voie à des recherches ultérieures. On peut espérer obtenir dans la même voie la réponse à des questions non encore résolues, telles que celle des équations du type hyperbolique non normal [9, 21], pour lesquelles aucun système de données aux limites (non analytiques) propres à déterminer une solution n'a pu être indiqué jusqu'ici.

QUELQUES INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

1. S. BERNSTEIN. *Communications de la Soc. Math. Kharkow*, 1908 (en russe).
2. H. BLOCK. *Arkiv för Mat. Astr. och. Fys.*, 1911, tome VII.

¹ On connaît, par ailleurs, les conditions à l'infini que l'on est conduit à poser dans le problème de Dirichlet et, de même dans les problèmes mixtes tant elliptiques qu'hyperboliques. Mais il y a lieu de mentionner une condition toute nouvelle de cette nature, l'« Ausstrahlungsbedingung », introduite par M. SOMMERFELD [39b] et qui exprime qu'une fonction de la forme $u(x, y, z) e^{ikt}$ représente un rayonnement se propageant tout entier vers l'extérieur.

3. O. BONNET. *C. R. Ac. Sc. Paris*, tome XL, 1855, p. 1107; XLII, 1856, p. 532.
BJÖRLING, *Archives de Grünert*, tome IV, p. 290.
4. BOULIGAND, DELENS, GIRAUD. *Le problème de la dérivée oblique: Exposés de géométrie publiés sous la direction de M. E. Cartan.* Paris, Hermann, 1935.
5. M. BRILLOUIN. *Quelques propriétés d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique.* Deux conférences professées à l'Institut Henri Poincaré en 1930.
6. M. BRILLOUIN et J. COULOMB. *Oscillations d'un liquide pesant dans un bassin cylindrique en rotation.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.
7. CARLEMAN. *C. R. Ac. Sc. Paris*, tome CXCVII, 1933, p. 461.
8. E. CARTAN. *Bull. Soc. Math.*, tome LIX, 1931.
9. COULON. Thèse, Paris, 1902.
10. DARBOUX. *Leçons sur la Théorie des Surfaces.* Paris, Gauthier-Villars.
11. DOETSCH. *Centenaire de l'Ecole technique supérieure de Stuttgart.* Berlin, Springer, 1929.
12. DU BOIS REYMOND. *Beitrag zur Integration der partiellen Differentialgleichungen.* Leipzig, 1864.
13. DUHEM. *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique.* Paris, Hermann, 1891, tome I.
14. VAN DEN DUNGEN. a) *Bull. Ac. Sc. Belgique*, tome XVIII.
b) *L'acoustique des salles de spectacle.* Paris, Gauthier-Villars, 1934.
15. EINSTEIN. *Sitzber. Berlin*, 1929, et *Math. Ann.*, tome CII, 1930.
16. FUBINI. *Atti Acc. Sc. Torino*, tome XL, 1905.
17. GEVREY. Thèse, Paris, 1913.
18. GOURSAT. a) *Cours d'Analyse*, tome III. Paris, Gauthier-Villars.
b) *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, Hermann, tome II.
c) *Annales de la Faculté des Sc. Toulouse*, tome VI₂, p. 117.
19. HAAR. a) *C. R. Ac. Sc. Paris*, 1928.
b) *Atti. Congr. Intern. Math. Bologne*, 1928.
20. HADAMARD. a) *Notice sur ses travaux scientifiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 45 et Paris, Hermann, 1912 (1^{re} partie).
b) *Princeton University Bull.*, tome XIII, 1902.
c) *Leçons sur la Propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.* Paris, Hermann, 1903, note II.
d) *Bull. Soc. Math.*, t. XXXII, 1904.
e) *C. R. Ac. Sc. Paris*, t. CL, 1910, p. 609 et 772.
f) *Proc. Math. Soc. Bénarès*, t. III, 1921.
g) *Lectures on Cauchy's problem.* Cambridge, New Haven, 1902. Traduit par M^{lle} Jacqueline Hadamard. Paris, Hermann, 1932.
h) *Centenaire de Lobatchewsky*, tome II. Edité par la Soc. Math. de Kazan, 1926.
i) *Congrès intern. Math. Zurich*, 1932, tome II, p. 78.
j) Propriétés d'une équation lin. aux dérivées part. du 4^{me} ordre. *Tohoku Math. Journ.*, tome XXXVII (dédié au professeur Hayashi), 1933.
21. HAMEL. Thèse. Göttingue, 1901.
22. HERGLOTZ. *Abh. Math. Seminar Hamburg*, t. VI, Teubner, Leipzig, 1928.

23. HOLMGREN. a) *Ofversigt af Kongl. Vetensk. Förh.*, 1901.
 b) *Arkiv. för Mat., Astr. och Fys.*, t. I, II, V.
 c) *Ibid.*, t. III, IV, 1904, 1907.
 d) *C. R. Ac. Sc. Paris*, 1907.
 e) *Arkiv för Mat.*, t. XIX, 1927.
24. HUBER, *Monatsh. f. Math. Phys.*, tome XXXIX, 1932.
25. E. E. LEVI. a) *Rendic. Acc. Lincei*, tome XVII₁, 1^{er} semestre, et *Ist. Lombardo*, tome XLI₂, 1908.
 b) *Ann. di Matematica*, tome XVIII, 1911, p. 287.
26. Hans LEWY. *Gött. Nachr. 1927 Math. Ann.*, tomes XCVII, XCVIII (en collaboration avec K. Friedrichs), CI, CIV. *Lincei*, tome XI₆, 1930 (premier semestre).
27. LICHTENSTEIN. *Abh. Ak. Berlin* (Anhang), 1911; *Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1916.
28. MASON. *Math. Ann.*, tome LXV, 1907.
29. MYLLER. a) *Bull. Soc. Sc. Bucarest*, XVII^e année, 1907. *Math. Ann.*, tome LXVIII, 1909.
 b) *C. R. Ac. Sc. Paris*, 1909.
30. MYLLER et VALCOVICI. *Bull. Sec. Sc. Ac. Roumaine*, II^e année. 1914, p. 255 et III^e année, 1915, p. 12, 165.
31. PAINLEVÉ. Thèse. Paris, 1887, p. 19, 21.
32. O. PERRON. *Math. Zeitschr.*, tome XXVII, 1928.
33. PICARD. a) *Journ. Math.*, 1890.
 b) *Note I au tome IV des « Leçons sur la Théorie des surfaces », de G. Darboux.*
 c) *Bull. Sc. Math.*, t. XXIII, 1899.
 d) *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1927.
34. PICONE. *Mem. Cl. Sc. Fys., Mat. e Nat. R. Acc. Italia*, t. V, 1934.
35. POPOVICI, *Ann. Sc. Univ. Jassy*, tome VIII, 1914.
36. SCHAUDER. *Fundamenta Mathematicae*, t. XXIV, 1935, p. 213.
37. SJOSTRAND. a) Thèse. Upsal, 1920.
 b) *Arkiv. för Mat.*, t. XXII A, 1931.
 c) *Ibid.*, t. XXIV A, 1934.
38. SCHWARZ. *Crelle*, t. LXXX, 1875; *Œuvres*, t. I, p. 168.
39. SOMMERFELD. a) *Encycl. All. Sc. Math.*, II A 7 c, p. 514.
 b) *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, tome XXI, 1912, p. 309 (particulièrement p. 331). Voir RUBINOWICZ, *Ann. Phys.*, t. LIII, 1917; KUPRADZE, *C. R. Ac. Sc. U.R.S.S.*, t. I, 1934 et II, 1935.
40. THEODORESCO. *C. R. Ac. Sc. Paris*, t. CXCIV, 1932.
41. TRICOMI. *Mem. R. Acc. Lincei*, t. XIV₅, 1923; *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, tome LII, 1928. Maria CIBRARIO, *Istit. Lombardo*, t. LXV et *Rendic. Circ. Math. Palermo*, t. LVI, 1932.
42. VOLTERRA. *Journ. Math.*, t. XIII₉, 1934, p. 1.
43. WYNANTS. *Bull. Ac. Sc. Belgique*, 1930-35, et *Bull. Sc. M.*, t. LIX, 1933.
44. WEBSTER. *Bull. Am. Math. Soc.*, tome XVIII₂, 1912.
45. ZAREMBA. *Rendic. Acc. Lincei*, t. XXIV₅, 1915. RUBINOWICZ, *Monatshefte. Math. Phys.*, t. XXX, 1920.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE ¹

PAR

Gustav DOETSCH (Freiburg i. B.).

I. — INTRODUCTION.

1. — Il est bien connu que la distinction des types des équations aux dérivées partielles du second ordre subsiste même pour les équations les plus générales à un nombre arbitraire de variables indépendantes. Nous ne nous occuperons ici que des équations du second ordre à *deux variables* indépendantes qui sont *linéaires* par rapport aux *dérivées partielles du second ordre*

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ces équations sont par conséquent de la forme suivante
 $\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right) :$

$$A(x, y)r + 2B(x, y)s + C(x, y)t + F(x, y, z, p, q) = 0.$$

L'équation est dite du *type parabolique* si l'égalité

$$AC - B^2 = 0$$

¹ Résumé de la Conférence faite les 17 et 18 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.* — La conférence a été faite en langue allemande; je tiens à exprimer ici mes remerciements à M^{lle} A. HALPERN, de l'Université de Genève, qui a bien voulu se charger de la traduction en français.

L'essentiel de la *bibliographie* se trouve à la fin de cet article. Les travaux sont indiqués dans le texte par le nom de l'auteur et le numéro du mémoire entre crochets. Toute autre indication bibliographique est insérée dans le texte.

a lieu dans un domaine du plan des (x, y) . On peut alors, par un changement de variables, la ramener à la forme suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (1, 1)$$

Les *caractéristiques* de cette équation sont alors les droites $y = \text{const.}$

2. — On peut mentionner *deux sources différentes* pour la théorie des équations paraboliques. Ceci explique que *les problèmes furent posés d'une façon différente* dans les travaux parus sur ce sujet.

1. Nous avons d'abord le *problème de Cauchy*, qui peut ici être posé de la même manière que pour les équations des autres types. Dans le cas de l'équation (1,1) on se donne z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur un segment de la droite $x = x_0$:

$$z \Big|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

et l'on cherche z dans un domaine adjacent d'étendue indéterminée. La droite $x = x_0$ peut être remplacée par une courbe \mathfrak{C} , qui n'est pas une caractéristique. Si toutes les *données*, c'est-à-dire la fonction f de l'équation (1,1), les « valeurs initiales » φ , φ_1 ainsi que la courbe \mathfrak{C} sont *analytiques* et si l'on demande que les *solutions* soient elles aussi *analytiques*, on aura une solution et une seule, ce qui est démontré par la théorie classique de Cauchy. Nous ne nous arrêterons pas à approfondir ici ce cas analytique à propos duquel il faut mentionner surtout le mémoire célèbre de S. DE KOWALEWSKY (*Crellesches Journal*, 80 (1875), pp. 1-32).

2. *La théorie de la propagation de la chaleur*. On sait que les exemples classiques des équations elliptiques et hyperboliques ont été puisés dans la Physique mathématique, en particulier dans la théorie du potentiel ainsi que dans la théorie des vibrations des milieux élastiques. De même, le type fondamental des équations paraboliques est donné par la théorie de la propagation de la chaleur dans un milieu à une dimension.

La température u dans un milieu conducteur homogène et à une dimension (par exemple dans un fil) satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1,21)$$

(équation homogène de la chaleur) où x désigne l'abscisse, y le temps. (Toutes les équations paraboliques, linéaires et homogènes à coefficients constants peuvent être ramenées à ce type). Dans le cas où il y a des sources de chaleur à l'intérieur du fil, on aura l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y) \quad (1, 22)$$

(équation non homogène de la chaleur). Le problème qui se pose ici d'une façon naturelle est le suivant: Le fil a, à un moment donné $y = 0$, une certaine « température initiale » $\Phi(x)$. A ses extrémités $x = 0$ et $x = l$ on place deux sources de chaleur de température en général variable $A(y)$ et $B(y)$. On cherche la distribution de la température à l'intérieur à un instant quelconque. Il s'agit donc ici d'intégrer l'équation différentielle dans un domaine entièrement déterminé, la demi-bande $0 \leq x \leq l$, $y \geq 0$, les valeurs de la fonction sur les trois parties de la frontière étant données. Ici l'on ne parle plus de données analytiques, les fonctions $\Phi(x)$, $A(y)$, $B(y)$ étant arbitraires. La solution classique de l'équation (1, 21) est la suivante:

$$u(x, y) = \int_0^y A(\eta) G(x, y - \eta) d\eta + \int_0^y B(\eta) G(l - x, y - \eta) d\eta + \int_0^l \Phi(\xi) \Gamma(x, \xi, y) d\xi, \quad (1, 23)$$

G et Γ étant les « fonctions de Green » de la forme suivante:

$$G(x, y) = -\frac{1}{l} \frac{\partial \mathfrak{S}_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{y}{l^2}\right)}{\partial x} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} y} \sin n\pi \frac{x}{l}, \quad (1, 24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \xi, y) &= \frac{1}{2l} \left[\mathfrak{S}_3\left(\frac{x - \xi}{2l}, \frac{y}{l^2}\right) - \mathfrak{S}_3\left(\frac{x + \xi}{2l}, \frac{y}{l^2}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{y}{l^2}} \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n\pi \frac{\xi}{l}. \end{aligned} \quad (1, 25)$$

L'apport de chaleur au voisinage des extrémités est proportionnel à $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'une part et à la différence des températures du fil et de son voisinage de l'autre. L'on voit alors surgir des problèmes où l'on a des relations linéaires entre u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ données aux extrémités du fil.

Le véritable calcul de la solution de ces problèmes et d'autres semblables — envisagés aussi dans le plan et dans l'espace — fut tellement approfondi par FOURIER dans son mémoire célèbre « Théorie analytique de la chaleur » (1822) que, encore, POINCARÉ, dans son cours bien connu [1] fait en 1895, ne fit que suivre l'œuvre de Fourier. Mentionnons cependant que des savants célèbres du XIX^e siècle, comme POISSON, LAMÉ et Lord KELVIN, ont apporté des idées essentielles et très ingénieuses pour le calcul de la solution.

3. — Le point de vue sous lequel le problème était envisagé jusqu'en 1905 est caractérisé par les deux questions que nous venons d'énoncer: la solution du problème de Cauchy dans le cas analytique en partant de l'équation générale (1, 1) et la solution de l'équation homogène de la chaleur (1, 21), pour quelques problèmes aux limites dans une demi-bande posés par la Physique mathématique. Or, précisément en 1905, un caractère entièrement nouveau paraît dans cette théorie. A cette époque HOLMGREN (Suède) envisagea le problème de Cauchy dans le cas non analytique et considéra d'autre part le problème de la chaleur pour des domaines plus généraux que la demi-bande. Il examina aussi la question de l'existence et de l'unicité des solutions ainsi que leur analyticité et la possibilité de leur prolongement analytique. En 1907, E. E. LEVI (Italie) fit progresser surtout la théorie de l'équation non homogène de la chaleur (ses autres résultats et en particulier le contenu de [1] furent dans l'essentiel anticipés par Holmgren; pour la question de priorité voir la note de Holmgren dans les *Comptes Rendus* 24.2.08). En 1913 et 1918, GEVREY (France) s'est attaqué à l'équation linéaire générale et aux équations essentiellement plus générales et dans deux grands mémoires très féconds mit au clair une fois pour toutes la question de l'existence et de

l'analyticité des solutions. Ses résultats n'ont pas été surpassés depuis. Mes propres travaux (publiés à partir de 1923) — commencés alors sans la connaissance des trois auteurs précités — traitent l'équation homogène de la chaleur dans le sein d'une théorie plus générale, celle des opérations fonctionnelles.

Je tracerai maintenant un résumé rapide du développement que la théorie des équations paraboliques prit depuis les travaux de Holmgren et j'attacherai le plus d'importance à un problème qui a été un peu négligé dans la littérature, à savoir à la question de l'unicité de la solution. Pour cela il est indispensable de mettre au clair la véritable signification du mot « solution ». Le fait qu'on peut attacher à ce terme des sens très différents et que cela entraîne de vastes conséquences n'a jamais été exprimé nettement dans la littérature. — Pour les autres parties de la théorie, je serai obligé de me restreindre aux résultats essentiels, sans quoi cet article prendrait l'étendue d'un livre.

II. — LES DIFFÉRENTES CONCEPTIONS D'UNE « SOLUTION ».

1. — On sait depuis longtemps que la solution $z(x, y)$ d'un problème aux limites ne représente pas nécessairement les valeurs sur la frontière elles-mêmes, puisque, en général, cette solution n'a pas de sens pour les points de la frontière. Ceci a lieu même pour des cas les plus simples, comme par exemple pour l'intégrale de Poisson, qui est solution pour le cercle du problème aux limites de l'équation de Laplace. La seule chose qu'on peut demander est que $z(x, y)$ converge vers la valeur donnée sur la frontière quand (x, y) se rapproche d'un point de cette frontière; la même condition doit être posée pour les dérivées, si la valeur de celles-ci est donnée sur la frontière. Mais même cette convergence peut s'interpréter dans différents sens.

a) Du point de vue *mathématique* on envisagera une convergence à deux dimensions, définie par la condition suivante: étant donnée la valeur ζ en un point (ξ, η) de la frontière, il doit être possible de déterminer pour chaque $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$| z(x, y) - \zeta | < \varepsilon$$

pour tous les (x, y) du domaine d'intégration pour lesquels on a

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \delta .$$

Si l'on suppose z continu par rapport à l'ensemble des deux variables à l'intérieur du domaine et si les valeurs sur la frontière sont elles-mêmes continues, cette condition peut s'exprimer ainsi: La fonction, définie à l'intérieur du domaine par $z(x, y)$ et par les valeurs ζ sur la frontière, doit être continue dans le domaine composé de « l'intérieur plus la frontière ». Cette condition se formule d'une manière analogue pour les dérivées s'il y a lieu. C'est toujours dans ce sens qu'on conçoit le raccord avec les valeurs sur la frontière dans des travaux purement mathématiques.

b) Cette conception cependant est de beaucoup trop étroite pour le point de vue de la *physique* et ici se présente un cas intéressant où la physique exige une conception plus générale que celle qui semble être imposée par le point de vue mathématique. Ainsi la conception a) exige que les valeurs sur la frontière soient elles-mêmes continues, par exemple, pour la propagation de la chaleur dans un fil, la température $A(y)$ placée à l'extrémité $x = 0$ doit avoir la même valeur pour $y = 0$ que la température initiale $\Phi(x)$ pour $x = 0$. Dans les cas pratiques cependant c'est généralement le contraire qui a lieu; ce serait un hasard particulier si la flamme avait au commencement de l'expérience la même température que la place qu'elle chauffe. (Il est même caractéristique que dans le tout premier problème dont Fourier donne la solution dans son grand ouvrage les valeurs sur la frontière ne soient pas continues; il s'agit ici de la distribution stationnaire de température dans une plaque ayant la forme d'une demi-bande et les valeurs sont égales à un sur le segment fini de la frontière, à zéro sur les demi-droites). Nous ne pouvons donc pas parler d'une continuité à deux dimensions de la fonction « solution plus valeurs sur la frontière ». Pour la propagation de la chaleur on sait clairement comment la physique doit interpréter le raccord avec les valeurs sur la frontière¹: Si à un

¹ L'interprétation que nous donnons aux conditions aux limites est intimement liée au fait que la chaleur se propage avec une vitesse infinie. Une interprétation très différente peut s'imposer pour des phénomènes qui se traduisent par des équations hyperboliques et qui, par conséquent, se propagent avec une vitesse finie: l'observateur qui établit les conditions aux limites devrait se déplacer avec une vitesse moindre que celle du phénomène (Doetsch [8], p. 70).

moment donné on avançait de l'intérieur vers l'extérieur du fil, on devrait y trouver la température placée sur la frontière; et si en partant d'un temps $y > 0$ l'on reconstituait dans le temps la température d'une place intérieure déterminée, l'on devrait y trouver la température initiale donnée. Dans le plan des (x, y) cela signifie que l'on exige le raccord continu avec les valeurs sur la frontière seulement pour des chemins qui aboutissent perpendiculairement à la frontière (raccord à une dimension); cette condition s'exprime d'une manière analogue pour les dérivées s'il y a lieu ¹. Si les frontières ne sont pas rectilignes on exigera, conformément à la nature du problème, que ce chemin soit normal à la frontière, parallèle aux axes ou une autre condition pareille. Dans ce sens les discontinuités comme celles qui viennent d'être signalées gardent une signification précise: les sommets $(0,0)$ et $(l, 0)$ de la demi-bande ne peuvent pas être atteints si l'on se dirige de l'intérieur normalement à la frontière.

Nous appellerons *particulier* l'énoncé du problème tel qu'il était décrit dans *a*), *général* l'énoncé ² sous la forme donnée dans *b*). Les deux cas ont leur sens et leur justification et se présentent à juste titre comme deux classes différentes de la théorie des problèmes aux limites.

2. — Toute méthode de résolution d'un problème aux limites doit faire certaines hypothèses sur la *nature des solutions* ainsi que sur les *valeurs sur la frontière*, sans quoi il serait impossible d'appliquer la méthode et d'attribuer un sens à la solution trouvée. Ainsi la solution (1,23) donnée sous forme d'intégrale exige tout au moins l'intégrabilité des valeurs sur la frontière. En plus, on ne peut démontrer le raccord même à une dimension avec les valeurs sur la frontière que pour des points pour lesquels on a des hypothèses supplémentaires, telles que continuité ou identité de la valeur de la fonction avec certaines valeurs moyennes. (C'est ici qu'intervient la théorie des intégrales singulières). Il n'y a pas de recherches pour les équations para-

¹ Voir l'article de HILB et SZASZ, *Allgemeine Reihenentwicklungen. Enzyklopädie*, II, 3, fascicule 8, § 6, p. 1245, où l'on trouve une indication d'une définition semblable des conditions aux limites avec la note suivante: « Gerade diese der Natur des Problems angepasste Fragestellung ist bisher in der Literatur verhältnismässig wenig behandelt ».

² En allemand: « Spezielle » und « allgemeine » Problemstellung.

boliques concernant l'existence des solutions dans le cas d'une non-intégrabilité des valeurs sur la frontière ni sur l'interprétation possible des conditions aux limites dans ce cas. Les démonstrations de l'unicité nécessitent surtout une série d'hypothèses sur les solutions et sur certaines dérivées, hypothèses comme l'intégrabilité à une ou deux dimensions, continuité, etc. Ce sont toutes des hypothèses étrangères à la nature du problème qui, par conséquent, doivent être chaque fois nettement explicitées ¹.

3. — L'on voit alors ceci: Pour que le problème soit clairement posé il est indispensable d'une part de préciser quelles conditions on impose à la solution et aux valeurs sur la frontière, de fixer d'autre part le sens dans lequel les conditions aux limites doivent être interprétées.

Il est à regretter qu'une partie même de la littérature moderne, pour ne plus parler de la plus ancienne, reste extrêmement vague sous ce rapport. Ceci entraîne d'une part que les théorèmes et démonstrations sont faux eux-mêmes, d'autre part que des théorèmes, justes sous certaines restrictions, sont employés dans des cas où ces restrictions ne sont pas respectées. Ce sont surtout les démonstrations d'unicité qui montrent la gravité décisive du sens dans lequel on envisage le problème aux limites.

III. — LA QUESTION D'UNICITÉ OU DE MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS.

1. — Dans les ouvrages parus avant 1925 on ne voit nulle part surgir un doute sur l'unicité de la solution des équations paraboliques ², on y trouve, au contraire, une série de démonstrations du fait que la solution, si elle existe, est bien unique; ainsi

¹ Dans le cas de l'énoncé particulier du problème on a l'habitude d'appeler régulières les solutions de l'équation (1,1) qui sont, ainsi que leurs dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, continues dans le domaine plus la frontière.

² Seul M. É. Picard indiquait à l'occasion (*Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences*, Paris, 1905), sans d'ailleurs insister, que si l'on envisageait la propagation de la chaleur dans un conducteur illimité l'on devait, pour démontrer l'unicité, admettre des hypothèses sur l'allure à l'infini de la fonction et de ses dérivées. Mais c'est plutôt le fait qu'un cas limite exige des considérations particulières, qui est souligné ici.

Holmgren (*Öfversikt af K. Vet. Akad. Förhandlingar*, 1901, pp. 91-103) le démontra pour l'énoncé particulier du *problème de Cauchy* dans le cas non analytique. Mais nous ne voulons pas insister ici sur le problème de Cauchy.

2. — Pour un *problème aux limites* — et nous en reparlerons dans VI — les valeurs de z sont données sur un contour ouvert \mathfrak{C} , composé de deux courbes \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 à gauche et à droite, dont les points extrêmes inférieurs A_1, A_2 ou supérieurs B_1, B_2 se trouvent à égale hauteur, et d'un segment de caractéristique \mathfrak{R} , qui relie les points extrêmes inférieurs ou supérieurs. Dans les cas considérés dans la suite \mathfrak{R} se trouve en bas. Le problème consiste à déterminer z dans les points « entre \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 », c'est-à-dire dans les points intérieurs au domaine délimité par $A_1A_2B_2B_1A_1$ et dans les points de B_1B_2 lui-même. Soit \mathfrak{B} l'ensemble de ces points.

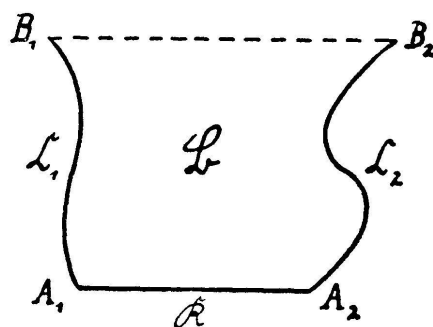


Fig. 1.

L'on connaît trois types de démonstration de l'unicité que je ne citerai pas dans l'ordre historique, mais dans l'ordre de leur simplicité. (J'ometts ici le type le plus primitif de démonstration qui part de la représentation effective de la solution par ses valeurs sur la frontière, représentation sous forme d'une intégrale; j'en parlerai à l'occasion dans VI, 3).

1. *Démonstration¹ de Gevrey* ([1], n° 18). — Elle s'applique dans certains cas à l'équation parabolique linéaire générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z = f(x, y) . \quad (3, 21)$$

Nous envisageons d'abord l'équation homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 . \quad (3, 22)$$

Supposons que u satisfait à l'équation dans \mathfrak{B} et soient u continue dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ continues dans \mathfrak{B} ; pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ il suffira de

¹ La démonstration de Picone [1] qui se sert aussi de la méthode de Gevrey, est du même type.

supposer l'existence dans \mathfrak{B} . Considérons les *deux cas particuliers* suivants:

a) Soient dans \mathfrak{B} :

$$b(x, y) \leq 0, \quad c(x, y) < 0.$$

Alors u ne peut pas prendre de maximum positif (> 0) dans \mathfrak{B} . (Cela exprime en un point (x_0, y_0) de B_1B_2 que les inégalités $u(x_0, y_0) > 0$ et $u(x_0, y_0) \geq u(x, y)$ ne peuvent pas être satisfaites pour les points voisins avec $y \leq y_0$). Si c'était le cas en un point P de \mathfrak{B} , la considération des sections $y = \text{const.}$ et $x = \text{const.}$ nous montrerait qu'on aurait nécessairement en P

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$$

et, si P ne se trouve pas sur B_1B_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

si P se trouve sur B_1B_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \geq 0$$

et, par conséquent, dans tous les cas:

$$b \frac{\partial u}{\partial y} \leq 0.$$

En plus, nous avons en P

$$cu < 0.$$

L'équation (3,22) ne pourrait alors pas être satisfaite.

Cependant, en raison de sa continuité, u doit avoir un maximum absolu dans le domaine fermé $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$. Par conséquent, ce maximum sera ≤ 0 s'il est atteint dans \mathfrak{B} , ou bien il sera atteint sur \mathfrak{C} .

Un raisonnement analogue nous montre que u ne peut pas avoir de minimum négatif (< 0) dans \mathfrak{B} , et que, par conséquent, ce minimum sera ≥ 0 s'il est atteint dans \mathfrak{B} , ou bien qu'il sera atteint sur \mathfrak{C} .

Supposons maintenant que l'équation non homogène (3, 21) ait deux solutions différentes z_1, z_2 , qui prennent la même valeur sur la frontière \mathfrak{C} et ceci dans le sens particulier que « la fonction plus la valeur sur la frontière » est continue dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, que leurs premières dérivées sont continues dans \mathfrak{B} , tandis que de $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}$ on ne suppose que l'existence dans \mathfrak{B} . La différence

$u = z_1 - z_2$ satisfait alors à l'équation homogène (3, 22) et aux conditions posées plus haut, elle a en plus sur la frontière la valeur zéro, de façon que le maximum absolu ne peut être que ≥ 0 . Mais alors il découle du résultat énoncé plus haut que ce maximum est égal à zéro. La même chose peut être prouvée pour le minimum absolu. Par conséquent nous avons $u \equiv 0$, c'est-à-dire $z_1 \equiv z_2$.

b) Soient dans \mathfrak{B} :

$$b(x, y) \leq B < 0, \quad 0 \leq c(x, y) \leq C.$$

(L'équation de la chaleur appartient à ce type). Par la substitution

$$z(x, y) = e^{Ky} \zeta(x, y) \quad (K = \text{const.})$$

l'équation (3, 21) se transforme en une équation en ζ , qui ne se distingue de la première que par le fait que le coefficient de ζ est maintenant égal à $c + Kb$. D'après les hypothèses sur b et c , l'on peut choisir K assez grand pour que cette fonction soit négative dans \mathfrak{B} , de façon que la déduction de a) est applicable à ζ . Mais si, les valeurs sur la frontière étant données, il n'y a qu'une seule solution ζ , il n'existe de même qu'une seule solution z de l'équation primitive avec les valeurs correspondantes sur la frontière.

2. *Démonstration de Poincaré* ([1], pp. 27-30) pour l'équation de la chaleur (1, 22). (Cette démonstration est peut-être plus ancienne, on la trouve dans beaucoup de traités sur les équations aux dérivées partielles de la physique). Poincaré envisage l'équation pour la demi-bande (voir p. 45), mais on peut aussi considérer une frontière plus générale, comme sur p. 51, si l'on suppose que les courbes \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont représentables par deux fonctions univoques et dérivables

$$\mathfrak{C}_1: x = \gamma_1(y) \quad \mathfrak{C}_2: x = \gamma_2(y).$$

Supposons que l'équation non homogène (1, 22) ait deux solutions différentes pour des valeurs données sur la frontière. Alors l'équation homogène (1, 21) a une solution $u(x, y)$ non identiquement nulle, prenant sur la frontière les valeurs zéro.

Je reproduis d'abord la démonstration usuelle et en m'abstenant de remarques.

Envisageons l'intégrale

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u^2(x, y) dx, \quad (a)$$

étendue sur un segment de caractéristique qui fait partie de \mathfrak{B} . Alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dy} &= \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{1}{2} u^2(\gamma_2(y), y) \frac{d\gamma_2}{dy} - \frac{1}{2} u^2(\gamma_1(y), y) \frac{d\gamma_1}{dy} \\ &= \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial u}{\partial y} dx. \end{aligned} \quad (b)$$

En vertu de l'équation différentielle (1, 21) on a

$$\frac{dJ}{dy} = \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} - \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (c)$$

et par conséquent

$$\frac{dJ}{dy} \leq 0. \quad (d)$$

Avec y_0 ordonnée de A_1 et de A_2 , on a $u(x, y_0) = 0$ et de ce fait

$$J(y_0) = 0; \quad (e)$$

donc il découle de (d) et (e):

$$J(y) \leq 0, \quad (f)$$

tandis que, par définition, on a $J(y) \geq 0$. Donc on doit avoir $J(y) \equiv 0$, de façon que u , si elle est continue, est identiquement nulle.

Cette démonstration se sert en réalité d'un si grand nombre d'hypothèses qu'il est difficile de les énumérer toutes. L'intégrale (a) existe certainement si u se raccorde d'une façon continue — au moins dans la direction des x — avec les valeurs sur la frontière, puisque à l'intérieur u est en tous cas continue dans la direction des x en vertu de l'existence de $\frac{\partial u}{\partial x}$. Cependant (b) exige que J

soit *dérivable* et encore que $\frac{dJ}{dy}$ puisse être obtenue par la règle connue. (c) présuppose que, si (x, y) se déplace horizontalement vers la frontière, non seulement u mais aussi $u \frac{\partial u}{\partial x}$ tende vers zéro (par exemple que $\frac{\partial u}{\partial x}$ reste bornée sur ce chemin; Gevrey a montré ([2], chap. III) que ceci n'est, en général, pas le cas). Pour autoriser le passage de (d) et (e) à (f), J devrait être *continue pour* y_0 ou, en d'autres termes, l'on devrait à la place de $J(y_0)$ envisager la limite vers laquelle J tend pour $y \rightarrow y_0$. Or, le fait que u^2 tende vers zéro si l'on s'approche d'un point quelconque de \mathfrak{R} , n'entraîne nullement que aussi $\int u^2 dx$ tende alors vers zéro. Ceci signifierait que u converge vers zéro « en moyenne » et cela nécessiterait des hypothèses, par exemple que u converge vers zéro uniformément en x pour $y \rightarrow y_0$ ou bien, d'après Arzelà, que u reste bornée dans le voisinage de \mathfrak{R} . Nous verrons plus tard, à quel point ces hypothèses sont indispensables pour la validité de la démonstration.

3. *Démonstration de Volterra* ([1], p. 64) pour l'équation de la chaleur, plus développée chez E. E. Levi ([3], p. 190). Cette démonstration se base sur la transformation connue de Green d'une intégrale de surface en intégrale prise le long d'un contour, transformation dont on se sert beaucoup dans d'autres domaines des équations aux dérivées partielles. Les conditions sous lesquelles la démonstration est juste ne sont point indiquées par Volterra. Levi indique soit-disant toutes les hypothèses employées, mais il en néglige une et cela, comme nous verrons, précisément la plus décisive. Son théorème s'énonce ainsi: Soit \mathfrak{C} un arc de courbe dont les points extrêmes A et B se trouvent à la même hauteur; supposons cet arc placé entièrement au-dessous de AB et tel que les parallèles aux axes aient au plus deux points communs avec l'arc. Soit \mathfrak{B} l'ensemble de points intérieurs à $\mathfrak{C} + AB$ et du segment AB lui-même et suppo-

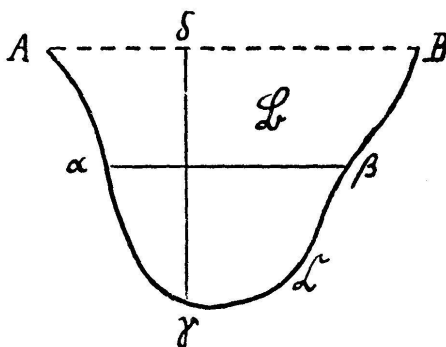


Fig. 2.

sons que la fonction u satisfait aux conditions suivantes :

- a) u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont continues dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}^1$,
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ linéairement intégrable par rapport à x , $\frac{\partial u}{\partial y}$ est dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ linéairement intégrable par rapport à y ,
- c) u satisfait dans \mathfrak{B} à l'équation (1, 21),
- d) u a la valeur zéro sur \mathfrak{C} .

Alors on a $u \equiv 0$ dans \mathfrak{B} .

Les transformations dont la démonstration se sert s'écrivent ainsi (voir fig. 2); de plus b) entraîne que

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} \int u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy &= \int dy \int_a^{\beta} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int dy \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_a^{\beta} - \int_a^{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \\ &= - \int_{\mathfrak{B}} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

en vertu de a) et d);

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} \int u \frac{\partial u}{\partial y} dx dy &= \int dx \int_{\gamma}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \int dx \{ u^2(\delta) - u^2(\gamma) \} \\ &= \frac{1}{2} \int u^2(\delta) dx = \frac{1}{2} \int_{AB} u^2 dx \end{aligned}$$

en vertu de d), et par conséquent

$$\int_{\mathfrak{B}} \int u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = - \int_{\mathfrak{B}} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{AB} u^2 dx .$$

Le premier membre s'annulant en vertu de c), les deux intégrales du second membre doivent être nulles elles aussi, donc $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ en vertu de sa continuité et par conséquent $u = \text{const.} = 0$.

¹ Remarquons que l'existence de $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur la frontière est ici admise.

L'on constate immédiatement que la continuité à deux dimensions de u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ n'est point utilisée pour l'évaluation de l'intégrale; il suffit ici que le raccord de u avec les valeurs sur la frontière soit continu dans la direction des x et des y et que $\frac{\partial u}{\partial x}$ reste bornée si l'on s'approche de la frontière dans la direction des x . Par contre l'on admet l'hypothèse essentielle qui n'est pas exprimée, que $\frac{\partial u}{\partial y}$ ou, ce qui revient au même, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, sont dans \mathfrak{B} intégrables à deux dimensions. Si u n'était supposée continue qu'à une dimension dans la direction des x et des y , ce qui est possible dans cette démonstration, l'on devrait même exiger que u et $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient de carré intégrable à deux dimensions.

3. — Je ne veux pas m'arrêter ici à tirer des démonstrations précédentes tout ce qui pourrait servir à établir un théorème aussi général que possible¹; je veux plutôt résumer ici mes remarques sur les trois types de démonstration:

La première démonstration est entièrement adaptée à l'énoncé « particulier » du problème; la seconde et la troisième peuvent être employées aussi pour l'énoncé « général », mais nécessitent alors toute une série d'hypothèses fondamentales. Le soupçon s'impose alors que la solution du problème « général » n'est pas unique si les hypothèses ne sont pas très étroites. Et, en effet, il en est ainsi! Pour le montrer il suffit que pour une simple équation, comme l'équation homogène de la chaleur (1, 21) et pour un simple domaine comme la demi-bande ou un quart du plan qui est une demi-bande dégénérée, nous donnions l'exemple d'une fonction-solution qui tende vers zéro si l'on s'approche de la frontière normalement, sans être cependant identiquement nulle. J'appellerai de telles fonctions « solutions singulières ».

1. Dans le quart du plan $x > 0, y > 0$ la fonction

$$\psi(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (3, 311)$$

¹ J'en reparlerai à une autre occasion.

a cette propriété. Elle remplace dans le quart du plan la fonction de Green $G(x, y)$ de (1, 24). Cette solution possède même une signification physique: elle représente la distribution de température qu'on obtient si l'on apporte en un temps extrêmement court une quantité finie de chaleur à l'extrémité $x = 0$ du fil (explosion de chaleur). Mais ce n'est pas seulement cette solution qui possède la propriété demandée, toutes ses dérivées partielles par rapport à y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}, \quad \dots \quad (3, 312)$$

l'ont aussi (Doetsch [3], p. 304). De ces fonctions l'on peut à nouveau déduire une infinité de solutions singulières: si l'on pose, par exemple,

$$u(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y - y_0) & \text{pour } y > y_0 > 0, \\ 0 & \text{pour } 0 < y \leq y_0, \end{cases} \quad (3, 313)$$

u tend encore vers zéro si l'on s'approche normalement des frontières du quart du plan et l'équation différentielle est satisfaite dans tout l'intérieur et aussi sur la droite $y = y_0$.

2. Dans la *demi-bande* $0 < x < l, y > 0$ la fonction

$$G(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(x + 2nl, y) \quad (3, 321)$$

connue de (1,24), ainsi que ses dérivées partielles par rapport à y

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 G}{\partial x^4}, \quad \dots \quad (3, 322)$$

possèdent la propriété analogue (Doetsch [3], p. 299), comme d'ailleurs aussi toutes les fonctions formées à partir de ces solutions d'après le schéma suivant

$$u(x, y) = \begin{cases} G(x, y - y_0) & \text{pour } y > y_0 > 0, \\ 0 & \text{pour } 0 < y \leq y_0 \end{cases} \quad (3, 323)$$

(Doetsch [4], p. 612). Toutes ces solutions peuvent être interprétées comme distributions de température, créées par des explosions de chaleur (Doetsch [3], p. 301). — De même

$$G(l - x, y) \quad (3, 324)$$

et les fonctions qui en peuvent être déduites de la manière indiquée plus haut sont des solutions singulières.

3. Les mêmes relations se présentent aussi pour des *problèmes aux limites d'un autre genre*, par exemple pour ceux où intervient la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur la frontière: la fonction

$$\chi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (3, 331)$$

satisfait dans le quart du plan à l'équation (1, 21) et tend vers zéro si l'on s'approche normalement de la frontière inférieure, tandis que $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à gauche. Les dérivées par rapport à y de cette fonction se comportent de la même façon.

La fonction

$$\mathfrak{Z}_3\left(\frac{x}{2}, y\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(x + 2n, y) \quad (3, 332)$$

dans la demi-bande $0 < x < 1, y > 0$ tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière inférieure, tandis que sa dérivée par rapport à x tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à gauche et à droite.

La fonction

$$-\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{Z}_2\left(\frac{x}{2}, y\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \psi(x + 2n, y) \quad (3, 333)$$

dans la demi-bande $0 < x < 1, y > 0$ tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière inférieure et de la frontière à gauche, tandis que sa dérivée par rapport à x tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à droite (Doetsch [9], pp. 333, 338).

4. Il existe encore un *type tout à fait différent* de solutions singulières. Supposons donnée la demi-bande de largeur l et établissons la fonction de Green correspondante à (1, 24) d'abord pour l'intervalle $0 \leq x \leq \frac{l}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

Soit $G\left(x, y, \frac{l}{n}\right)$ cette fonction de Green et posons

$$u(x, y) = \begin{cases} G\left(x, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{n} \\ -G\left(\frac{2l}{n} - x, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } \frac{l}{n} \leq x \leq 2\frac{l}{n} \\ G\left(x - \frac{2l}{n}, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } 2\frac{l}{n} \leq x \leq 3\frac{l}{n} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3, 34)$$

u représente simplement le prolongement analytique de G dans la direction des x . Cette fonction ainsi que ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont continues sur les droites $x = \nu \frac{l}{n}$ et satisfait même sur ces droites à l'équation (1, 21). Elle tend vers zéro quand on se rapproche d'une frontière quelconque de la demi-bande. Pour $n = 2$ elle est simplement une combinaison linéaire de solutions singulières précitées, à savoir $u(x, y) = G(x, y) - G(l - x, y)$, ce qui n'est plus le cas pour $n > 2$.

Je voudrais ici faire la remarque que pour le *problème de Cauchy* je ne connais pas d'exemple réfutant l'unicité dans le cas de l'énoncé « général ».

4. — Il est très intéressant d'examiner ici de quelle façon les *démonstrations d'unicité* tombent en défaut en face de ces exemples, disons de la fonction G . La *première démonstration* (de Gevrey) n'entre pas en ligne de compte puisque, dans la demi-bande fermée, $G(x, y)$ n'est pas continue et même pas bornée: dans le voisinage du sommet $x = 0, y = 0$ cette fonction se comporte comme $\psi(x, y)$ et peut, par conséquent, y prendre des valeurs positives arbitrairement petites et arbitrairement grandes.

L'intégrale $J(y)$ employée dans la *seconde démonstration* (de Poincaré) prend dans le cas $u \equiv G(x, y)$ et $l = 1$ la valeur

$$J(y) = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n^2 \pi^2 y}.$$

Il est vrai que cette expression est dérivable pour $y > 0$ et que la dérivée est constamment négative, mais pour $y \rightarrow 0$ elle ne tend point vers zéro mais vers ∞ (Doetsch [3], p. 300).

L'exemple (3,323) nous montre qu'il ne suffit point d'admettre que $J \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow 0$, de sorte par exemple que $u(x, y)$ tende uniformément vers zéro en x pour $y \rightarrow 0$. Dans cet exemple cette condition est évidemment satisfaite, tandis que J n'est pas dérivable pour $y = y_0$, étant de la forme

$$J(y) = \begin{cases} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n^2 \pi^2 (y-y_0)} & \text{pour } y > y_0, \\ 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq y_0 \end{cases}$$

de façon que la règle exprimée dans (b), p. 54, n'est pas applicable non plus ¹.

La troisième démonstration (de Levi) semble être applicable à $G(x, y)$ puisque la condition a), comme nous l'avons indiqué plus haut, n'intervient pas en toute sa rigueur dans la démonstration et n'y est employée que dans une mesure qui est satisfaite pour G . Mais G ne satisfait pas à la condition négligée par Levi, celle qui exige que $\frac{\partial u}{\partial y}$ soit intégrable à deux dimensions dans le domaine! Il semble être une ironie du destin que Levi lui-même ait démontré dans le même mémoire ([3], p. 229) que $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ n'est pas intégrable, ce qui entraîne immédiatement la non intégrabilité de $\frac{\partial G}{\partial y}$.

5. — Le procédé par lequel j'ai trouvé ces solutions singulières vaut peut-être la peine d'être mentionné, parce qu'il donne la possibilité de les trouver toutes. Il fut déduit à l'occasion de l'étude d'une nouvelle *méthode d'intégration d'équations aux dérivées partielles* dans une demi-bande, méthode bien adaptée précisément à l'énoncé « général » (Doetsch [1, 2, 3, 4, 8, 9]).

¹ Pour cette même raison la démonstration de Thum, qui opère avec des intégrales de Lebesgue et des fonctions de carré intégrable, tombe en défaut (v. Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen. *Crellesches Journal*, 168 (1932), pp. 65-90, § 1).

Elle emploie la transformation de Laplace

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} F(y) dy \equiv \mathfrak{L}\{F\}$$

et sa propriété fondamentale

$$\mathfrak{L}\{F'\} = s\mathfrak{L}\{F\} - F(0), \quad (3, 51)$$

où $F(0)$ représente la valeur limite de F pour $y \rightarrow +0$. Si l'on applique cette transformation par rapport à la variable ¹ y

aux « fonctions objet » $u(x, y)$ qui pourraient être solutions de l'équation différentielle, on leur fait correspondre certaines « fonctions résultat » $v(x, s)$:

$$\mathfrak{L}\{u(x, y)\} = v(x, s),$$

et l'équation aux dérivées partielles (1, 21) se transforme suivant (3, 51) en une équation différentielle *ordinaire* en v :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - sv + \Phi(x) = 0, \quad (3, 52)$$

dans laquelle la *condition initiale* $\Phi(x)$ est introduite et où s joue le rôle d'un paramètre. *Ce sont les deux*

caractères essentiels de la méthode ². Les fonctions sur la frontière $A(y)$ et $B(y)$ se transforment en les deux valeurs de v sur la frontière

$$v(0, s) \equiv a(s) = \mathfrak{L}\{A\}, \quad v(l, s) \equiv b(s) = \mathfrak{L}\{B\}.$$

¹ Qui parcourt dans notre problème justement l'intervalle infini $0 < y < \infty$.

² Cette méthode s'applique évidemment à toutes les équations linéaires dont les coefficients de la partie homogène ne dépendent que de x et non pas de y . Elle donne entre autres une justification rigoureuse de ce qu'on appelle calcul symbolique de Heaviside (Doetsch [10]). On peut de même employer une autre méthode qui transforme les équations par rapport à la variable x et qui est adaptée à un intervalle *fini*. Alors les coefficients peuvent dépendre de y (Doetsch [12]).

A propos du calcul de Heaviside voir *L'Ens. mathématique*, XXXIII, 1934, p. 118.

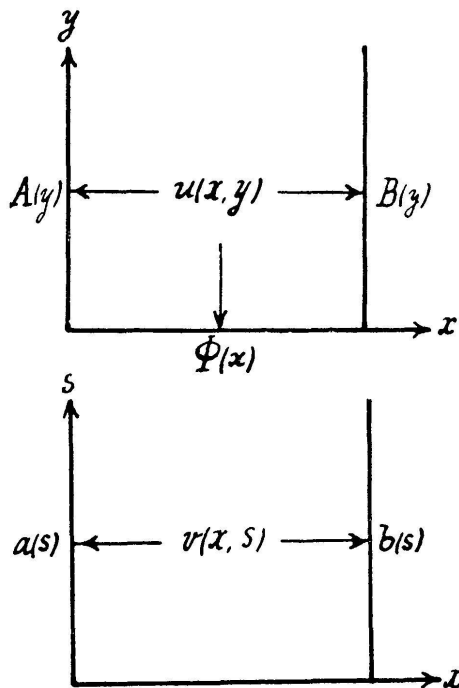


Fig. 3.

Si nous prenons en particulier

$$\Phi(x) \equiv 0, \quad B(y) \equiv 0$$

et par conséquent aussi $b(s) \equiv 0$, alors la solution de (3,52) est la suivante:

$$v(x, s) = a(s) g(x, s) \quad \text{avec} \quad g(x, s) = \frac{\text{Sin}(l-x) \sqrt{s}}{\text{Sin} l \sqrt{s}}. \quad (3, 53)$$

La solution de l'équation initiale aux dérivées partielles sera trouvée si l'on peut déterminer inversement la fonction objet de cette fonction résultat. On sait que $A(y)$ correspond à $a(s)$, $G(x, y)$ à $g(x, s)$ et qu'au produit de deux fonctions résultat $f_1(s)$ et $f_2(s)$ correspond ce que nous appelons la *composition* (Faltung)

$$F_1 * F_2 \equiv \int_0^y F_1(\eta) F_2(y - \eta) d\eta$$

des fonctions objet:

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

A (3,53) correspond alors la fonction objet

$$u(x, y) = A(y) * G(x, y). \quad (3, 54)$$

C'est la solution connue (1,23) pour $\Phi = B = 0$.

Maintenant intervient le raisonnement suivant (Doetsch [3], p. 298; [8], p. 75). La méthode repose évidemment sur *deux hypothèses essentielles*:

1. Il est supposé que

$$a(s) = \mathfrak{L}\{A\} \quad \text{et} \quad b(s) = \mathfrak{L}\{B\}$$

sont les valeurs sur la frontière de v :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathfrak{L}\{u\} = \mathfrak{L}\{\lim_{x \rightarrow 0} u\}, \quad \lim_{x \rightarrow l} \mathfrak{L}\{u\} = \mathfrak{L}\{\lim_{x \rightarrow l} u\}, \quad (3, 55)$$

c'est-à-dire que *les valeurs sur la frontière des fonctions transformées sont les transformées des valeurs sur la frontière* (ou, en d'autres termes, que la transformation fonctionnelle est conti-

nue). Si ce n'était pas le cas pour un u , l'on aurait une nouvelle fonction sur la frontière $\bar{a}(s) \neq \mathfrak{L}\{A\}$ dans le domaine résultat et, par conséquent, une autre solution $\bar{v}(x, s) = \bar{a}(s)g(x, s)$. Cette dernière donne lieu à une autre solution $\bar{u}(x, y)$ dans le domaine objet. Mais étant donné que, plus haut, nous avons déjà obtenu une solution correspondante à la condition $A(y)$ sur la frontière, ceci n'est possible que s'il existe plusieurs solutions pour une fonction sur la frontière. Si maintenant à $\bar{a}(s)$ correspondait la fonction objet $\bar{A}(y)$, il en résulterait, par l'application de la règle de composition :

$$\bar{u}(x, y) = \bar{A}(y) * G(x, y) .$$

Mais ce serait une solution avec la fonction \bar{A} sur la frontière et certainement pas avec A . Il ne reste que la possibilité que $\bar{a}(s)$ ne corresponde à aucune fonction objet. *Si nous choisissons maintenant $\bar{a}(s)$ de façon qu'aucune fonction objet ne corresponde à $\bar{a}(s)$, mais qu'il y ait une correspondante à $\bar{a}(s)g(x, s)$, alors nous obtenons une solution de l'équation aux dérivées partielles qui ne satisfait pas aux relations (3,55), qui par conséquent diffère de la solution déduite d'après (3,54) de la valeur sur la frontière.*

Si l'on choisit $\bar{a}(s) = 1$, nous sommes sûrs de n'avoir aucune fonction objet correspondant à cette fonction, tandis que $\bar{a}(s)g(x, s) = g(x, s)$ possède évidemment $G(x, y)$ comme fonction objet. Cette fonction a, pour $x \rightarrow 0$, la valeur $A(y) \equiv 0$ sur la frontière, valeur pour laquelle la formule (3,54) donnerait seulement la solution $u \equiv 0$, tandis que sa fonction résultat $g(x, s)$ prendra pour $x \rightarrow 0$ la valeur un.

Si l'on choisit $\bar{a}(s) = s^n$, on obtient $u = \frac{\partial^n G}{\partial y^n}$, donc la solution singulière (3,322). Pour $\bar{a}(s) = e^{-y_0 s}$ on trouve la solution (3,323). Cette dernière est d'ailleurs une superposition des solutions (3,322):

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y_0)^n}{n!} \frac{\partial^n G(x, y)}{\partial y^n} .$$

2. La seconde hypothèse faite dans notre méthode est que la

transformation de Laplace soit permutable avec la dérivation par rapport à x :

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L} \{ u \} .$$

L'exemple (3, 34) nous montre pour $n = 3$ qu'il existe effectivement des solutions où cette hypothèse n'est pas satisfaite, qui sont par conséquent des solutions singulières. Ici $\mathfrak{L}\{u\}$ n'est même pas continue pour $x = \frac{2}{3}l$, d'autant moins dérivable.

6. — Je voudrais encore montrer sur un exemple que même la formule classique (1, 23) de la solution entraîne des contradictions évidentes si l'on conserve l'unicité. Pour simplifier, considérons le cas dégénéré du quart du plan $x > x_0, y > 0$ et donnons-nous la valeur $\Phi(x) \equiv 0$ sur la frontière inférieure, la valeur $A(y)$ sur la frontière à gauche. La solution classique de l'équation (1, 21) s'écrit alors

$$u(x, y) = A(y) * \psi(x - x_0, y) , \quad (3, 61)$$

où ψ désigne la fonction (3,311). Envisageons maintenant la fonction $u = \psi(x, y)$ elle-même qui satisfait à l'équation (1, 21) dans tout le demi-plan $y > 0$ et prend sur la frontière inférieure les valeurs zéro. Soit $x_0 = -\alpha$ ($\alpha > 0$). Sur la frontière $x = x_0$ la solution ψ prend la valeur $\psi(-\alpha, y) = -\psi(\alpha, y)$. La formule (3, 61) donne alors

$$-\psi(\alpha, y) * \psi(x + \alpha, y) .$$

D'après un théorème d'addition de Cesàro (Sur un problème de propagation de la chaleur. *Acad. Royale de Belgique, Bull. d. l. classe des Sc.*, Bruxelles, 1902, pp. 387-407), pour lequel il est d'ailleurs essentiel que $\alpha > 0, x + \alpha > 0$, cette dernière expression est égale à

$$-\psi(x + 2\alpha, y)$$

et pas du tout à $\psi(x, y)$. D'ailleurs, la température restant zéro sur la frontière $y = 0$ et négative sur la frontière $x = -\alpha$, la solution $-\psi(x + 2\alpha, y)$ semble au premier abord avoir plus de sens pour la physique, car alors la température est constam-

ment négative, tandis que pour $\psi(x, y)$ la température passe pour $x = 0$ des valeurs négatives aux valeurs positives. Mais ceci s'explique du fait que les deux solutions correspondent à des conditions aux limites différentes pour $x \rightarrow \infty$. L'influence des conditions aux limites à l'infini et la question dans quelle mesure celles-ci peuvent être données n'a pas été jusqu'à maintenant étudiée dans la littérature.

IV. — LES PRINCIPES DE HUYGHENS ET D'EULER.

1. — La non-unicité oblige à prendre des précautions surtout dans l'application aux solutions d'équations paraboliques du principe de Huyghens et de celui d'Euler. Le *principe de Huyghens* (Hadamard [1]) détermine la solution une fois à partir de la frontière primitive, puis à partir d'une station intermédiaire. L'exemple le plus simple serait le suivant: Soit un fil, de température initiale nulle, qui s'étend d'un côté à l'infini; appliquons à la frontière $x = 0$ la température un, alors; d'après (3, 61) nous obtenons pour $x > 0$ la température

$$1 * \psi(x, y) .$$

Si l'on prend comme frontière le point intermédiaire x_0 ($0 < x_0 < x$), on y a la température $1 * \psi(x_0, y)$, donc dans x

$$1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) .$$

Dans le cas de l'unicité on en peut conclure

$$1 * \psi(x, y) = 1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) ,$$

d'où, par dérivation par rapport à y ,

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) \quad (0 < x_0 < x) .$$

Ceci n'est autre que le théorème d'addition de Cesàro, mentionné à la page 65. Mais la conclusion n'est pas légitime, si nous ne possédons pas de théorème d'unicité, rigoureusement applicable dans ce cas.

Si dans la fonction de Green G de (1, 24) nous mettons en évidence la largeur l de l'intervalle en écrivant $G(x, y; l)$,

alors le principe de Huyghens appliqué à la propagation de la chaleur dans un fil fini, donne lieu à la relation

$$G(x, y; l) = G(x_0, y; l) * G(x - x_0, y; l - x_0) \quad (0 < x_0 < x < l)$$

qui, explicitement écrite, représente une relation assez compliquée entre des fonctions \mathfrak{S}_3 (Doetsch [11]).

Si l'on applique le principe de Huyghens dans la direction des y au lieu de celle des x , on obtient pour la fonction $\Gamma(x, \xi; y)$ de (1, 25) le théorème transcendant d'addition (Doetsch [1], p. 51):

$$\int_0^l \Gamma(x_1, \xi; y_1) \Gamma(\xi, x_2; y_2) d\xi = \Gamma(x_1, x_2; y_1 + y_2)$$

pour $0 < \frac{x_1}{x_2} < l$ et $\frac{y_1}{y_2} > 0$.

2. — *Le principe d'Euler* (Doetsch [9]) détermine une solution dans le même domaine de base au moyen de deux espèces de conditions sur la frontière, par exemple une fois par les valeurs sur la frontière de la fonction elle-même, puis par celles d'une de ses dérivées. On obtient ainsi par identification une relation en général transcendante. Envisageons par exemple (Doetsch [9], p. 340) la distribution de la température dans un fil de longueur un, distribution qui satisfait aux conditions suivantes sur la frontière

$$\lim_{y \rightarrow 0} u = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u = 2y \mathfrak{S}_3(0, y) + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Elle sera donnée par

$$u(x, y) = - [2y \mathfrak{S}_3(0, y) + 1] * \frac{\partial \mathfrak{S}_2\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x}.$$

Puisqu'on a pour cette fonction

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = - \mathfrak{S}_3(0, y) - 1,$$

l'on peut déterminer u aussi par les conditions suivantes sur la frontière

$$\lim_{y \rightarrow 0} u = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = - \mathfrak{S}_3(0, y) - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La solution de ce problème s'écrit ainsi:

$$u(x, y) = [\mathfrak{S}_3(0, y) + 1] * \mathfrak{S}_3\left(\frac{x}{2}, y\right),$$

et l'identification des deux expressions pour u donne la relation

$$\mathfrak{S}_3\left(\frac{x}{2}, y\right) * [\mathfrak{S}_3(0, y) + 1] + \frac{\partial \mathfrak{S}_2\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x} * [2y \mathfrak{S}_3(0, y) + 1] = 0.$$

Pour $x \rightarrow 0$ cette relation se transforme en une équation intégrale pour $\mathfrak{S}_3(0, y)$:

$$\mathfrak{S}_3(0, y) * [\mathfrak{S}_3(0, y) + 1] - 2y \mathfrak{S}_3(0, y) - 1 = 0$$

indiquée par F. BERNSTEIN (Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 1920, pp. 735-747). Pour d'autres exemples et pour une autre méthode de gagner de telles relations transcendentes par des transformations fonctionnelles, voir Doetsch [11].

V. — LE CARACTÈRE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS.

1. — WEIERSTRASS [1] a montré en 1885 que la solution dans le demi-plan $y > 0$ de l'équation (1,21) de la chaleur avec les valeurs $\Phi(x)$ sur la frontière $y = 0$, représente sur chaque horizontale une fonction entière analytique en x . Plus explicitement: La solution donnée par la formule classique de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x - \xi, y) \Phi(\xi) d\xi, \quad (5, 1)$$

où χ désigne la fonction (3,331), a cette propriété. A cause de nos expériences sur la multiplicité des solutions nous nous trouvons obligés de nous servir de cet énoncé plus prudent. Weierstrass établit la même propriété pour la solution (1,23), si les températures $A(y)$ et $B(y)$ s'annulent.

Holmgren montra en 1905 ([1] et plus explicitement dans [3]) qu'une solution régulière (voir p. 50) de (1,21) représente sur

chaque horizontale une *fonction analytique* de x ; d'une manière plus précise: soit $u(x, y)$ une solution de (1,21), régulière dans un domaine \mathfrak{D} et supposons le segment $x = x_0$, $a \leq y \leq b$ entièrement intérieur à \mathfrak{D} . Alors, dans un certain rectangle

$$|x - x_0| < d, \quad a \leq y \leq b$$

u est développable en série de puissances

$$u(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}(y)}{\nu!} (x - x_0)^{\nu}.$$

Cette série a donc sur chaque horizontale $y = \text{const.}$ un rayon de convergence égal au moins à d .

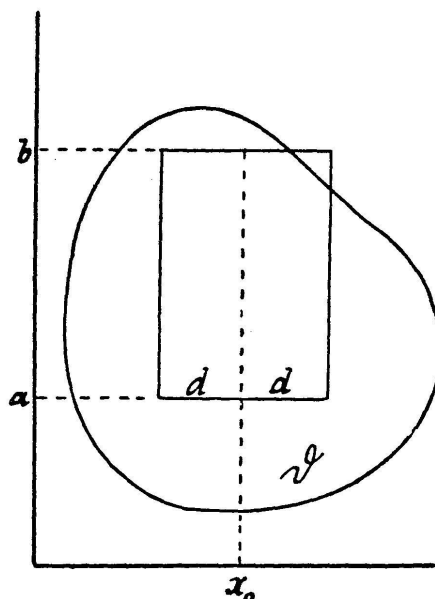


Fig. 4.

2. — Holmgren [1] donna à ce résultat une interprétation inattendue et très importante. Tout d'abord, comme toutes les dérivées par rapport à x existent, il découle de $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que toutes les dérivées par rapport à y existent aussi et satisfont aux relations:

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Puisqu'on a

$$c_{\nu}(y) = \left. \frac{\partial^{\nu} u}{\partial x^{\nu}} \right|_{x=x_0},$$

il en résulte: En posant

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

on trouve

$$c_{2n}(y) = \varphi^{(n)}(y), \quad c_{2n+1}(y) = \varphi_1^{(n)}(y)$$

de façon que la solution a la même forme que pour le problème de Cauchy dans le cas analytique connu :

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(y)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(y)}{(2n+1)!} (x - x_0)^{2n+1} . \quad (5, 21)$$

D'après les inégalités de Cauchy pour les coefficients on a

$$\frac{|c_n|}{n!} \leq \frac{M}{d^n} ,$$

où M est la borne supérieure de u dans le rectangle, et par conséquent

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leq M \frac{(2n)!}{d^{2n}} , \quad |\varphi_1^{(n)}(y)| \leq M \frac{(2n+1)!}{d^{2n+1}} . \quad (5, 22)$$

Cela signifie qu'une solution régulière représente sur chaque segment *vertical* entièrement intérieur au domaine de régularité, une fonction $\varphi(y)$ dérivable un nombre illimité de fois et dont les dérivées admettent les majorantes (5,22), avec les valeurs M et d indépendantes de y . (La même chose a lieu pour $\frac{\partial u}{\partial x}$).

3. — Les remarques suivantes se rattachent immédiatement à ce dernier fait :

1. A côté de l'inégalité (5,22) pour $\varphi^{(n)}(y)$ on envisagera celle pour les dérivées d'une fonction *analytique* $f(y)$:

$$|f^{(n)}(y)| \leq M \frac{n!}{\rho^n} . \quad (5, 31)$$

Mais une fonction pour laquelle (5,22) est valable, n'est pas nécessairement analytique et même pas, comme l'on pourrait croire, *quasi-analytique* dans le sens de Carleman. Car alors ses valeurs sur un petit intervalle devraient définir d'une manière univoque la répartition de ses valeurs partout. Or la solution (3,61) nous montre qu'en général ce n'est pas le cas pour φ . C'est que, si nous remplaçons $A(y)$ pour $y > y_0$ par une autre fonction, u conserve bien sa valeur pour $0 < y \leq y_0$, mais ne la conserve pas pour $y > y_0$.

2. Les deux inégalités (5,22) et (5,31) conduisent à envisager d'une *manière plus générale* (Holmgren [3]) des fonctions $f(z)$, dérivables une infinité de fois dans un intervalle et satisfaisant dans cet intervalle à l'inégalité

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{\Gamma(\alpha n + 1)}{\rho^n},$$

qui est équivalente à

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{(n!)^\alpha}{r^n},$$

avec $\alpha \geq 1$. Gevrey ([1], chap. III, et [2]) appelle ces fonctions *fonctions \mathfrak{S} de la classe α* . A l'exception de la classe $\alpha = 1$, qui donne les fonctions analytiques, elles ne sont pas même quasi-analytiques, comme nous le montre l'exemple

$$f(z) = \int_0^z \Phi(\eta) e^{-\frac{1}{(z-\eta)^\beta}} d\eta \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(Holmgren [3], p. 5).

3. Gevrey [2] a étendu la notion de classe pour des *fonctions à un nombre arbitraire de variables*. Après que E. E. Levi ([3], § 9) eut démontré pour l'équation non homogène de la chaleur que z restait analytique en x au voisinage d'un point où $f(x, y)$ était analytique en x , Gevrey [2] montra pour l'équation linéaire la plus générale et d'autres équations très générales que, en gros, les propriétés de classe de l'équation se transmettaient aussi aux solutions. Ce serait trop long de vouloir reproduire ici ces résultats d'une très grande portée.

VI. — L'EXISTENCE DE LA SOLUTION.

Un théorème d'unicité énonce seulement qu'il y a *au plus* une solution. C'est un théorème d'existence qui doit décider si *en vérité* il y en a une.

Le problème de Cauchy.

Dans le cas *analytique* l'existence de la solution est toujours assurée, mais c'était un des premiers résultats des travaux

célèbres de Holmgren que le problème de Cauchy avec des données *non analytiques* n'a pas nécessairement une solution et qu'une condition nécessaire et suffisante de résolubilité peut être écrite. Le résultat pour l'équation homogène de la chaleur s'énonce ainsi (Holmgren [1]) :

Si les valeurs initiales

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x, y) = \varphi(y), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(y)$$

sont données sur le segment $x = x_0$, $\alpha \leq y \leq b$, φ possédant une dérivée du premier ordre continue, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution régulière est la suivante :

$$\varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^y \frac{\varphi'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta$$

est une fonction \mathfrak{S} de la classe 2.

On peut donner une autre forme très intuitive à cette condition assez surprenante. Le second terme de cette somme n'est autre que la dérivée $D_y^{\frac{1}{2}} \varphi$ de Riemann-Liouville (on dérive φ une fois et on effectue une intégration d'ordre une demie). Tandis que l'équation différentielle elle-même peut s'écrire sous la forme

$$(D_x u + D_y^{\frac{1}{2}} u) (D_x u - D_y^{\frac{1}{2}} u) = 0,$$

la condition de Holmgren s'énonce ainsi :

$D_x u + D_y^{\frac{1}{2}} u$ doit, pour $x = x_0$, être une fonction \mathfrak{S} de la classe 2.

Holmgren ([3], p. 8) a généralisé ce résultat pour le cas où u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ seraient données sur une courbe et non pas sur un segment de droite et Gevrey ([2], chap. IV) l'a étendu à l'équation non homogène (1, 22) et a montré comment on pouvait traiter le problème pour l'équation linéaire la plus générale et des équations plus générales encore.

Le problème aux limites.

1. — Les équations paraboliques occupent une place intermédiaire entre les équations elliptiques et hyperboliques. Comme pour les équations elliptiques il suffit de nous donner sur la frontière seulement les valeurs de la fonction ou seulement celles d'une de ses dérivées ou bien seulement les valeurs de la fonction sur certaines parties de la frontière et seulement celles de la dérivée sur d'autres. Mais la valeur en un point ne dépend, comme pour les équations hyperboliques, que des valeurs sur la frontière située entre les deux caractéristiques correspondantes. Vu que ces dernières sont ici horizontales et coïncident, ce sont seulement les points de la frontière qui se trouvent en dessous ou bien en dessus des caractéristiques qui interviennent. Pour les équations linéaires en $\frac{\partial z}{\partial y}$ c'est le signe de $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui le décide. Si nous envisageons des domaines dans lesquels ce signe est négatif, il s'agit de *frontières courbes* \mathfrak{C} , *ouvertes vers le haut*. D'après E. E. Levi ([3], § 2) on distingue trois types:

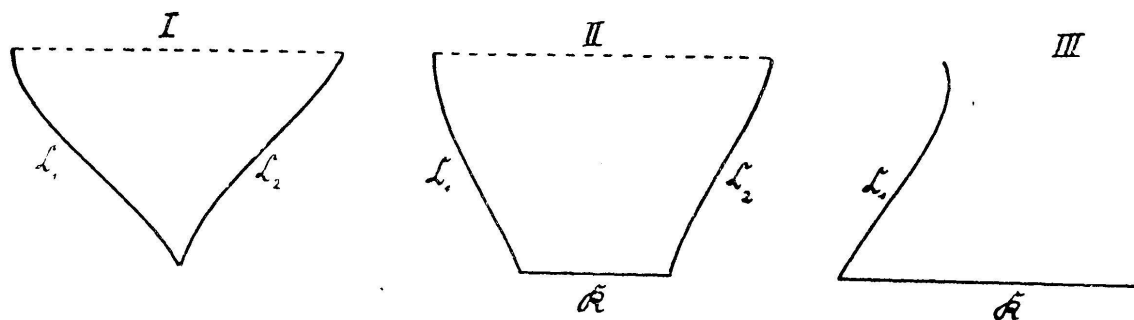


Fig. 5.

Premier type: \mathfrak{C} est composée de deux courbes, représentables sous la forme

$$\mathfrak{C}_1 : x = \gamma_1(y) \quad \mathfrak{C}_2 : x = \gamma_2(y) \quad (a \leq y \leq b),$$

qui se rencontrent en bas:

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a). \quad \text{On a } \gamma_1(y) < \gamma_2(y),$$

sauf pour $y = a$.

Deuxième type: \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 ne se rencontrent pas en bas, mais y sont reliées par un segment \mathfrak{R} de caractéristique.

Troisième type: La courbe \mathfrak{C}_2 est rejetée à l'infini et \mathfrak{C} ne se compose que de \mathfrak{C}_1 et d'un segment infini \mathfrak{R} de caractéristique.

Dans la suite nous supposerons $a = 0$. — Nous ne parlerons pas ici des courbes frontières du troisième type pour lesquelles certaines choses sont particulièrement simples, d'autres non encore expliquées (voir la remarque à la fin de III). Levi insiste sur les domaines du premier type (comme limite de domaines du deuxième type) et il les traite séparément, pour la raison seulement qu'à son avis certaines intégrales dont on se sert pour la démonstration d'existence n'ont pas de sens pour ces domaines. Je crois que cette opinion n'est pas juste et que la distinction est accessoire, au moins dans les cas considérés par Levi où les valeurs sur la frontière \mathfrak{C} sont continues, où par conséquent les valeurs dans les points inférieurs de \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 coïncident.

En ce qui concerne le *caractère des courbes* \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , on peut dire que les fonctions γ_1 et γ_2 (excepté au plus en un nombre fini de points)

sont analytiques chez Holmgren;

satisfont

chez Levi à une condition de Lipschitz d'ordre 1,

chez Gevrey à la même condition d'ordre α :

$$|\gamma(y) - \gamma(y')| \leq H |y - y'|^\alpha \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 .$$

Cette dernière condition s'explique par le fait que, essentiellement, il s'agit toujours de la convergence d'intégrales de la forme

$$\int_0^y \frac{\gamma(y) - \gamma(\eta)}{(y - \eta)^{3/2}} e^{-\frac{[\gamma(y) - \gamma(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} d\eta .$$

Sous l'hypothèse de Gevrey on a pour $0 \leq \eta < y$

$$0 < e^{-\frac{[\gamma(y) - \gamma(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \leq 1, \quad \left| \frac{\gamma(y) - \gamma(\eta)}{(y - \eta)^{3/2}} \right| \leq \frac{H}{(y - \eta)^{3/2 - \alpha}}$$

$$\text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} - \alpha < 1$$

et par conséquent la convergence de l'intégrale.

Dernièrement PETROWSKY [1] a appliqué aux équations paraboliques la méthode de Perron, établie pour les équations elliptiques (ce qui antérieurement a été déjà fait par Sternberg). Il a démontré de cette façon l'existence de la solution de (1,21) pour des courbes encore plus générales et il a aussi montré que cette classe était la « meilleure » dans ce sens que si on la dépassait, on pourrait donner des valeurs continues sur la frontière telles qu'aucune solution ne pourrait exister.

2. — La démonstration d'existence (les valeurs sur la frontière étant continues) que Holmgren a imaginée et les démonstrations de Levi et Gevrey qui s'y rattachent, se sont inspirées de la théorie du potentiel. Le rôle de la solution fondamentale (qui pour un potentiel de volume est égale à $\frac{1}{r}$) est joué dans la propagation de la chaleur par la fonction $\chi(x, y)$ de (3,331). Elle représente la distribution de la température pour $y > 0$, si l'on suppose comme état initial une source de chaleur concentrée en $x = 0$. Au potentiel d'une couche correspondent des intégrales de la forme

$$P_0(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \chi(x - \xi, y) \Phi(\xi) d\xi \quad (\text{prise le long de la caractéristique } \mathfrak{R})$$

et

$$P_1(x, y) = \int_0^y \chi(x - \gamma(\eta), y - \eta) \Phi(\eta) d\eta \quad (\text{prise le long de } \mathfrak{C}_1 \text{ ou } \mathfrak{C}_2).$$

P_0 n'est pas définie sur $\mathfrak{R}(y = 0)$, mais a la valeur limite $\Phi(x)$ si l'on s'approche d'un point intérieur à \mathfrak{R} . P_1 est définie et continue aussi sur la courbe $x = \gamma(y)$. — Dans la théorie du potentiel on envisage à côté de $\frac{1}{r}$ aussi la dérivée de $\frac{1}{r}$, dérivée normale à la couche. A celle-ci correspond ici la fonction $\psi(x, y) = -\frac{\partial \chi}{\partial x}$ de (3, 311). Elle donne lieu à l'intégrale

$$P_2(x, y) = \int_0^y \psi(x - \gamma(\eta), y - \eta) \Phi(\eta) d\eta \quad (\text{prise le long de } \mathfrak{C}_1 \text{ ou } \mathfrak{C}_2),$$

qui correspond au *potentiel de double couche*. Cette intégrale a, comme dans la théorie du potentiel, des valeurs limites si (x, y) tend vers la courbe $x = \gamma(y)$, qui d'ailleurs sont différentes suivant qu'on s'en approche par la droite ou par la gauche:

$$\lim_{y \rightarrow y_0, x \rightarrow \gamma(y_0) \pm 0} P_2(x, y) = \pm \Phi(y_0) + \int_0^{y_0} \psi(\gamma(y_0) - \gamma(\eta), y_0 - \eta) \Phi(\eta) d\eta .$$

Pour $\gamma(y) = \text{const.}$ ceci est un résultat classique, pour le cas général il est donné par E. E. Levi ([2]; [3], p. 211) et Holmgren ([3], p. 6).

Avec cela on gagne le point de départ pour des démonstrations d'existence. Holmgren [2] se donne les valeurs $A(y)$ et $B(y)$ sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , la valeur zéro sur \mathfrak{R} (on peut toujours y arriver par soustraction d'une intégrale de la forme P_0) et prend la solution de l'équation (1, 21) sous forme d'une somme de deux potentiels de chaleur de la forme P_1 , sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 :

$$u(x, y) = \int_0^y \chi(x - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta) d\eta + \int_0^y \chi(x - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta .$$

Il en tire, en vertu de leur continuité sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , les deux conditions:

$$A(y) = \int_0^y \chi(\gamma_1(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta) dy + \int_0^y \chi(\gamma_1(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta ,$$

$$B(y) = \int_0^y \chi(\gamma_2(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta) d\eta + \int_0^y \chi(\gamma_2(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta .$$

C'est un système de deux équations intégrales de Volterra de première espèce pour les densités inconnues Φ_1 et Φ_2 . Holmgren le transforme, suivant le procédé de Volterra, en un système d'équations intégrales de seconde espèce dont la résolubilité est assurée.

E. E. Levi ([2]; [3], § 5) donna plus tard une démonstration d'existence basée sur la même idée, qui suit de plus près encore le procédé indiqué par Neumann pour le potentiel ordinaire. Il pose u comme différence de deux intégrales P_2 , donc comme potentiel de double couche:

$$u(x, y) = \int_0^y \psi(x - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Psi_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \psi(x - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Psi_2(\eta) d\eta$$

et obtient, conformément à ce qui a été dit plus haut sur la valeur limite de P_2 sur les courbes \mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_2 , les conditions:

$$A(y) = \Psi_1(y) + \int_0^y \psi(\gamma_1(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Psi_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \psi(\gamma_1(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Psi_2(\eta) d\eta,$$

$$B(y) = \Psi_2(y) + \int_0^y \psi(\gamma_2(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Psi_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \psi(\gamma_2(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Psi_2(\eta) d\eta.$$

Ces équations intégrales pour Ψ_1 et Ψ_2 sont *a priori* de seconde espèce, de façon que leur résolubilité est évidente.

Holmgren [3] appliqua la même méthode aux cas où sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 est donnée la valeur de u ou de $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou encore une combinaison linéaire de u et $\frac{\partial u}{\partial x}$.

3. — Ces résultats ont à nouveau beaucoup à faire avec la question de l'*unicité*. Il semble d'après cela que pour des valeurs

continues données sur la frontière, la solution pourrait bien être unique. Cette contradiction réfutant la non-unicité s'explique par le fait que cette méthode n'est applicable qu'aux solutions représentables par des potentiels de chaleur. Holmgren et Levi supposaient cela de chaque solution, mais ce n'est pas le cas pour nos solutions singulières! Supposons qu'on ait pour une solution singulière arbitraire $S(x, y)$:

$$S(x, y) = \Psi_1(y) * \psi(x, y) - \Psi_2(y) * \psi(1 - x, y)$$

(dans le cas de la demi-bande de largeur un nous pouvons bien écrire le point de départ de Levi sous cette forme). Si, y étant constant, on fait tendre x une fois vers zéro, puis vers un, alors:

$$0 = \Psi_1(y) - \Psi_2(y) * \psi(1, y),$$

$$0 = \Psi_1(y) * \psi(1, y) - \Psi_2(y),$$

d'où, en employant le théorème d'addition de Cesàro (voir p. 65):

$$\Psi_1(y) = \Psi_1(y) * \psi(2, y), \quad \Psi_2(y) = \Psi_2(y) * \psi(2, y).$$

Cela n'est possible que pour $\Psi_1 \equiv \Psi_2 \equiv 0$. Mais avec ces valeurs on aurait $S \equiv 0$.

4. — VOLTERRA ([1], p. 66) établit, d'après la méthode de Riemann de l'équation adjointe, une *formule de Green* pour la solution de l'équation non homogène (1, 22), qui à côté des valeurs sur la frontière de z contient aussi celles de $\frac{\partial z}{\partial x}$; il montra aussi ([1], p. 67) comment on peut éliminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur une frontière rectiligne en employant le principe des images de Lord Kelvin. E. E. Levi ([2]; [3], § 7) indiqua comment d'après cette méthode de Volterra on pouvait représenter la solution (de l'équation homogène) par ses valeurs sur la frontière, supposée polygonale, et arriver par un passage à la limite à des frontières arbitraires.

Gevrey ([1], n° 4) donna, plus explicitement encore, une *représentation de Green* de la solution de l'équation non homogène (1, 22); il le fait en introduisant une fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$, représentant une certaine solution de l'équation

adjointe et dont il établit l'existence à l'aide de la méthode de Holmgren indiquée plus haut, qui utilise les équations intégrales. Cette représentation est donnée par la formule

$$z(x, y) = - \int_{\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2} \frac{\partial G}{\partial \xi} z(\xi, \eta) d\eta + \int_{\mathfrak{K}} G z(\xi, 0) d\xi - \int_{S_y} \int G f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6, 4)$$

S_y désignant la partie du domaine limité par $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{K} + \mathfrak{C}_2$ se trouvant en dessous de la caractéristique d'ordonnée y . (L'intégrale double représente la solution de l'équation non homogène qui s'annule sur la frontière).

5. — Cette représentation (6, 4) conduisit Gevrey ([1], n° 19-24) à une *démonstration d'existence* pour la solution de l'équation *linéaire générale* (3, 21). Car si l'on remplace (en supposant $b = -1$) la fonction f par $-a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - c(x, y) z + f(x, y)$, alors (6, 4) donne:

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + \int_{S_y} \int G \cdot \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz \right) d\xi d\eta, \quad (6, 51)$$

où ζ représente la solution de (1, 22) avec les mêmes valeurs sur la frontière. Avec cela on établit pour z une équation intégral-différentielle qui est résoluble, si certaines hypothèses sur la frontière, les coefficients et les valeurs aux limites sont satisfaites.

L'équation parabolique *générale* (1, 1) et surtout le type plus particulier

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad (6, 52)$$

peuvent alors être traités par la méthode qu'on emploie aussi pour des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire en les rendant « comparables » à l'équation linéaire en supposant satisfaites des conditions de Lipschitz (Gevrey [1], n° 28-34).

Récemment, une autre méthode a été employée par SIDDIQI [1]

dans le cas de la demi-bande et d'une solution s'annulant aux extrémités $x = 0$ et $x = \pi$. En posant

$$z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \sin nx$$

il réduit l'équation (6, 52) à un système infini d'équations intégrales, qui est résolu par des approximations successives.

VII. — PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

1. — Soit $z(x, y)$ une fonction satisfaisant dans un domaine \mathfrak{G} à une équation parabolique. S'il existe un domaine \mathfrak{G}_1 contigu à \mathfrak{G} le long d'un arc AB, et une fonction $\bar{z}(x, y)$ satisfaisant dans $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_1$ à la même équation et identique à z dans \mathfrak{G} , nous dirons que z est *prolongeable* au travers de AB. C'est ainsi que Holmgren définit cette notion, en supposant d'ailleurs la *régularité* de z et \bar{z} . L'on pourrait aussi définir la possibilité d'un prolongement de la manière suivante: Il doit exister une fonction $z_1(x, y)$ satisfaisant dans \mathfrak{G}_1 à l'équation différentielle qui, ainsi que certaines de ses dérivées, se raccorde d'une façon continue avec z ; l'équation différentielle doit être satisfaite aussi sur AB.

L'exemple suivant montre l'importance de la manière d'envisager le prolongement et le raccord continu le long de AB:

La fonction $z \equiv 0$ satisfait dans \mathfrak{G} : $0 < x < x_0$, $y > 0$, à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et a, ainsi que toutes ses dérivées, la valeur zéro sur la frontière donnée par $x = x_0$.

La fonction $z_1(x, y) \equiv \psi(x - x_0, y + \alpha)$ avec $\alpha \geq 0$ satisfait dans le domaine adjacent

$$\mathfrak{G}_1 : x > x_0, y > 0$$

à la même équation différentielle et possède le long de la droite $x = x_0$ la valeur zéro. Mais que font les dérivées? Si l'on complète z_1 par sa valeur sur la frontière, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ existe le long de $x = x_0$ (du côté droit) et a la valeur $\frac{1}{2\sqrt{\pi}(y + \alpha)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ existe

également et a la valeur zéro. Puisqu'on a aussi $\frac{\partial z_1}{\partial y} = 0$ sur $x = x_0$, il en résulte que

- 1) l'équation différentielle est satisfaite sur $x = x_0$,
- 2) pour le passage de z à z_1 le raccord continu des dérivées intervenant dans l'équation différentielle a lieu.

Par contre la dérivée par rapport à x , qui n'intervient pas dans l'équation différentielle, n'est pas continue. Si sa continuité n'est pas expressément exigée, on peut prolonger z d'une infinité de manières ($\alpha \geq 0$ est arbitraire), prolongements qui ne donnent alors évidemment pas de fonctions régulières et de ce fait analytiques en x .

2. — *L'aspect du problème du prolongement est complètement différent* suivant qu'on exige que le prolongement soit fait vers la droite ou la gauche ou bien vers le bas, c'est -à-dire si l'on veut traverser une des courbes $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ ou bien la caractéristique \mathfrak{R} ; ceci est en rapport avec le fait que, pour l'équation (1, 21) par exemple, un u régulier est bien analytique dans la direction des x , tandis qu'il appartient seulement à la classe 2 dans la direction des y . Si \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont, comme toujours dans la physique, des droites perpendiculaires $x = 0$ et $x = l$, il s'agit une fois d'une extrapolation de l'état de température plus loin que les extrémités du fil (« räumliche Fortsetzung »), la seconde fois de la reconstitution d'un état antérieur à l'état initial observé (« zeitliche Zurückverfolgung »), deux cas d'importance capitale en physique.

Envisageons d'abord le prolongement au travers de \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , par exemple au travers de \mathfrak{C}_1 . Pour cela Holmgren [3, 4] obtint le beau résultat suivant:

Si \mathfrak{C}_1 est représentable par une fonction analytique $x = \gamma_1(y)$, $a \leq y \leq b$, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution $u(x, y)$ régulière dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ (voir page 51) de l'équation (1, 21) puisse être prolongée au travers de \mathfrak{C}_1 vers la gauche, s'énonce ainsi: Les valeurs que u prend sur chaque arc plus petit: $a < \alpha \leq y \leq \beta < b$, définissent une fonction $f(y)$ qui possède

dans $\alpha \leq y \leq \beta$ toutes les dérivées et représente une fonction \mathfrak{S} de la classe 2.

La démonstration se base essentiellement sur le théorème d'unicité du problème de Cauchy. Il est donc nécessaire de prendre les hypothèses assez étroites pour que l'unicité soit effectivement assurée.

L'unicité du prolongement lui-même résulte de l'analyticité de u dans la direction des x .

Gevrey ([1], nos 57, 58) a étendu cela à l'équation linéaire générale.

Pour le *cas physique* où le domaine primitif est formé par une demi-bande $0 < x < l, y > 0$ l'on peut donner au problème du prolongement un *autre aspect* (Doetsch [1], p. 48). Exigeons de nos solutions au moins que l'unicité soit hors de doute et que la solution du problème aux limites soit représentée par la formule classique (1, 23). Pour simplifier nous supposons que les valeurs s'annulent sur les frontières $x = l$ et $y = 0$; nous pouvons toujours arriver à cela par soustraction des termes relatifs à ces frontières de la formule (1, 23), termes qui, d'ailleurs, sont prolongeables au travers de la frontière $x = 0$. Si l'on peut maintenant prolonger u vers la gauche jusqu'à une droite $x = -\alpha$ incl. et cela de façon à ce que les valeurs initiales restent nulles sur le prolongement de la frontière inférieure, alors on peut considérer la droite $x = -\alpha$ comme frontière à gauche. Alors la température pour $x \geq 0$ ou bien, puisque ça suffit, pour $x = 0$ doit être représentable au moyen de la température sur la nouvelle frontière. Si l'on change la notation des abscisses cela peut s'exprimer ainsi: La formule classique

$$u(x_0, y) = A(y) * G(x_0, y)$$

est, si les valeurs zéro sont données à droite et en bas, solution du problème qui consiste à évaluer, à partir de la température sur la frontière $x = 0$ à gauche, la température en chaque point x_0 placé plus à droite. Posons maintenant le problème inverse: Quelle température $A(y)$ doit être placée à la frontière $x = 0$, pour qu'on trouve en x_0 précisément la température $u(x_0, y)$? Cela revient évidemment à la résolution d'une équation intégrale

de première espèce de Volterra, mais qui ne se laisse pas transformer de la façon habituelle par dérivation en une équation de seconde espèce, puisque toutes les dérivées de $G(x_0, y)$ s'annulent pour $y = 0$. On peut cependant ramener cette équation intégrale à une autre de noyau $\psi(x_0, y)$ plus simple (Doetsch [5]), qui correspond d'ailleurs au cas du fil indéfini, et énoncer pour cette dernière ce qui suit (Doetsch [6]):

Pour qu'elle possède une solution il est nécessaire que toutes les dérivées par rapport à y de $u(x_0, y)$ existent pour $y \geq 0$ et s'annulent, comme d'ailleurs $u(x_0, y)$ elle-même, pour $y = 0$. Si la série suivante, procédant suivant des quotients différentiels d'ordre fractionnaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} u(x_0, y)$$

converge pour $y \geq 0$ et est intégrable terme à terme dans chaque intervalle fini, alors elle représente la solution $A(y)$ de l'équation intégrale.

Tandis que Holmgren ne démontre que l'existence du prolongement, lequel peut rester indéterminé jusqu'où ce prolongement peut être effectué, nous donnons ici une expression explicite pour la solution, à condition que l'étendue du prolongement soit déterminé *a priori*. Mais c'est précisément cela qui est donné pour des problèmes physiques: si par exemple l'extrémité $x = 0$ est « inaccessible » et que l'on veuille déterminer sa température à partir de celle qui a été constatée en un point « accessible » x_0 .

3. — Envisageons maintenant le *prolongement au travers de \mathbb{R}* ! Supposons ici tout de suite que \mathbb{C}_1 et \mathbb{C}_2 sont deux droites verticales g_1 et g_2 . Pour ce cas Gevrey ([1], n° 59) déjà a remarqué que le prolongement n'est pas univoque si l'on ne connaît pas les valeurs de u sur les prolongements vers le bas de g_1 et g_2 . Pour la possibilité d'un prolongement il trouve comme condition nécessaire et suffisante ([1], n° 60) que les valeurs de u sur \mathbb{R} , \mathbb{R} étant située dans un plan complexe des x , doivent définir une fonction analytique dans le carré construit sur \mathbb{R} comme

diagonale. Nous pouvons cependant donner un résultat plus complet, qui en plus n'exige pas l'introduction du domaine complexe (Doetsch [4]). Supposons tout de suite que u s'annule sur les droites g_1 et g_2 , à quoi on peut toujours arriver par une soustraction de solutions appropriées. Si l'unicité de u et la possibilité de lui appliquer la formule (1, 23) sont assurées et si u peut être reconstituée dans le temps jusqu'au temps négatif $-y_0$, alors l'ancienne température initiale $\Phi(x)$ pour $y = 0$ doit se laisser déduire de la température $u(x, -y_0)$ au moment $-y_0$, par la formule

$$\Phi(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi, y_0) u(\xi, -y_0) d\xi.$$

Si $\Phi(x)$ est donnée, c'est une équation intégrale de Fredholm de première espèce pour $u(x, -y_0)$ et nous en tirons le résultat suivant:

La température ne peut être reconstituée dans un passé antérieur à l'état initial $\Phi(x)$ que si $\Phi(x)$ est une fonction analytique, entière et périodique de période $2l$ avec $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ et $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$. Si on la développe en série de Fourier (convergente absolument et uniformément) de la forme

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \pi \frac{x}{l},$$

alors la température peut être reconstituée sans singularités pour des $y = -y_0$ négatifs aussi loin que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(e^{\nu^2 \pi^2 \frac{y_0}{l^2}} a_{\nu} \right)^2 \tag{7, 31}$$

reste convergente. Si Y est la coupure entre les y_0 de la convergence et de la divergence alors on obtient l'état de température pour $0 < y_0 < Y$ par la série de Fourier convergente absolument et uniformément en x :

$$u(x, -y_0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} e^{\nu^2 \pi^2 \frac{y_0}{l^2}} \sin \nu \pi \frac{x}{l}. \tag{7, 32}$$

Si Y est une valeur pour laquelle la série (7, 31) converge encore, alors la série (7, 32) représente pour $y_0 = Y$ la valeur $u(x, -Y)$ au moins dans le sens de la convergence en moyenne.

4. — La reconstitution dans le passé de la température dans un *fil infiniment long des deux côtés* est d'intérêt particulier et cela à cause de ses applications pratiques multiples. APPELL [1] s'en est occupé en 1892, mais sans aller très loin. Si l'on ne considère que des fonctions pour lesquelles on peut employer la formule de solution de Poisson (5, 1), alors le problème est équivalent à la résolution de l'équation intégrale singulière

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_0}} u(\xi, -y_0) d\xi. \quad (7, 4)$$

Ce problème revient évidemment à une *décomposition spectrale*

de la fonction $\Phi(x)$ en *courbes de Gauss* $\frac{1}{2\sqrt{\pi y_0}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_0}}$ (maximum toujours en ξ , mesure de précision $\frac{1}{y_0}$), et cela explique

que le même problème se pose souvent dans le calcul des probabilités, en statistique, en physique, etc. Moi-même, j'étais amené à cette question par un problème de l'analyse spectrale (Doetsch [7]) et j'ai obtenu la solution, à partir de la solution pour un intervalle fini, par un passage à la limite peut-être assez audacieux. On obtient le même résultat si l'on remarque que l'équation intégrale (7, 4) est du « type de composition » (Faltungstypus) et admet par conséquent la transformation de Laplace ou celle de Fourier (voir DOETSCH [13]). Plus tard, P. LÉVY [1] s'est occupé de ce problème surtout du point de vue de la théorie des probabilités et sans tenir compte, semble-t-il, des recherches mentionnées plus haut; ses résultats ne sont, d'ailleurs, pas encore définitifs.

On pourrait encore dire beaucoup de choses sur les solutions dans un intervalle infini d'un ou de deux côtés et montrer quelques problèmes importants qui ne sont pas encore résolus. Je dois ici m'en abstenir et réserver ce sujet pour une autre occasion.

BIBLIOGRAPHIE

P. APPELL.

1. Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. — *Journ. de Math.* (4), 8 (1892), S. 187-216.

G. DOETSCH.

1. Ueber das Problem der Wärmeleitung. — *Jahresber. d. deutsch. Math.-Vrg.*, 33 (1925), S. 45-52.
2. Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung: Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. — *Math. Zeitschr.*, 22 (1925), S. 285-292.
3. Idem. II. Mitteilung: Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit. — *Math. Zeitschr.*, 22 (1925), S. 293-306.
4. Idem. III. Mitteilung: Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes. — *Math. Zeitschr.*, 25 (1926), S. 608-626.
5. Idem. IV. Mitteilung: Die räumliche Fortsetzung des Temperaturablaufs. Bolometerproblem. (I. et IV. Mitt. en commun avec F. Bernstein). — *Math. Zeitschr.*, 26 (1927), S. 89-98.
6. Idem. V. Mitteilung: Explizite Lösung des Bolometerproblems. — *Math. Zeitschr.*, 28 (1928), S. 567-578.
7. Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. — *Zeitschr. f. Physik*, 49 (1928), S. 705-730.
8. Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluss einer Randerregung. — *Festschrift d. Techn. Hochsch. Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts*. Verlag Springer, 1929, S. 56-78.
9. Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion. — *Annali d. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa* (2), 2 (1933), S. 325-342.
10. Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül). — *Jahresber. d. deutsch. Math.-Vrg.*, 43 (1934), S. 238-251.
11. Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. — *Math. Zeitschr.*, 40 (1935), S. 613-628.
12. Integration von Differentialgleichungen vermittelt der endlichen Fourier-Transformation. — *Math. Annalen*, 112 (1935), S. 52-68.
13. Zerlegung einer Funktion in Gausssche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. — *Math. Zeitschr.*, 41 (1936).

M. GEVREY.

1. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. — *Journ. de Math.* (6), 9 (1913), S. 305-471 et 10 (1914), S. 105-148.

2. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. — *Annales de l'Ec. Norm. Sup.* (3), 35 (1918), S. 129-190.

J. HADAMARD.

1. Principe de Huyghens et prolongement analytique. — *Bull. d. l. Soc. Math. de France*, 52 (1924), S. 241-278.

E. HOLMGREN.

1. Om Cauchys problem vid de lineära partiella differentialekvationerna af 2: dra ordningen. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 2 (1905-06), Nr. 24.
2. Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 3 (1906-07), Nr. 12.
3. Sur l'équation de la propagation de la chaleur. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 4 (1908), Nr. 14.
4. Idem. Deuxième note. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 4 (1908), Nr. 18.

E. E. LEVI.

1. Sul problema di Cauchy. — *Rend. d. R. Acc. d. Lincei* (5), 16 (1907), S. 105-112.
2. Sul equazione del calore. — *Rend. d. R. Acc. d. Lincei* (5), 16 (1907), S. 450-456.
3. Sul equazione del calore. — *Annali di Mat.* (3), 14 (1908), S. 187-264.

P. LÉVY.

1. Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène. — *Annali d. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa* (2), 1 (1932), S. 283-296.

I. PETROWSKY.

1. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung. — *Compositio Mathematica*, 1 (1935), S. 383-419.

M. PICONE.

1. Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine. — *Annali di Mat.* (4), 7 (1929-30), S. 145-192.

H. POINCARÉ.

1. *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Paris, 1895.

M. R. SIDDIQI.

1. Zur Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus. — *Math. Zeitschr.*, 35 (1932), S. 464-484.

V. VOLTERRA.

1. *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*. Paris, 1912.

K. WEIERSTRASS.

1. Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. — *Sitzungsber. d. Berliner Akademie*, 9 et 30 juillet 1885; *Math. Werke*, 3. Bd., S. 1-37.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL ¹

PAR

M. Florin VASILESCO (Paris).

I. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET CLASSIQUE.

Le problème de Dirichlet concerne les solutions de l'équation de Laplace. Ce n'est que par extension que l'on a désigné par ce nom un problème analogue pour les solutions d'autres équations du type elliptique. De cette extension nous dirons quelques mots à la fin de cette conférence.²

Comme on le sait, on désigne par le nom de fonction harmonique, toute solution de l'équation de Laplace. Pour fixer les idées, nous emploierons ici le langage de l'espace à trois dimensions. On verra, d'ailleurs, que les récents progrès réalisés dans l'étude de ce problème sont dus à des notions d'origine physique, et c'est là une autre raison d'employer ce langage. Le cas de l'espace à deux dimensions est, en général, plus simple et entraîne des modifications faciles à faire.

Conformément au sous-titre de ce colloque, ainsi qu'au sujet de cette conférence, on doit se demander quelles sont les conditions propres à déterminer les solutions de l'équation de Laplace. Ces conditions ont été exprimées, à l'origine, par l'énoncé suivant du *Principe de Dirichlet*. *Si D est un domaine, S sa frontière et $f(p)$ une fonction continue sur S, il existe une fonction*

¹ Conférence faite le 17 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

² Cette extension se trouve dans la conférence de M. SCHAUDER.

harmonique $V(P)$, dans D , prenant sur S les valeurs données $f(p)$. Autrement dit, V est continue en tout point de S , sur $D + S$, si on lui attribue sur S les valeurs $f(p)$.

Le problème de Dirichlet consiste à rechercher cette fonction V .

On a cru pendant longtemps que ce problème était toujours possible, ce qui veut dire, qu'il admettait toujours une solution, ainsi que l'affirmait le principe de Dirichlet. On ne parvenait pas à la résoudre dans le cas d'un domaine quelconque, mais on attribuait cela à l'extrême variété que présentait la notion de domaine. C'est pourquoi on avait été amené, connaissant sa solution dans des cas simples, tel celui de la sphère, à chercher des méthodes de résolution pour des cas de plus en plus étendus.

Les domaines que l'on avait considérés pendant longtemps étaient limités par des surfaces, et c'est, sans doute, à cause de cela qu'un cas simple d'impossibilité, tel que celui qu'a signalé M. ZAREMBA ¹, n'avait pas été aperçu, ou, s'il l'avait été, n'avait pas été de nature à ébranler la solidité du principe de Dirichlet.

Voici ce cas. Supposons le domaine D sphérique. V prend au centre O une valeur déterminée. Envisageons le domaine D' , déduit du précédent, en considérant le point O comme point frontière, et attribuons à $f(p)$, en ce point, une valeur différente de celle qu'y avait la fonction V précédente. Il est facile de voir que la fonction V , dans le cas actuel, est encore celle du cas précédent. Elle n'est donc plus continue au point frontière O . Le problème est impossible.

Quelques années plus tard ², M. LEBESGUE a fait connaître un exemple d'un domaine, *limité par une surface*, pour lequel le problème de Dirichlet n'est pas possible. A cet effet, il considère le potentiel d'une masse distribuée sur un segment de longueur unité, dont la densité, en tout point, est égale à la distance de ce point à une des extrémités du segment, prise comme origine. La surface équipotentielle sur laquelle le potentiel est égal à 2, par exemple, entoure le segment et présente une pointe en origine. Le domaine infini extérieur à cette surface, que l'on peut rendre

¹ *Bulletin intern. de l'Ac. des Sc. de Cracovie*, 1909, p. 199.

² *Comptes rendus séances de la Soc. Math. France*, t. 41, 27 nov. 1912, p. 17.

fini, si l'on veut, en le limitant par une sphère, est tel que le problème de Dirichlet n'y est pas possible pour les valeurs 2 sur la surface équipotentielle et les autres valeurs du potentiel sur la sphère. La seule fonction possible V est le potentiel lui-même, et il ne prend pas la valeur 2 en origine.

Ces deux exemples expriment des circonstances qui ne sont que des cas particuliers de phénomènes généraux, que l'on verra par la suite.

Ainsi, *le problème de Dirichlet n'est pas toujours possible*, et cette impossibilité consiste en ce que: il n'existe pas de fonction V prenant les valeurs données *en tous les points de la frontière*.

Il sera utile, pour la suite, de rappeler brièvement, quelques-unes des méthodes de résolution du problème de Dirichlet.

*Méthode du balayage de Poincaré*¹. — Grâce à la formule bien connue

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_S \int f(p) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_i} dS ,$$

POINCARÉ ramène la recherche de la solution de ce problème à celle de la fonction de Green du domaine, $G(P, Q)$, et, celle-ci, au moyen d'une inversion du pôle comme centre, à celle de la fonction harmonique V à l'extérieur d'une surface C , régulière à l'infini et prenant les valeurs unité sur C : c'est le potentiel de la distribution d'équilibre sur le conducteur C . Cette notion de *potentiel conducteur* sera généralisée plus tard et jouera un rôle fondamental.

Pour trouver cette fonction V , Poincaré considère, d'une part, une sphère contenant à l'intérieur C , et sur elle une distribution uniforme de masse dont le potentiel est égal à l'unité à l'intérieur et, d'autre part, une suite de sphères extérieures à C , mais telles que tout point extérieur à C soit intérieur à l'une d'elles, au moins. Il range ces sphères en une suite, de façon que chacune d'elles y figure une infinité de fois, et procède au balayage de la masse qui se trouve dans chacune d'elles, successivement. Cette opération se traduit par ce que le potentiel de la masse totale,

¹ Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (*Amer. Jour. of Math.*, t. 12, 1890).

modifiée, diminue, à chaque stade de l'opération, et devient harmonique dans la sphère de la suite qu'il concerne, puisqu'on remplace la masse intérieure à cette sphère par une masse distribuée sur sa frontière. En vertu du théorème de Harnack, la suite de fonctions ainsi trouvées a une limite V qui est harmonique.

En assujettissant la surface C à satisfaire à certaines conditions — que M. Lebesgue a désignées, depuis, par le nom de conditions de régularité ¹ — Poincaré montre que cette fonction prend bien la valeur unité sur C , ce qui assure, de plus, son unicité.

Il est bon de remarquer qu'il y a, dans la méthode précédente, deux parties: la définition d'une fonction V et l'étude de sa continuité à la frontière. De plus, la démonstration de l'unicité est subordonnée aux conditions de régularité.

Méthodes relevant du principe du minimum. — Il y a tout un groupe de telles méthodes ². Leur but était de redresser les erreurs contenues dans le raisonnement bien connu de Riemann, erreurs qui ont été mises en évidence par Weierstrass et M. Hadamard ³.

Il suffira de rappeler ici deux de ces méthodes: celles de M. Zaremba ⁴ et celle de M. Lebesgue ⁵.

Voici la méthode de M. Zaremba. Désignons par Ω un domaine général qui est simplement un *ensemble ouvert* d'un seul tenant, et soit Σ sa frontière. Considérons l'ensemble F des fonctions continues dans $\Omega + \Sigma$ et prenant sur Σ les valeurs données f , fonctions admettant des dérivées premières continues dans Ω . Supposons que l'intégrale

$$A = \int \int \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega$$

existe pour elles, car, d'après l'objection de M. Hadamard, elle pourrait bien n'exister pour aucune de ces fonctions. Soit I le minimum de ces intégrales.

¹ C. R. de l'Ac. des Sc., t. 178, 21 janv. 1924, p. 349.

² Voir pour la bibliographie le fascicule de M. Bouligand: Fonctions harmoniques, etc., du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

³ WEIERSTRASS, *Werke*, Bd. 2, p. 49; HADAMARD, *Bul. Soc. math. Fr.*, t. 34, 1906, p. 135.

⁴ Loc. cit.

⁵ C. R. Ac. Sc., t. 154, 1912, p. 335; t. 155, 1912, p. 699; *Rendiconti Circ. mat. di Palermo*, t. 24, 1907, p. 371.

On appelle *minimisante*, une suite de fonctions φ_i de F dont les intégrales tendent vers I .

Assignons à tout point M de Ω un nombre positif ρ_M inférieur à la distance de M à Σ et soit

$$F_i(M) = \frac{3}{4\pi\rho_M^3} \int \int \int_{(\rho_M)} \varphi_i dx dy dz$$

(ρ_M) étant la sphère de rayon ρ_M et de centre M . M. Zaremba démontre que

La suite $F_i(M)$ tend uniformément — sur tout ensemble fermé E de points M , pour lesquels ρ_M admet une limite inférieure plus grande que zéro — vers une fonction harmonique V , dans Ω , dont l'intégrale est égale à I .

V est indépendante du choix des ρ_M .

S'il existe une fonction u de E dont l'intégrale soit encore égale à I , on aura $u = V$.

V est, à une constante additive près, la solution du problème suivant:

On cherche une fonction harmonique U dans Ω , pour laquelle l'intégrale existe et est telle que

$$\int \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) d\Omega = \int \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \dots \right) \cdot d\Omega$$

pour toute fonction harmonique h dans Ω , et toute fonction u de E , les intégrales A existant pour h et u .

Si un point p de Σ peut être pris pour sommet d'un cône de révolution de hauteur non nulle, extérieur à Ω , V tend vers f en ce point.

On distingue également ici, comme dans la méthode du balayage, les deux parties: le procédé de définition de V et la recherche de sa continuité à la frontière. Mais l'unicité de V n'est plus subordonnée à la condition de régularité constituée par l'existence du cône.

Voici maintenant la méthode de M. Lebesgue. On considère, comme précédemment, une suite minimisante φ_i , mais on borne, en valeur absolue, toutes ces fonctions, par un même nombre,

car les fonctions φ_i peuvent ne pas avoir de dérivées premières sur des surfaces analytiques telles que tout domaine intérieur à Ω n'en contienne qu'un nombre fini. Soit s une sphère intérieure à Ω . On peut extraire de la suite donnée une autre suite convergent uniformément vers une fonction harmonique dans s . En prenant des sphères successives, empiétant chacune sur la précédente, et en tenant compte d'un théorème d'unicité¹ de M. Lebesgue — qui montre que si deux suites minimisantes tendent vers des limites dans un domaine intérieur à Ω , ces limites coïncident — on voit aisément que l'on définit ainsi une fonction harmonique V dans Ω .

Pour rechercher sa continuité à la frontière, M. Lebesgue introduit la notion de fonction barrière², qui s'est montrée, depuis, d'un puissant intérêt dans l'étude des fonctions harmoniques³. Cette notion permet à l'auteur de formuler un critère de régularité plus général que celui de M. Zaremba.

On peut faire ici la même remarque au sujet des deux parties que comporte la méthode.

On doit également à M. Lebesgue une autre méthode⁴, par médiations itérées, que nous regrettons de ne pouvoir exposer ici.

D'autres méthodes sont dues à MM. GLEASON, RAYNOR⁵, PHILLIPS et WIENER⁶, etc.

Dans toutes ces méthodes on peut distinguer les deux parties précédemment mentionnées.

Enfin, il y a des méthodes relevant des équations intégrales, telles la méthode de ROBIN, de NEUMANN, de FREDHOLM, etc. Ces méthodes ne sauraient nous intéresser pour notre but actuel, car elles sont fondées sur la continuité de la solution du problème de Dirichlet à la frontière.

C'est M. Lebesgue qui a formulé⁷ la distinction, qu'il y a lieu de faire, entre les deux parties, dans les méthodes de résolution du problème de Dirichlet. Ce fait, joint à l'exemple d'impossi-

¹ *Rendiconti* (loc. cit.).

² *C. R.*, t. 155 (loc. cit.).

³ KELLOGG, *Bul. of the Amer. Math. Soc.*, nov.-déc. 1926.

⁴ *C. R.*, t. 154 (loc. cit.).

⁵ *Annual's of Math.*, vol. 23, p. 183.

⁶ *Journ. math. phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2^{me} série, n° 55, mars 1923.

⁷ *C. R.*, t. 178 (loc. cit.).

bilité de ce problème qu'il a donné, a conduit l'éminent auteur aux notions fondamentales de *point régulier* et *point irrégulier* de la frontière d'un domaine.

Un point frontière sera dit *régulier* si la fonction V est continue et prend la valeur f en ce point, quelle que soit la fonction f . Contrairement, le point sera dit *irrégulier*.

M. Lebesgue montre de plus que le caractère régulier et irrégulier d'un point frontière est local et ne dépend que de son voisinage immédiat de la frontière.

Les diverses conditions de régularité que l'on avait données dépendent des procédés employés pour définir la fonction V . Ce fait ne présenta aucun inconvénient tant qu'il s'était agi, comme cela a été le cas, de rechercher des domaines de plus en plus généraux pour lesquels on pût résoudre le problème de Dirichlet. En effet, on obtenait de tels domaines en assujettissant leurs frontières à satisfaire à un même critère de régularité, obtenu au moyen d'un procédé déterminé.

Toutefois, on ne saurait employer, pour vérifier le caractère régulier des points frontière d'un domaine, des conditions de régularité différentes, si ces conditions correspondent à des procédés *ne conduisant pas tous* à la même fonction V .

Ce fait gênant conduit à se demander si les fonctions V auxquelles donnent naissance les divers procédés que l'on a donnés, sont, ou ne sont pas, différentes. A cette importante question, nous répondrons (chap. IV) par la négative: ces procédés conduisent tous à une même fonction V . Dès lors, on pourra employer indistinctement les critères de régularité connus, pour juger de la régularité d'un point frontière.

Ces critères sont des conditions de régularité *suffisantes*, sauf un, dû à M. Lebesgue¹, qui est nécessaire et suffisant. Il a un caractère fonctionnel.

On peut conclure ce chapitre de la manière suivante. Quelques-uns des procédés que l'on avait donnés pour résoudre le problème de Dirichlet définissent bien une fonction harmonique V , attachée à des valeurs frontières données f , et cela dans le cas d'un domaine général — défini simplement comme un ensemble ouvert. Mais,

¹ C. R., t. 178, loc. cit.

soit que leurs auteurs eussent pour objectif simplement la résolution du problème de Dirichlet classique, soit que les critères de régularité ou d'irrégularité que l'on donnait ne permissent pas de connaître le comportement de la fonction V en tous les points de la frontière, à cause de leur caractère suffisant, une telle fonction V n'a jamais été désignée pour être solution d'un problème de Dirichlet plus étendu que le problème classique, devant remplacer celui-ci dans les cas où il est impossible.

II. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉ.

C'est M. N. WIENER¹ qui, en 1934, donna un procédé de définition d'une fonction V , indépendamment de l'idée de résoudre le problème de Dirichlet classique. De plus, il caractérisa, au moyen d'un critère nécessaire et suffisant de nature quasi-géométrique², les points réguliers et irréguliers de la frontière, pour ce procédé. Il envisagea ainsi un problème plus étendu que le problème de Dirichlet classique qu'il désigna par le nom de Problème de Dirichlet généralisé. Son procédé constitue une extension naturelle du problème classique et cela permet de voir que, lorsque celui-ci est possible, sa solution coïncide avec la fonction V donnée par ce procédé.

Il est, dès lors, naturel que l'on désigne un domaine pour lequel le problème classique est possible, par un nom particulier: convenons, selon un usage déjà répandu, de l'appeler *domaine normal*. Par exemple, un domaine formé par un assemblage de cubes, est un tel domaine: on le voit en utilisant, si l'on veut, le critère de M. Zaremba.

Voici le procédé de M. Wiener.

Soient Ω un domaine, borné ou non — ensemble ouvert — Σ sa frontière, supposée bornée, et $f(p)$ une distribution continue sur elle. Considérons d'une part, une fonction continue dans tout l'espace, F , coïncidant avec f sur Σ ³ et, d'autre part, une suite Ω_r de domaines normaux intérieurs à Ω et tendant vers lui.

¹ *J. Math. Phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2^{me} série, n° 70, janv. 1924.

² *Ibid.*, n° 1, janv. 1925.

³ C'est M. LEBESGUE qui a montré la possibilité de construire une telle fonction dans son mémoire cité du Circolo matematico.

Si V_k est la solution du problème de Dirichlet dans Ω_k pour les valeurs de F sur sa frontière Σ_k , la suite des fonctions V_k tend uniformément vers une fonction harmonique V , dans toute région fermée de Ω . Cette fonction est indépendante du choix des Ω_k et de la fonction F . C'est la solution du problème de Dirichlet généralisé.

M. Wiener applique tout de suite ce procédé au cas d'un ensemble fermé borné E , en considérant le domaine infini qu'il détermine dans l'espace et dont E , ou une partie de E est la frontière. Pour ce domaine, il prend f égale à l'unité. La fonction V ainsi obtenue est appelée, par lui, *potentiel conducteur de l'ensemble* E . C'est la généralisation de la notion classique pour un conducteur. De plus, si $v(P)$ est cette fonction, l'intégrale de Gauss

$$c = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{dv}{dn_i} dS$$

étendue à une surface contenant E à l'intérieur permet à M. Wiener de définir la notion de *capacité de l'ensemble* E , comme dans le cas classique.

Les deux notions précédentes, de potentiel conducteur et de capacité d'un ensemble, se sont révélées fondamentales pour la théorie des fonctions harmoniques. On le verra par la suite.

C'est ainsi que, grâce à elles, M. Wiener a pu donner le critère suivant de régularité d'un point frontière.

Soient p un point frontière de Ω , λ un nombre positif inférieur à l'unité, γ_n la capacité de l'ensemble de points non appartenant à Ω et tels que leur distance à p soit comprise entre λ^n et λ^{n-1} .

Alors, p est régulier ou irrégulier selon que la série

$$\frac{\gamma_1}{\lambda} + \frac{\gamma_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{\lambda^n} + \dots$$

*est divergente ou convergente*¹.

¹ Dans le cas de l'espace à deux dimensions cette série est remplacée par la suivante: $\gamma_1 + 2\gamma_2 + \dots + 2^m\gamma_m + \dots$; γ_m étant la capacité de l'ensemble des points non appartenant à Ω , dont la distance à p est comprise entre λ^{2m} et λ^{2m+1} .

Les points de la frontière sont ainsi caractérisés d'une manière précise, et le caractère local est évident.

Mais cette précision même impose, dès lors, la recherche suivante: *Etudier la distribution des points réguliers et irréguliers à la frontière d'un domaine.*

On a réussi à faire cette étude complètement, dans ces temps derniers. Comme les recherches que l'on a faites sur le problème de Dirichlet généralisé ont, plus ou moins directement, concouru vers ce but, nous allons en donner un aperçu rapide qui aboutira au résultat général et définitif obtenu dans cette étude.

Fonction de Green (généralisée). Si l'on considère un point fixe Q dans Ω et la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs $\frac{1}{r} = \frac{1}{pQ}$ sur la frontière, soit $\Gamma(P, Q)$, la fonction

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \Gamma(P, Q)$$

sera la fonction de Green du domaine Ω . De même que dans le cas classique, cette fonction est positive et a un pôle en Q ; mais elle ne s'annule plus nécessairement à la frontière du domaine.

On démontre ¹ que: si la fonction de Green tend vers zéro sur une suite de points de Ω tendant vers p , la fonction V tend vers $f(p)$.

On conclut de là ce fait important que

Un point p de la frontière est régulier ou irrégulier selon que la fonction de Green tend vers zéro ou non.

Ainsi, l'étude qui nous intéresse se ramène à celle de la fonction de Green du domaine. On a remarqué ² que l'on peut, avec avantage ramener encore l'étude de cette fonction à celle du potentiel conducteur. Le passage à cette dernière fonction s'opère aisément au moyen de l'énoncé suivant:

Si e est un ensemble fermé borné dont aucun point n'appartient à Ω et $v(P)$ son potentiel conducteur, on a l'inégalité

$$\frac{1}{r} \left[\frac{1 - v(P)}{1 - M} \right] \geq G(P, Q)$$

¹ BOULIGAND, *Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1925.

KELLOGG, *Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. 12, VI, 1926, p. 402.

² F. VASILESCO, *Journal de math.*, t. IX, 1930.

en désignant par r le rayon d'une sphère σ de centre Q , tout entière dans Ω et par M le maximum de ν sur elle.

On pourra utiliser cette inégalité de la manière suivante. Un point régulier p de Σ restera régulier pour le domaine infini extérieur à la portion Σ_r déterminée sur l'ensemble des points n'appartenant pas à Ω par une sphère (r) de centre p et de rayon r . Si la fonction de Green de ce domaine tend vers zéro en ce point, le potentiel de Σ_r tend vers 1, et réciproquement. C'est de l'étude à la frontière du potentiel que l'on obtiendra facilement des résultats sur les points frontière d'un domaine.

*Ensembles impropres. Ensemble réduit. Frontière réduite*¹. On appelle impropre, un ensemble borné ou non, dont chaque partie fermée est de capacité nulle.

Un ensemble est de capacité nulle en un point, lorsqu'il existe une sphère centrée en ce point telle que la partie de l'ensemble qu'elle contient soit de capacité nulle.

On démontre, à l'aide du lemme de MM. Borel-Lebesgue que

Un ensemble fermé borné qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle est aussi de capacité nulle.

On voit que tout ensemble de capacité nulle en un point est impropre. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Si E est un ensemble fermé borné ou non, et \mathcal{E} l'ensemble de ceux de ses points en lesquels il est de capacité nulle, \mathcal{E} est impropre. On appellera \mathcal{E} la partie impropre de E . Si $E - \mathcal{E}$ existe, il est fermé et n'est de capacité nulle en aucun de ses points. Il n'a donc plus de partie impropre.

Un ensemble sans partie impropre sera dit réduit. Tout ensemble pourra être réduit.

En particulier, si \mathcal{E} est la partie impropre de la frontière Σ d'un domaine, $\Sigma - \mathcal{E}$ est fermé, et l'on démontre qu'aucun point de \mathcal{E} n'est limite de points extérieurs à Ω . Donc $\Omega' = \Omega + \mathcal{E}$ est encore un domaine de frontière réduite $\Sigma - \mathcal{E}$. On appellera frontière extérieure de Ω l'ensemble de points Σ'_e de Σ qui sont limites de points extérieurs à Ω . Les autres points de Σ forment

¹ F. VASILESCO (loc. cit.).

la frontière intérieure Σ'_i . On voit que $\Omega'' = \Omega' + \Sigma'_i$ est encore un domaine.

Singularités artificielles des fonctions harmoniques. Résultats définitifs. On connaît le résultat suivant, qui remonte à Schwartz, et qui, pour avoir été retrouvé récemment par M. PICARD¹, a donné lieu à tous les développements que l'on verra :

Il n'y a pas de singularité pour une fonction harmonique, en un point où elle est continue, si elle reste bornée dans le voisinage de ce point.

M. Lebesgue² en a donné l'extension suivante :

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique bornée dans un domaine, aux points entièrement intérieurs à ce domaine, où elle n'est pas définie,

1^o d'un arc borné de courbe analytique, ou de courbe rectifiable,

2^o d'un ensemble réductible de points ou de courbes,

3^o d'un ensemble pouvant être enfermé dans un nombre fini de sphères, dont la somme des rayons puisse être prise aussi petite que l'on voudra.

On peut remarquer que tous ces ensembles sont de capacité nulle. Mais cette notion n'était pas née au moment où cet énoncé avait été donné.

M. BOULIGAND³ a établi l'énoncé plus général suivant :

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique aux points d'un ensemble de capacité nulle entièrement intérieur à un domaine où elle reste bornée.

M. KELLOGG⁴ établit la réciproque de cet énoncé.

Enfin, le raisonnement de Kellogg permet de démontrer le résultat définitif⁵ que l'on peut atteindre dans cet ordre d'idées :

Soient T un domaine et B une partie de sa frontière telle que $T' = T + B$ soit encore un domaine ; T et B peuvent s'étendre à l'infini. Si B est impropre, toute fonction harmonique bornée

¹ C. R., t. 176, 1923, p. 933.

² C. R., t. 176, 1923, p. 1097.

³ Loc. cit.

⁴ Loc. cit.

⁵ F. VASILESCO, loc. cit.

dans le voisinage de chaque point de B peut être définie sur B , de manière qu'elle soit harmonique sur T' , et réciproquement, si cela est possible, B est un ensemble impropre. Le maximum de l'ensemble B est la partie impropre de la frontière de T .

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques. Grâce aux notions de capacité, de potentiel conducteur et d'ensemble impropre, on peut établir les théorèmes généraux suivants:

Soient $F(P)$ et $\Phi(P)$ deux fonctions harmoniques bornées dans un domaine Ω , prenant les mêmes valeurs sur une partie $\Sigma - s$ de la frontière, s étant un ensemble fermé de Σ .

Si M est une borne supérieure commune à $|F(P)|$ et à $|\Phi(P)|$ et $v(P)$ le potentiel de s , on a dans Ω

$$2Mv(P) \cong |F(P) - \Phi(P)|^1$$

Ainsi, le potentiel conducteur de s mesure, en quelque sorte, la différence entre ces deux fonctions harmoniques.

En particulier, si s est de capacité nulle, $F(P)$ et $\Phi(P)$ coïncident.

Cependant, ce cas particulier peut être également considéré comme tel, pour l'énoncé général² suivant:

Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées, distinctes, dans un domaine Ω , si leur différence tend vers zéro partout sur sa frontière Σ , sauf sur un ensemble impropre de celle-ci.

Enfin, on a le théorème³ suivant:

Si une fonction harmonique bornée dans Ω est continue aux points de Σ , sauf aux points d'un ensemble s de capacité nulle de celle-ci, elle admet, dans Ω , le même maximum et le même minimum que sur $\Sigma - s$.

*Potentiel d'une distribution de masse. Continuité à travers la masse*⁴. Une distribution de masse sera une fonction complète-

¹ F. VASILESCO, loc. cit.

² F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et aussi *Journ. de math.*, 1935, fasc. 2.

³ *Ibid.*

⁴ F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1173 et *Journ.* (loc. cit.). G. C. EVANS, *Transactions of the Am. Math. Soc.*, vol. 37, 1935, p. 226.

ment additive d'ensemble mesurable B . On peut se borner à n'envisager que des distributions positives, toute autre distribution étant la différence de deux telles distributions. On a le théorème suivant :

Soient E un ensemble parfait borné et $\mu(e)$ une distribution positive sur lui. Le potentiel de cette distribution (donné par une intégrale de Stieltjes) est continu en tout point de E où il est continu sur E . L'ensemble des points de E où il est continu sur E est partout dense, sur E .

Etude de la distribution des points réguliers et irréguliers de la frontière d'un domaine. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder cette étude.

Tout d'abord, on démontre que la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine Ω est la même que pour le domaine Ω' si les données frontières coïncident sur Σ' . En particulier, la fonction de Green est la même pour ces domaines ¹.

En conséquence, pour étudier le comportement à la frontière du potentiel d'un ensemble fermé borné E , il suffit de considérer l'ensemble réduit qui s'en déduit, et de celui-ci, seulement la partie E' qui constitue la frontière du domaine infini et d'un seul tenant D . Soient E'_e la frontière extérieure de ce domaine et E'_i sa frontière intérieure.

On démontre que le potentiel de E'_e tend vers l'unité aux points d'un ensemble partout dense sur E'_e . De même, un ensemble réduit borné sans domaine intérieur est tel que, en chacun de ses points, son potentiel a comme plus grande limite l'unité. On en déduit, en réunissant ces énoncés, le résultat sur E' ².

On peut aller plus loin dans cette voie et démontrer

Le lemme de Kellogg. — *Tout ensemble réduit borné a des points réguliers* ³.

On en conclut que, sur l'ensemble E' , l'ensemble des points

¹ F. VASILESCO, *Journ. de math.*, loc. cit., 1930.

² *Ibid.*

³ EVANS, *Proc. of the Nat. Acad. of Sc.*, 19, 1933, p. 457; VASILESCO, *Journ.*, loc. cit. 1935.

réguliers est partout dense, et que, par conséquent, la fonction de Green du domaine D tend vers zéro sur un ensemble de points partout dense sur E' .

Le passage de cette étude concernant le potentiel conducteur, au cas d'un domaine quelconque, se fait au moyen de l'artifice indiqué précédemment, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

L'ensemble des points réguliers est partout dense sur la frontière réduite d'un domaine Ω .

Mais que peut-on dire de l'ensemble des points irréguliers ?

On peut former un exemple montrant que cet ensemble peut, également, être partout dense sur la frontière ¹. Sans entrer dans les détails de la construction, disons simplement que chaque point irrégulier est formé par une épine de M. Lebesgue, et que cet ensemble est dénombrable. Il est donc impropre.

On peut même donner un exemple ² d'un domaine sur la frontière réduite duquel les points irréguliers forment une infinité de lignes analytiques, ou en général, d'ensembles de capacité nulle, qui sont partout denses. Dans cet exemple, l'ensemble des points irréguliers est encore impropre, mais il n'est plus dénombrable.

La recherche de ces exemples a été provoquée par l'affirmation qui avait été formulée, auparavant, que l'ensemble des points irréguliers serait de capacité nulle ³. Il n'en est rien, comme on vient de le voir, et comme on le démontrera d'une façon générale.

En effet, grâce au lemme de Kellogg, on démontre que l'ensemble des points de la frontière d'un domaine, où la plus grande limite de la fonction de Green est supérieure ou égale à un nombre donné ε , est de capacité nulle ⁴.

On en conclut que

L'ensemble des points irréguliers est impropre.

Nous atteignons ainsi le résultat général au sujet de l'étude que nous nous sommes proposée.

Sur la frontière réduite d'un domaine, l'ensemble des points

¹ F. VASILESCO, *Journ.*, loc. cit., 1930.

² F. VASILESCO, *C. R.*, t. 187, 1928, p. 1116.

³ O. D. KELLOGG, *Bul.*, loc. cit.

⁴ VASILESCO, *Journ.*, loc. cit., 1930.

irréguliers est partout dense. Il peut en être de même de celui des points irréguliers, mais celui-ci est un ensemble impropre.

Le résultat qui précède, concernant la fonction de Green, permet de formuler l'énoncé suivant, dû à M. Bouligand ¹:

$V(P)$ étant la solution du problème de Dirichlet généralisé, l'ensemble des points frontière où quelque valeur limite de V est extérieure à l'intervalle $[f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon]$ est de capacité nulle.

Cas des surfaces de niveau du potentiel ². Considérons un ensemble réduit borné. En chacun de ses points irréguliers le potentiel conducteur a une limite inférieure plus petite que l'unité. Appelons surface de niveau S_λ du potentiel, la frontière du domaine formé par les points où $\varphi < \lambda < 1$. On démontre que le potentiel de S_λ est égal à $\frac{\varphi}{\lambda}$ et que les points irréguliers de S_λ sont ceux où la plus petite limite de φ est inférieure à λ , les autres étant réguliers. D'après le résultat général précédent, on conclut que

Une surface de niveau du potentiel d'un ensemble réduit borné ne peut avoir qu'un ensemble de capacité nulle de points réguliers.

Propriété de la solution du problème de Dirichlet généralisé. Le même résultat général précédent, joint à des résultats antérieurs concernant les fonctions harmoniques, permet d'énoncer le théorème suivant:

Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées qui tendent vers la même valeur aux points réguliers de la frontière d'un domaine ³.

Et cet énoncé permet de démontrer la propriété suivante de la solution du problème de Dirichlet généralisé:

Elle peut être définie au moyen de domaines normaux tendant vers Ω d'une manière quelconque, et non plus seulement par son intérieur ⁴.

¹ Loc. cit. et VASILESCO, *Journ.*, loc. cit., 1930.

² F. VASILESCO, *C. R.*, t. 187, 1928, p. 635.

³ F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.

⁴ *Ibid.*

III. — LE PROBLÈME DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉ ET LA MÉTHODE DU BALAYAGE.

On a vu dans le chapitre I que la méthode du balayage conduit à la définition d'une fonction harmonique V , mais que la démonstration de l'unicité de cette fonction est subordonnée à l'assujettissement de la surface du conducteur à vérifier certaines conditions de régularité, qui assurent sa continuité à la frontière.

Cependant, le raisonnement de Poincaré n'implique nullement que l'on ait affaire à un conducteur limité par une surface régulière. Il suffit de considérer à la place de celui-ci un ensemble fermé borné. La question de l'unicité se pose alors. On démontre ¹ que la fonction V définie dans ces conditions par le procédé du balayage est unique. Elle coïncide avec le potentiel conducteur de l'ensemble considéré. La méthode du balayage conduit donc, en fait, à la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs unité à la frontière.

M. DE LA VALLÉE POUSSIN ² a étendu récemment la méthode du balayage à une distribution de masse générale, telle qu'on l'a définie plus haut. Il considère une distribution dans un domaine, et suppose que son potentiel est continu à la frontière du domaine. En balayant cette masse, il trouve une distribution sur la frontière du domaine, qui jouit de la propriété que: son potentiel est égal au potentiel initial à l'extérieur et inférieur à l'intérieur. Si la surface frontière est régulière, le potentiel obtenu est continu à travers elle; à l'intérieur, il est donc la solution du problème de Dirichlet pour les valeurs qu'y prend le potentiel primitif. Il en est de même si, la surface étant irrégulière, elle satisfait, en chacun de ses points à la condition de Poincaré. A cause de la continuité à travers la frontière, M. de la Vallée Poussin démontre que la distribution sur la frontière donnée par le balayage est unique.

La considération du problème de Dirichlet généralisé permet d'aller plus loin dans cette voie, en montrant la vraie raison des choses.

¹ F. VASILESCO, *C. R.*, t. 193, 1931, p. 640.

² *Annales de l'Inst. Poincaré*, 3, 1933, p. 175.

On démontre¹ que si l'on considère un domaine général — ensemble ouvert — de frontière Σ , le balayage d'une masse dont le potentiel, U , est continu à travers Σ , donne une distribution sur Σ , $\mu(e)$, dont le potentiel, égal à U à l'extérieur, est égal à la solution du problème de Dirichlet généralisé, pour les valeurs de U sur Σ , à l'intérieur.

Grâce à l'unicité de cette solution — et non plus à la continuité à la frontière — on démontre, en supposant Σ une surface irrégulière S , que la distribution est unique.

Mais il y a plus. On démontre que le potentiel de la distribution $\mu(S)$ prend, en tout point p de S , comme valeur, la plus petite limite de ses valeurs intérieures, en ce point, soit, $U(p) - \lambda$. Il est donc continu en tous les points de S où cette limite est unique, donc égale à $U(p)$. Ces points contiennent tous les points irréguliers de S , et, en particulier, ceux en lesquels S satisfait à la condition de Poincaré. Les points où il est discontinu forment un ensemble impropre.

Par exemple, la balayage d'une masse unité concentrée en un point P du domaine donne une distribution $\mu(S, P)$ dont le potentiel est égal à $\frac{1}{r} - G(M, P)$, $G(M, P)$ étant la fonction de Green du domaine. Il est donc continu aux points réguliers et discontinu aux points irréguliers.

On peut aller encore plus loin dans la voie ouverte par M. de la Vallée Poussin par l'extension de la méthode du balayage.

IV. — RACCORDS AVEC LES MÉTHODES DU CHAPITRE I.

Ainsi que nous l'avons fait voir à la fin du chapitre I, il est important de rechercher si les divers procédés que l'on a rappelés dans ce chapitre, conduisent à des fonctions harmoniques différentes ou non. Cette recherche est importante, en outre, au point de vue suivant :

C'est que, si tous ces procédés conduisent à la même fonction harmonique V , identique à la solution du problème de Dirichlet généralisé, *on enrichit du coup cette solution de toutes les propriétés que ces divers procédés expriment.*

¹ F. VASILESCO, C. R., t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.

On démontre qu'il en est bien ainsi ¹. On vient de le voir, dans le chapitre précédent, pour la méthode du balayage. On le vérifie pour la méthode de M. Zaremba qui apporte les propriétés dont sa solution jouit, et qui ont été énumérées au chapitre I, en particulier la suivante, qu'il n'est pas inutile de rappeler:

La solution du problème de Dirichlet généralisé rend minimum l'intégrale

$$\int \int \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega$$

relative à toutes les fonctions continues u et ayant des dérivées premières continues dans Ω , qui prennent sur la frontière Σ du domaine Ω les valeurs continues f qui définissent cette solution.

Pour d'autres procédés rappelés au chapitre I, tel que cela a été le cas pour la méthode du balayage, il faut dissocier le procédé de définition de la fonction V des conditions à la frontière, et démontrer l'existence et l'unicité de cette fonction. L'introduction de la solution du problème de Dirichlet facilite cette tâche. Tel est le cas pour le procédé de Raynor, pour celui de Phillips et Wiener, etc.

J'ajoute que, pour le procédé de M. Lebesgue, par des médiations itérées, l'identité qui nous occupe a été démontrée, il y a quelques années, par M. Perkins ². Ce procédé apporte une jolie propriété de la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Ainsi, *tous les procédés envisagés conduisent à une même fonction V , qui est la solution du problème de Dirichlet généralisé.* On pourra donc donner de celle-ci telle définition que l'on se plaira de choisir parmi ces procédés.

CONCLUSION.

Nous pouvons conclure de la manière suivante: C'est que, toutes les fois qu'un problème conduit au problème de Dirichlet *classique*, pour un domaine D , ce qui implique, pour ce domaine, une conformation particulière, ce même problème conduira au problème de Dirichlet *généralisé*, si l'on envisage le domaine le plus général, défini simplement comme un ensemble ouvert.

¹ F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1721, séance du 20 mai.

² *C. R.*, t. 184, 24 janvier 1927, p. 182.

LES CONDITIONS AUX LIMITES INTRODUITES PAR L'HYDRODYNAMIQUE ¹

PAR

A. WEINSTEIN.

On désigne habituellement par « problème aux limites » tout problème du type suivant: « Déterminer dans un domaine *donné* une solution d'une équation différentielle par certaines conditions imposées à cette solution sur la frontière du domaine ». Le problème classique de ce genre est le problème de Dirichlet.

A première vue, plusieurs problèmes posés par l'Hydrodynamique semblent appartenir à cette catégorie. En réalité, ces problèmes hydrodynamiques se distinguent nettement des problèmes aux limites usuels par une difficulté essentielle et caractéristique: Le domaine d'intégration qui coïncide avec le domaine du fluide en mouvement, est limité, totalement ou en partie, par des frontières qui ne sont pas données. Ainsi les conditions aux limites se trouvent souvent posées sur des limites inconnues elles-mêmes. Ces « *frontières ou surfaces libres* » qu'il faut bien distinguer des *frontières données* (« parois solides » ou « obstacles »), doivent être elles-mêmes déterminées par l'ensemble des conditions du problème.

Les problèmes de ce genre sont très nombreux et remontent en partie à l'époque même de la découverte de l'Analyse infinitésimale. Nous aurons ici le plaisir d'entendre un exposé tout à fait compétent sur les figures d'équilibre des planètes, dont se sont déjà occupées Newton et Mac Laurin. Aussi mon aperçu

¹ Résumé des conférences faites en décembre 1933 et en juin 1935 dans les *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève.

pourra se limiter à quelques problèmes de mouvements permanents d'un fluide parfait de densité constante ayant lieu dans un plan (x, y) . Il s'agira en majeure partie des problèmes de Helmholtz concernant les jets et les sillages, mais j'espère pouvoir aussi dire quelques mots sur le mouvement ondulatoire dans un canal de profondeur finie ou infinie. Nous allons voir qu'il existe une différence essentielle entre les deux classes de problèmes que je viens de nommer. Il va sans dire que je me tiendrai strictement aux lignes générales du programme de ce Colloque en ne parlant que des questions d'unicité et d'existence que nous pose l'Hydrodynamique.

Considérons d'abord les *ondes permanentes*. Le mouvement a lieu dans un canal sous l'action de la gravitation. Le fluide est limité supérieurement par une « ligne libre » l , inconnue *a priori*, qui se déplace sans changement de forme avec une vitesse constante C (« vitesse de propagation »), les vitesses réelles des particules étant très petites par rapport à C . Dans un système d'axes (x, y) lié à l cette ligne paraît immobile; le mouvement est alors permanent et la vitesse ne dépend que de x, y . On étudie les ondes dans l'hypothèse que la ligne l diffère très peu d'une droite horizontale, c'est-à-dire on se borne à considérer les mouvements (absolus) voisins du repos. *Le problème des ondes est donc un problème local*. La partie donnée de la frontière, c'est-à-dire le fond du canal, est une droite qui se réduit au point à l'infini dans le cas de profondeur infinie. La présence de ces parois données de forme très simple n'apporte pas de complication notable pour la théorie: le problème des ondes peut être considéré en principe comme un *problème à frontière libre* partout.

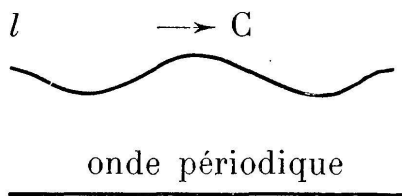


Fig. 1.

Par contre, *la forme de la paroi donnée*, limitant partiellement le fluide, joue un rôle prédominant dans les problèmes des sillages et des jets posés par Helmholtz.

Dans le cas du *sillage* en présence d'un obstacle donné, le fluide en mouvement permanent occupe un domaine du plan (x, y) qui s'étend à l'infini et qui est limité en partie par la paroi

(arc curviligne) donnée $\bar{\omega}$ et par des lignes libres λ non données qui séparent le liquide en repos du liquide en mouvement (fig. 2).

Une question du même genre est le problème de l'écoulement d'un jet jaillissant à travers un orifice percé dans un canal à parois données (fig. 3). Il s'agit dans les deux cas de déterminer le mouvement en supposant l'absence de forces extérieures. Ces problèmes sont des problèmes *non locaux*: la solution cherchée n'est pas voisine d'une solution connue.

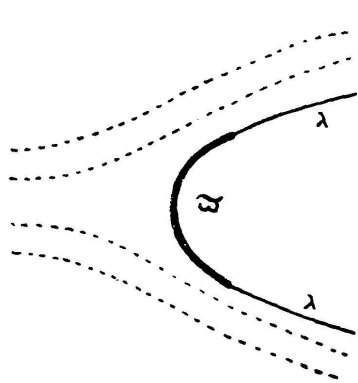


Fig. 2.

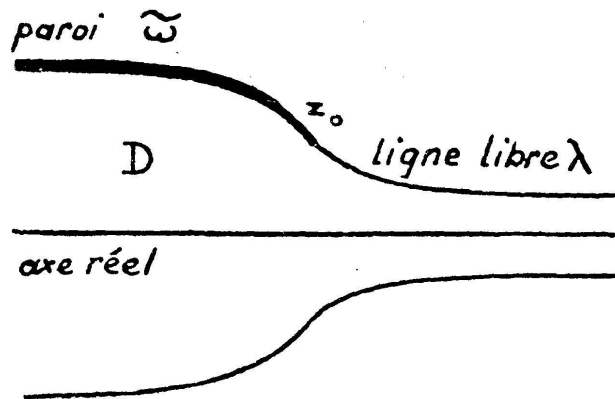


Fig. 3.

Les inconnues des différents problèmes que nous venons d'énoncer sont non seulement les composantes $u(x, y)$, $v(x, y)$ de la vitesse, mais aussi les frontières libres du fluide en mouvement.

L'équation de continuité $u_x + v_y = 0$ permet de substituer à u et v une seule inconnue, la fonction de courant ψ définie par les relations

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u. \quad (1)$$

Dans le cas d'un mouvement irrotationnel, on aura en outre un potentiel de vitesse φ défini par les équations

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = v, \quad (2)$$

La fonction $f = \varphi + i\psi$ (potentiel complexe) sera alors une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$. Nous poserons $f'(z) = \omega = u - iv$. Les fonctions φ et ψ satisfont à l'équation de Laplace: $\Delta\varphi = 0$; $\Delta\psi = 0$. (Dans le cas rotationnel, où φ n'existe pas, ψ satisfait à l'équation de Lagrange: $\Delta\psi =$ fonction arbitraire de ψ .)

Sur la frontière la vitesse est partout tangentielle: ce fait s'exprime par la relation $dx:dy = u:v$, c'est-à-dire par l'équation

$$d\psi = 0 \tag{3}$$

La frontière du fluide se compose généralement de plusieurs lignes sans points communs. D'après (3), ψ prend sur chacune de ces lignes une valeur constante. Ces constantes sont *inconnues* sauf l'une d'elles qui peut être arbitrairement égalée à zéro.

L'équation de la conservation de l'énergie nous donne une condition en plus sur les lignes libres. On aura

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + p = \begin{cases} \text{const. pour les problèmes de Helmholtz} \\ \text{const.} + gy \text{ pour les ondes.} \end{cases} \tag{4}$$

La pression $p(x, y)$ sur ces lignes est égale à la pression constante à l'extérieur du fluide. On obtient, par conséquent, en choisissant convenablement l'unité du temps la *condition non linéaire* suivante sur les lignes libres:

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \begin{cases} = 1 & \text{(problèmes de Helmholtz)} \\ = 2gy + \text{const.} & \text{(problème des ondes)} \end{cases} . \tag{5}$$

Changement de variables. Les conditions $\psi = \text{à des constantes}$ permettent de substituer par un changement de variables un domaine connu au domaine inconnu primitif.

Prenons dans le cas irrotationnel φ et ψ comme variables indépendantes et u, v comme inconnues. Cette transformation est légitime sous l'hypothèse que le déterminant fonctionnel

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 = |f'(z)|^2$$

ne s'annule pas.

Nous aurons: 1° dans le cas du jet et des ondes irrotationnelles dans un canal à profondeur finie, comme image du champ du

segment ω f_0 segment λ $f: 0 \leq \psi \leq \text{const.}$, dont la largeur n'est pas donnée; 2° dans le cas d'un sillage on aura un plan f entaillé le long de l'axe des φ positifs. Remarquons que l'image des points de détachement des

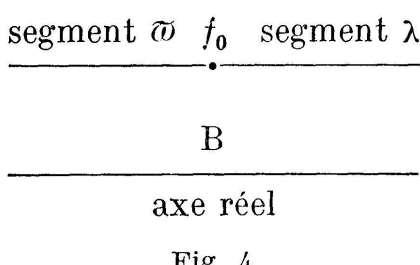


Fig. 4.

lignes libres est inconnue; 3° enfin, dans le cas des ondes dans un canal de profondeur infinie, on aura pour domaine-image un demi-plan f .

La correspondance entre les plans z et f est une représentation conforme. On prévoit donc toute l'importance de la théorie des fonctions analytiques pour nos problèmes. Sans vouloir sous-estimer le rôle de cette théorie, je voudrais attirer votre attention sur une transformation non-conforme qui permet également d'introduire un domaine connu. Il suffit pour cela de prendre x et ψ comme variables indépendantes et de considérer $y = y(x, \psi)$ comme nouvelle inconnue. (On suppose, bien entendu, $\psi_y \neq 0$). Cet artifice a été récemment utilisé avec succès par M. FRIEDRICHS dans le cas du jet (l. c., p. 117), et, indépendamment, par M^{me} DUBREIL-JACOTIN¹ dans le problème des ondes rotationnelles. Il me paraît utile de signaler ces transformations non-conformes aux hydrodynamiciens qui pourraient avoir de l'intérêt à rechercher des artifices analogues dans des problèmes à trois dimensions.

Les transformations indiquées plus haut permettent de ramener le problème des ondes à un problème non linéaire « aux limites » aux frontières données. En effet, en considérant, pour fixer les idées, le cas d'un canal de profondeur finie, on aura sur le bord supérieur de la bande $0 \leq \psi \leq \text{const.}$ la condition (5) écrite dans les nouvelles variables. Sur le fond ($\psi = 0$) la condition aux limites sera particulièrement simple, puisqu'il suffira d'écrire que la vitesse y est horizontale ($v = 0$) partout. Ainsi le problème des ondes se réduit en principe à un problème aux limites non-linéaire dans un domaine donné. Il est nécessaire toutefois de signaler une difficulté tout à fait spéciale de cette question: *Le domaine de la bande n'est pas un domaine borné.* Cette difficulté ne se présente pas d'ailleurs dans la *théorie des ondes périodiques*², qui est, pour cette raison, plus développée que la *théorie de l'onde solitaire*³.

¹ M.-L. DUBREIL-JACOTIN, Sur la détermination rigoureuse des ondes périodiques d'ampleur finie. *Journal de Mathématiques*, 1934.

² T. LEVI-CIVITA, Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Math. Ann.*, t. 93, 1925, p. 264. — D. J. STRUICK, Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles permanentes dans un canal à profondeur finie. *Math. Ann.*, t. 98, 1927, p. 595.

³ A. WEINSTEIN, Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1926.

Considérons maintenant l'effet d'un changement de variables pour les problèmes de Helmholtz. Il est important de se rendre compte que ce changement ne ramène pas ces questions à des problèmes usuels aux limites. En effet, examinons par exemple plus en détail le problème du jet symétrique. Il suffira de considérer la partie supérieure du mouvement. Son image sera dans le plan $f = \varphi + i\psi$ une bande limitée par les droites $\psi = 0$, $\psi = \mu \frac{\pi}{2}$, la constante μ n'étant pas donnée. Signalons que $\mu\pi$ désigne le débit (inconnu) du jet.

Le *problème fondamental* ou *problème de Helmholtz*¹ qui se pose pour la fonction $z(f)$ peut être énoncé dans le cas du jet comme il suit :

Transformer conformément la bande $0 \leq \psi \leq \mu \frac{\pi}{2}$ du plan f en un domaine D du plan $z = x + iy$ de sorte que soient réalisées les conditions suivantes : D doit être limité par l'axe des x , par une ligne (paroi σ) donnée, joignant le point $z = -\infty$ à un point $z_0 = iy_0$ et par une ligne libre non donnée λ qui se détache de z_0 . En chacun des points de cette ligne la transformation cherchée doit conserver les longueurs (c'est-à-dire que l'on doit avoir $|dz/df| = 1$ sur λ).

Une dilatation convenablement choisie permet d'introduire, au lieu de la bande $0 \leq \psi \leq \mu \frac{\pi}{2}$, la bande $B: 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ (fig. 4). On aura alors (en conservant les notations) sur le segment λ du plan f , au lieu de la *condition isométrique* $|dz/df| = 1$, la *condition quasi-isométrique* $|dz/df| = \mu$: la transformation cherchée multiplie les longueurs par une constante positive μ *inconnue*. Le problème ainsi posé par la théorie de Helmholtz se distingue nettement du célèbre problème de représentation conforme énoncé par Riemann, qui ne traite que la représentation d'un domaine *donné* sur un domaine *donné*.

Bien des années avant que ne fut abordée la question de l'unicité et de l'existence des solutions des problèmes posés par la théorie de Helmholtz, M. LEVI-CIVITA a donné la solution

¹ Signalons que Helmholtz, Kirchhoff, ainsi que plusieurs autres savants, se sont limités depuis 1868 jusqu'au début du XX^e siècle à des exemples très particuliers. Encore en 1907, M. Levi-Civita signalait le fait que le problème fondamental dépassait les moyens de l'Analyse de cette époque.

(très perfectionnée par M. VILLAT¹) du problème suivant: Déterminer dans la bande B la famille des fonctions $z(f)$ qui satisfont sur le segment λ à la condition quasi-isométrique $|dz/df| = \mu$.

Aucune condition n'est imposée dans ce problème aux valeurs de $z(f)$ sur le segment ϖ du plan f . M. Levi-Civita substitue donc au problème de Helmholtz le problème de la recherche de l'intégrale générale fournissant la solution indéfinie (ou indéterminée)².

Posons

$$dz/df = 1/\omega = \mu e^{i\omega} = \mu e^{-\tau+i\theta} ; \quad (\omega = \theta + i\tau) \quad (6)$$

La fonction ω sera réelle sur le segment λ . Or toutes les fonctions $\omega(f)$ réelles sur λ peuvent être explicitement exprimées sous forme de séries de certaines fonctions élémentaires $g_n(f)$ connues: on aura, d'après M. Levi-Civita, $\omega(f) = \sum_1^{\infty} c_n g_n(f)$ ou les coefficients c_n sont arbitraires. On peut aussi écrire la fonction $\omega(f)$ sous forme d'intégrale indiquée par M. Villat et généralisant celle de Poisson. Cette intégrale dépend des valeurs arbitraires de θ sur le segment ϖ du plan f . Chacune de ces fonctions ω détermine une fonction correspondante $z(f)$ satisfaisant à la condition quasi-isométrique sur λ . En effet, la formule (6) nous donne par une quadrature l'intégrale générale cherchée

$$z - z_0 = \int_{f_0}^f \frac{dz}{df} df = \int_{f_0}^f \frac{df}{\omega(f)} = \mu \int_{f_0}^f e^{i\omega(f)} df . \quad (7)$$

La paroi correspondante au segment ϖ dépend du choix de la fonction arbitraire ω et ne peut être donnée *a priori*. L'importance de l'intégrale générale est évidente: La solution d'un problème de Helmholtz, si elle existe, correspondra à un certain choix de la fonction $\omega(f)$. De plus, l'intégrale générale permet de prévoir toutes les singularités qui pourraient survenir.

Nous allons maintenant revenir sur le problème fondamental

¹ T. LEVI-CIVITA, Scie e legge di resistenza. *Rend. d. Circolo Mat. di Palermo*, t. 23, 1907. — H. VILLAT, Sur la résistance des fluides. *Ann. de l'Ec. Normale*, 1911, p. 203.

² M. D. RIABOUCHINSKY a proposé pour cette question le nom de « problème mixte direct ». Une nouvelle solution, basée sur une formule de M. Signorini, en a été donnée par M. B. DEMTCHENKO, *Problèmes mixtes harmoniques*, Paris, Gauthier-Villars, 1933. Le problème de Helmholtz pourrait être désigné comme « problème mixte inverse », mais cette dénomination a été déjà employée, *l. c.*, pour un problème qui ne diffère pas essentiellement du « problème direct ».

énoncé plus haut et aborder la question de l'unicité de la solution. On s'aperçoit immédiatement que les méthodes classiques de la théorie de la représentation conforme, par exemple le lemme de Schwarz, ne donnent aucun résultat. Aussi la question de l'unicité sera même plus ardue que le théorème d'existence. Posons d'abord le problème de l'unicité infinitésimale¹: *Démontrer qu'il n'existe pas de solution infiniment voisine d'une solution donnée, c'est-à-dire de solution correspondante à la même paroi donnée, mais différente infiniment peu par la forme de la ligne libre.*

Soit $f(z)$ la solution supposée donnée, $\hat{f}(z)$ une solution infiniment voisine. Formons la variation $\delta f = \hat{f}(z) - f(z)$. *Le théorème de l'unicité infinitésimale affirme que δf s'annule identiquement.*

La variation δf vient d'être définie dans le domaine D de la solution supposée connue. A ce domaine correspond d'une manière biunivoque et conforme la bande B du plan f . On peut donc considérer δf comme fonction de f . Nous obtiendrons d'après la définition de la variation δf une expression générale de cette fonction en faisant varier, dans la formule (7), f pour une valeur fixe de z . On obtient ainsi l'équation

$$0 = \frac{\delta f}{\omega(f)} - \int_{f_0}^f \frac{\delta \omega}{\omega^2} df$$

c'est-à-dire

$$\delta f = \omega \int_{f_0}^f \frac{\delta \log \omega}{\omega} df. \quad (8)$$

En dérivant cette dernière équation² par rapport à f on obtient la *relation fondamentale* entre δf et $\delta \log \omega$:

$$\frac{d(\delta f)}{df} - \frac{d \log \omega}{df} \delta f = \delta \log \omega. \quad (9)$$

¹ A. WEINSTEIN, Sur l'unicité des mouvements glissants. *C. R.*, 1923, p. 493. — Sur les jets liquides à parois données. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1926, p. 119.

² On pourrait envisager aussi une *variation infinitésimale des parois*. Dans ce cas on aurait au lieu de (8) l'équation

$$\delta f = \omega \left\{ \int_{f_0}^f \frac{\delta \log \omega}{\omega} df - i \delta y_0 \right\} \quad (8')$$

(où δy_0 désigne la variation du point de détachement), mais la *relation fondamentale* (9) ne changerait pas de forme.

Cette formule qui n'est qu'une identité à l'intérieur de la bande B, nous donne, en vertu de la condition quasi-isométrique, une condition aux limites pour la variation $\delta f = \delta\varphi + i\delta\psi$ sur λ . La partie réelle de (9) se réduit sur le segment λ à la condition linéaire

$$\frac{d(\delta\psi)}{dn} - \frac{d\theta}{d\varphi} \delta\psi = -\delta \log \mu \quad (dn = d\psi) . \quad (10)$$

La variation inconnue de la constante quasi-isométrique μ y figure explicitement au second membre. On a d'ailleurs $\frac{d\theta}{d\varphi} = \mu \frac{d\theta}{|dz|} = \mu c$ où c désigne la courbure de la ligne libre de la solution supposée donnée.

Il est important de remarquer que, jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas servi de l'hypothèse que la solution infiniment voisine correspond aux mêmes parois que la solution donnée. La condition (10) est indépendante de cette hypothèse. L'influence de l'invariance des parois sur une variation éventuelle des lignes libres nous est pour le moment profondément cachée. En raison de cette difficulté caractéristique du problème nous ne possédons sur λ d'autre condition que celle qui est donnée par (10). Cette équation est une *condition intrinsèque* aux limites; elle a lieu indépendamment des conditions imposées sur les autres parties de la frontière.

Ces dernières conditions sont très faciles à établir. En prenant un point z fixe sur la paroi donnée on aura $f = \varphi + i\frac{\pi}{2}$, $\hat{f} = \hat{\varphi} + i\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire

$$\delta\psi = 0 . \quad (11)$$

La même condition sera évidemment valable sur l'axe réel, qui joue le rôle d'une paroi.

A ces conditions s'ajoute la *condition de détachement*

$$\frac{d(\delta\psi)}{d\varphi} = 0 \quad \text{pour } f = f_0 \quad (12)$$

qui est restée longtemps cachée, bien qu'elle dérive de l'identité fondamentale. La condition (12) exprime le fait que la ligne

libre variée se détache du même point z_0 que la ligne supposée donnée.

Notre but est de démontrer que l'ensemble de ces conditions aux limites (10), (11) et (12) a pour conséquence l'équation

$$\delta f \equiv 0 \quad (\text{Problème de l'unicité infinitésimale, ou Problème I}).$$

Ce but n'a pu être atteint que par un détour: Faisons l'hypothèse que la variation inconnue $\delta\mu$ est égale à zéro. On obtient alors un nouveau *Problème II* qui est plus simple que le Problème I, mais dont le caractère est artificiel. En effet, en posant *a priori* $\delta\mu = 0$, on se limite à la considération d'une classe particulière de solutions infiniment voisines de la solution donnée. Ce sont les solutions, auxquelles correspondent non seulement les mêmes parois, mais aussi la même constante quasi-isométrique μ . Cette restriction est tout à fait arbitraire, car μ n'est pas donné. L'étude du *Problème II (d'unicité infinitésimale au sens restreint)* sera justifiée uniquement par son utilité pour la résolution du Problème I.

Désignons, pour abrégier l'écriture, la variation $\mu\delta\psi$ dans le Problème II par β . La fonction harmonique β satisfait dans la bande B aux conditions aux limites qui s'obtiennent en posant $\delta\mu = 0$ dans les conditions du Problème I. On aura

$$\beta = 0 \quad \text{sur le segment } \bar{\omega} \text{ et sur l'axe réel} \quad (13)$$

$$\frac{d\beta}{dn} = c\beta \quad \text{sur le segment } \lambda \quad (14)$$

Le Problème II consiste à démontrer que β est identiquement nul. La fonction $c = c(\varphi)$ y désigne comme précédemment la courbure de la ligne libre de la solution dont nous avons admis l'existence. En général c ne sera pas une fonction explicitement connue, mais l'intégrale générale du problème nous donne des renseignements précieux sur l'allure de la ligne libre correspondant à une paroi donnée. Ainsi on sait, par exemple (Théorème de M. Boggio), que cette ligne sera convexe si la paroi est concave. Ces renseignements permettent de formuler les résultats sur l'unicité en n'utilisant strictement que les données du problème.

La condition (13) paraît à première vue être identique à celle que Fourier a étudié dans la Théorie de la Chaleur. En réalité elle s'en distingue nettement par le *signe* de la fonction c : ce signe, qui est toujours *négalif* dans le cas de la Théorie de la Chaleur, est, par contre, toujours *positif* dans le cas le plus important de la théorie des jets, celui des jets à parois concaves vers le courant.

En tenant compte des conditions aux limites on obtient par la formule de Green pour β l'équation

$$\int_B \int \left\{ \left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right)^2 \right\} d\varphi d\psi - \int_{\lambda} c \beta^2 ds = 0. \quad (15)$$

Le premier membre de cette équation serait dans le cas de Fourier la *somme* de deux quantités positives. On aurait donc immédiatement $\beta \equiv 0$. Or, dans notre cas ce premier membre est la *différence* de deux grandeurs positives, de sorte que l'équation (15) ne semble nous donner aucun renseignement sur β .

On a réussi quand même à utiliser l'équation (15) pour démontrer que β s'annule *identiquement pour certaines classes de parois*. Depuis la première démonstration de ce théorème en 1923¹ MM. HAMEL², WEYL³ et FRIEDRICHS⁴ ont successivement donné des démonstrations sous des hypothèses de plus en plus générales. Le but de ces démonstrations est de prouver que le premier membre de (15) pris en lui-même, est toujours positif, sauf pour $\beta \equiv 0$. En 1933, M. Friedrichs a réussi à mettre ce fait en évidence en transformant le premier membre de (15) en une somme de deux carrés. La transformation de M. Friedrichs est valable dans tous les cas où se trouve vérifiée la condition suivante: il existe une fonction harmonique U qui ne s'annule jamais dans le domaine D et qui satisfait sur λ à la condition intrinsèque (14) du Problème II: $dU/dn = cU$. En admettant

¹ A. WEINSTEIN, l. c., 114. — Ein hydrodynamischer Unitätssatz. *Math. Zeitschrift*, t. 19, 1924, p. 265.

² G. HAMEL, Über einen hydrodynamischen Unitätssatz des Herrn Weinstein. *Résumés des Conférences du Deuxième Congrès international de Mécanique appliquée*, Zürich, 1926, p. 76. — Ein hydrodynamischer Unitätssatz. *C. R. du Deuxième Congrès international de Mécanique appliquée*, Zurich, 1927.

³ H. WEYL, Strahlbildung, nach der Kontinuitätsmethode behandelt. *Göttinger Nachrichten*, 1927, p. 227.

⁴ K. FRIEDRICHS, Ueber ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande. *Math. Ann.*, t. 109, 1933, p. 60.

l'existence d'une telle fonction on aura en posant dans (15) $\beta = U\eta$ (principe de variation multiplicative de Jacobi) l'équation

$$\int_B \int U^2 (\eta_\varphi^2 + \eta_\psi^2) d\varphi d\psi = 0 \quad (16)$$

qui donne immédiatement l'équation $\beta \equiv 0$.

Examinons maintenant la question de l'existence de la fonction U de M. Friedrichs. On vérifie immédiatement, par différentiation ¹, que les composantes de la vitesse $u = e^\tau \cos \theta$ et $v = e^\tau \sin \theta$ satisfont à la condition (14) sur λ . Il suffit donc de s'assurer qu'une composante quelconque de la vitesse $U = au + bv$ ($a^2 + b^2 = 1$, a et b étant constants) ne s'annule pas dans D , pour en déduire l'équation $\beta \equiv 0$. Par conséquent le procédé de M. Friedrichs démontre l'unicité infinitésimale au sens restreint pour une classe très vaste de parois, en particulier pour toutes les parois concaves, pour lesquelles la variation totale de la direction de la tangente (« courbure totale de la paroi ») n'est pas supérieure à π .

Considérons dorénavant uniquement des parois pour lesquelles le Problème auxiliaire II est supposé résolu, c'est-à-dire pour lesquelles le théorème d'unicité infinitésimale au sens restreint est supposé démontré. (Nous ne nous préoccupons pas de la question encore non tranchée de savoir quelles sont toutes les parois pour lesquelles ce théorème est vrai). La condition de détachement (12) permet alors de démontrer pour les mêmes parois l'unicité infinitésimale (Problème I) sans aucune restriction arbitraire. Cette réduction du Problème I au Problème II a été longtemps une difficulté principale de la théorie. Le temps me manque pour donner des détails de cette réduction qui a été effectuée d'abord pour des parois concaves ². La démonstration donnée dans ce cas peut être interprétée de la manière suivante: Si une variation quelconque de la paroi donnée conserve la direction de cette paroi au (nouveau) point de détachement $z_0 + \delta z_0 = i(y_0 + \delta y_0)$, le signe de la variation $\delta\mu$ sera égal au signe de la variation δy_0

¹ Cette simple démonstration des équations $du/dn = cu$ et $dv/dn = cv$ m'a été communiquée par M. C. Jacob.

² A. WEINSTEIN, Sur le théorème d'existence des jets liquides. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1927, p. 157.

du point de détachement. (C'est-à-dire que le débit augmente avec l'orifice). Par conséquent l'invariance de la paroi implique l'égalité $\delta\mu = 0$ et on retrouve ainsi pour le Problème I les conditions aux limites du Problème II. Récemment, M. LERAY a étendu ces résultats aux parois non concaves en introduisant dans le Problème I au lieu de l'inconnue $\delta\psi$ la fonction $\beta^* = \delta\psi + \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \delta \log \mu$. On a pour β^* les conditions aux limites suivantes qui se déduisent de (10), (11) et (12):

$$\frac{d\beta^*}{dn} = c\beta^* \quad \text{sur le segment } \lambda \quad (10')$$

$$\beta^* = 0 \quad \text{sur le segment } \varpi \quad (11')$$

$$\beta^* = -\frac{\pi}{2} \delta \log \mu \quad \text{sur l'axe réel} \quad (11'')$$

$$\frac{d\beta^*}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\beta^*}{d\psi} = 0 \quad \text{au point de détachement } f_0. \quad (12')$$

Les conditions (12') nous montrent l'existence d'une ligne $\beta^* = 0$, différente du segment ϖ , passant par le point de détachement. Trois cas pourraient alors se présenter: cette ligne pourrait rencontrer soit ϖ , soit l'axe réel, soit λ . Dans le premier cas on trouverait immédiatement $\beta^* \equiv 0$. Dans le second cas on aurait $\delta\mu = 0$ et, par conséquent, β^* satisferait aux conditions du Problème II, ce qui donnerait de nouveau $\beta^* \equiv 0$. Enfin, dans le troisième cas, la fonction β^* satisferait aux conditions aux limites du Problème II sur les frontières d'un certain domaine partiel B^* de B et on arriverait à la même conclusion: $\beta^* \equiv 0$. Il va sans dire que le Problème II pour le domaine B^* ne peut plus être interprété comme un problème d'unicité infinitésimale.

Je me suis jusqu'à présent limité à un aperçu du problème de l'unicité infinitésimale. J'aborde maintenant la question de l'existence des solutions des problèmes posés par la théorie de Helmholtz. Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, cette question doit être traitée avant le problème de l'unicité absolue (unicité dans le sens usuel de ce mot) ¹.

¹ Signalons que M. Friedrichs (l. c., 117) a démontré l'unicité absolue *au sens restreint*, c'est-à-dire en supposant μ fixe. La solution supposée donnée fournit dans ce cas le minimum absolu de l'intégrale $\int_D (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1) dx dy$, car la seconde variation de cette expression est égale à la moitié du premier membre de l'équation (16) ou (15).

Les théorèmes d'existence ont été démontrés par des *procédés de continuité*. Nous avons vu que la recherche d'une solution pour des parois données se ramène en principe à la recherche d'une fonction inconnue $\omega(f)$ appartenant à la classe des fonctions étudiées dans la théorie de l'intégrale générale. Les fonctions de cette classe dépendent en général d'une *infinité de paramètres*. Ces paramètres sont les coefficients arbitraires des séries de M. Levi-Civita ou bien les coefficients de Fourier de la fonction arbitraire qui intervient dans l'intégrale de M. Villat. Le problème de l'existence est donc équivalent à la détermination de ces paramètres.

Considérons d'abord le cas d'une *paroi polygonale donnée*. Désignons ses sommets par $z_0 = iy_0, z_1, z_2, \dots, z_n (z_k = x_k + iy_k)$. M. CISOTTI a démontré en 1908¹ que la fonction ω ne dépend dans ce cas que d'un nombre *fini* de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$ en nombre égal à celui des coordonnées des sommets. L'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces paramètres peut être représenté par les points d'un certain domaine d'un espace à $2n + 1$ dimensions. Les coordonnées des sommets: $y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ sont des fonctions explicitement données du point $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$. Le *théorème d'existence* affirme qu'il existe un ou plusieurs points (α) correspondants à des valeurs des (x_k, y_k) données.

Ce théorème a été démontré par la *méthode de continuité* classique². Le temps me manque pour donner un aperçu de cette méthode, employée pour la première fois, en 1874, dans un problème de représentation conforme, par le mathématicien bernois SCHLÄFLI. Il nous suffit pour les applications de savoir qu'elle fournit l'énoncé de conditions suffisantes pour assurer l'existence des solutions d'un nombre fini d'équations transcendentes, telles que

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}) \\ y_k &= y_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}) \\ y_0 &= y_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

¹ U. CISOTTI, Vene fluenti. *Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo*, t. 25, 1908, p. 145.

² A. WEINSTEIN, l. c., p. 118.

où le nombre des équations est égal au nombre des paramètres. La démonstration par continuité se réduit dans notre cas, comme dans toutes les applications, à établir les théorèmes suivants :

1. *Le déterminant fonctionnel*

$$\frac{\partial (y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1})}$$

est toujours différent de zéro. Ce théorème est vrai ici puisqu'il exprime le théorème de l'unicité infinitésimale.

2. *Existence des limitations a priori.* On peut affirmer *a priori* que les paramètres inconnus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$ restent entre certaines limites données, si l'on se donne les limites pour les valeurs de (x_k, y_k) . Ce fait peut être déduit, pour toutes les parois à courbure totale non supérieure à π , des formules explicites de M. Cisotti, qui donnent les (x_k, y_k) en fonctions des α_k .

La méthode de continuité permet de déduire de 1. et 2. que notre *problème du jet à paroi polygonale admet au moins une solution*. Il est aisé à prévoir que cette solution sera unique dans le cas banal où tous les sommets z_0, z_1, \dots, z_n se trouvent sur la même droite parallèle à l'axe réel (paroi rectiligne). Ce dernier fait s'ajoutant aux résultats précédents permet de déduire l'*unicité absolue* de la solution pour une paroi polygonale quelconque¹. En effet on peut démontrer par un raisonnement classique que l'existence de *deux* solutions différentes pour une même paroi donnée aurait pour conséquence l'existence d'un point de ramification des solutions. Or, ce fait serait en contradiction avec le théorème de l'unicité infinitésimale.

En résumé *l'existence et l'unicité* de la solution est établie pour le problème du *jet symétrique à paroi polygonale donnée*, de courbure totale inférieure à π .

L'*existence* des solutions correspondantes aux *parois curvilignes* a pu être établi par un *passage à la limite*², en approchant la

¹ J. LERAY et A. WEINSTEIN, Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz. *C. R.*, 1934, p. 429.

² A. WEINSTEIN, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. *Math. Zeitsch.*, t. 31, 1929, p. 424.

paroi donnée par des parois polygonales. Toutefois, ce procédé ne fournit pas l'unicité absolue de la solution.

Les problèmes posés par la théorie de Helmholtz, en particulier le problème du *sillage* en présence d'un *obstacle curviligne*, ont été récemment l'objet d'une *étude directe*, qui fait intervenir la théorie récente de la résolution des *équations fonctionnelles non linéaires*. La différence entre cette nouvelle méthode et la précédente est peut-être plus apparente que réelle. En effet, la résolution de ces équations se fait elle-même en raisonnant par continuité dans un domaine fonctionnel. Les théorèmes dans le domaine fonctionnel s'obtiennent par un passage à limite préalable à partir des théorèmes relatifs à l'espace à un nombre fini de dimensions.

Je me permets de donner quelques indications très sommaires sur ce développement tout à fait récent de la théorie. Nous avons vu à plusieurs reprises que la résolution d'un problème quelconque de Helmholtz revient à la détermination de la fonction $\omega(f) = \theta + i\tau$ introduite par M. Levi-Civita. La partie réelle θ de cette fonction donne la direction de la vitesse. Considérons un *obstacle curviligne donné*. Sa courbure $d\theta/ds$ sera une fonction $c(\theta)$ donnée de la direction θ de la tangente à l'obstacle. On aura donc sur le segment ϖ du plan f l'équation $d\theta/ds = c(\theta)$, c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = c(\theta) \frac{ds}{d\varphi} \quad (17)$$

On peut exprimer $ds/d\varphi$ par les fonctions (inconnues) θ et τ . Par conséquent on aura une relation de la forme $\frac{ds}{d\varphi} = h(\theta, \tau, \varphi)$ où h est une fonction donnée. L'équation (17) peut être écrite alors de la façon suivante

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = h(\theta, \tau, \varphi) c(\theta) \quad (18)$$

Cette équation, indiquée en 1907 par M. Levi-Civita, lie sur ϖ les parties réelle et imaginaire de la fonction ω correspondante à un obstacle donné. M. Villat a proposé en 1912 d'éliminer θ

en se servant de la formule de Green-Dini. En 1931, M. QUARLERI¹ a proposé d'éliminer, toujours en se servant de la même formule, la fonction τ et de ramener ainsi l'étude du problème à la résolution d'une équation intégrale non linéaire. Malheureusement son procédé a donné lieu à des objections et il a fallu y apporter plusieurs modifications essentielles.

Je me permets d'écrire les équations finales auxquelles se ramène le problème du sillage dans le cas le plus simple²: l'obstacle donné sera un arc de cercle de rayon unité. On aura dans ce cas $c(\theta) \equiv 1$.

Il est plus commode d'introduire dans (18) au lieu de f une nouvelle variable indépendante ζ en représentant conformément le plan f (entaillé le long de l'axe des φ positifs) sur un demi-cercle de rayon 1 dans le plan $\zeta = \rho e^{i\sigma}$. Dans cette correspondance l'obstacle aura pour image la demi-circonférence $|\zeta| = 1$ (*Transformation de M. Levi-Civita*). On aura sur cette demi-circonférence la condition suivante déduite de l'équation (18)

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = - \frac{d\tau}{dn} = \mu g(\sigma) e^{-\tau} \quad (19)$$

où $g(\sigma)$ désigne une fonction explicitement connue et où μ joue le rôle de la constante quasi-isométrique. La formule classique de Green-Dini permet de transformer cette condition en une équation intégrale non linéaire. Sous sa forme définitive cette équation peut s'écrire comme il suit

$$t(\sigma) = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(\sigma, \sigma^*) e^{-t(\sigma^*)} d\sigma^* . \quad (20)$$

L'inconnue $t(\sigma)$ est liée d'une façon élémentaire à la fonction τ . Le « noyau » N de cette équation est *positif*. Le problème consiste à résoudre cette équation et à montrer qu'on peut

¹ A. QUARLERI, Sulla teoria della scia nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1931, p. 332. Une autre tentative de résoudre les problèmes de Helmholtz a été faite par M. C. SCHMIEDEN (*Ingenieur-Archiv*, 1932, p. 368, 1934, p. 373), mais son raisonnement contient des erreurs.

² A. WEINSTEIN, Sur les sillages provoqués par des arcs circulaires. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1933, p. 83. — Sur les points de détachement des lignes de glissement. *C. R.*, 1933, p. 324.

disposer du paramètre μ de manière à avoir dans le plan z un *arc donné* du cercle de rayon 1¹. Les premiers résultats concrets obtenus par cette nouvelle voie étaient les suivants: Le théorème d'existence a été démontré pour des arcs inférieurs à 40°. Quelque temps après, M. Leray a repris la question du sillage non seulement pour les arcs de cercle, mais pour des obstacles curvilignes quelconques. M. Leray a démontré que les équations du problème (par exemple l'équation (20)) appartiennent à la classe d'équations fonctionnelles étudiées par lui-même en collaboration avec M. SCHAUDER². Leur méthode, qui est précisément une sorte de méthode de continuité dans le domaine fonctionnel, résout la question de l'existence *indépendamment de la question de l'unicité* des solutions. Je dois me borner à citer une partie des résultats de M. LERAY³:

Le théorème d'existence dans la théorie des sillages est établi pour toute courbe-obstacle, dont les points ont toujours des ordonnées différentes, sauf si le segment qui les joint appartient à la courbe.

Pour étudier l'unicité (infinitésimale et absolue) il faut former les « équations aux variations » des équations fonctionnelles. Il est aisé à prévoir qu'on retrouve par cette voie des problèmes d'unicité du genre étudié plus haut. M. Leray démontre l'*unicité absolue des sillages symétriques* correspondant à des *obstacles symétriques* ainsi que l'unicité du sillage correspondant à un *obstacle disymétrique convexe*, tous ces obstacles appartenant, bien entendu, à la classe définie plus haut.

Dans le cas particulier du cercle, le théorème d'existence et l'unicité de la solution ont été démontrés par M. Leray pour un *arc quelconque*: la grandeur de l'arc-obstacle est une fonction croissante de μ . M. JACOB a récemment retrouvé cette propriété de monotonie de l'arc-obstacle par une voie élémentaire⁴. Signalons

¹ M. J. SEKERJ-ZENKOWITCH, à l'attention duquel ont échappé les travaux cités dans la note précédente, a repris récemment (*C. R. de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1934, p. 373; 1935, p. 151) l'étude des problèmes de Helmholtz. Toutefois cet auteur omet de traiter la question essentielle de la détermination de μ .

² J. LERAY et J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles. *Annales de l'Ec. Normale*, 1934, p. 45.

³ J. LERAY, Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz; théorie des sillages et des proues. *C. R.*, 1934, p. 1282 — *C. R.*, 1935, p. 2007. — *Comm. Math. Helvetici*, Vol. 8, 1935/36, p. 149 et p. 250. — J. KRAVTCHENKO, *C. R.*, 1936, p. 276.

⁴ C. JACOB, Thèse, Paris, 1935 (*Mathematica*, 1935).

enfin que l'existence des solutions de l'équation (20) pour le cas du cercle se déduit, indépendamment des méthodes de continuité, du « Fixpunktsatz » de M. Schauder ¹.

Le cas du cercle nous montre qu'il est possible de lever parfois les restrictions imposées aux parois et aux obstacles. Les problèmes qui se posent ainsi paraissent dignes d'attirer l'attention des chercheurs.

J'arrive à la fin de mon bref aperçu. A mon grand regret, le manque de temps ne m'a pas permis d'insister davantage ni sur des travaux aujourd'hui classiques ², ni sur des recherches tout à fait récentes. J'ai dû restreindre ma tâche à l'énoncé de quelques problèmes d'une théorie qui a commencé par des résultats modestes, mais qui, grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens, opère aujourd'hui dans un champ très vaste.

¹ J. SCHAUDER, *Studia Mathematica*, t. 2, 1930, p. 170. On peut utiliser aussi des théorèmes de M. A. HAMMERSTEIN, *Nichtlineare Integralgleichungen*, *Acta Math.* 1930, p. 122. Signalons enfin que M. S. BRODETSKY avait dès 1922 donné d'excellentes solutions approchées du problème, l'obstacle étant circulaire ou elliptique. Voir p. ex. *C. R. du Deuxième Congrès international de Mécan. appliquée*. Zurich, 1927.

² Voir, par exemple, les Traités suivants: H. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (Coll. *Scientia*, Paris, 1920). — U. CISOTTI, *Idromeccanica piana* (Milano, 1921).

ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES ¹

PAR

J. SCHAUDER (Lwów).

Nous nous occuperons ici des problèmes aux limites posés pour des équations aux dérivées partielles linéaires du type elliptique. Deux méthodes permettent actuellement de les résoudre; les progrès les plus essentiels de la première ont été obtenus par deux savants français, MM. GEVREY et GIRAUD, la seconde a été établie par moi.

La première de ces méthodes opère comme suit: on construit la solution élémentaire de l'équation donnée et on généralise les notions de potentiels de volume, de simple et de double couche. La théorie des équations intégrales linéaires de Fredholm ainsi que ses nombreux perfectionnements y jouent un rôle fondamental; on l'emploie même pour la construction de la solution élémentaire. E. E. LEVI a été le premier à appliquer ces idées aux équations générales elliptiques d'ordre $2p$ et durant ces dernières années MM. Gevrey et Giraud les ont développées d'une manière très nouvelle et très originale en les appliquant aux équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique. En particulier, la méthode en question est employée avec des perfectionnements considérables dans les travaux récents de M. Giraud (voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1932; *Bull. de la Soc. Math.*, juillet 1933, etc.).

¹ Conférence faite le 19 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève, série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

En 1932 j'ai employé pour la première fois le second procédé qui me semble assez simple et bref (voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1932, janvier 1933; *Math. Zeitschrift*, Bd. 38, janvier 1934; *Studia Math.*, Bd. 5, 1934). Je pars de quelques théorèmes bien connus de la théorie du potentiel (théorèmes relatifs aux équations de Laplace et de Poisson) et je les étends *directement* et assez vite à l'équation générale linéaire du type elliptique. J'obtiens ainsi les limitations précises, essentielles pour les recherches ultérieures. On ne se sert plus ici des solutions élémentaires, des fonctions de Green ni des potentiels généralisés. C'est ce dernier procédé que je vais exposer dans cette conférence.

Considérons une équation générale du second ordre et du type elliptique

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f. \quad (1)$$

On impose maintenant très peu de restrictions aux coefficients a_{ik} ; il suffit, par exemple, qu'ils satisfassent à une condition de Hölder. Les méthodes antérieures, celles de LICHTENSTEIN, de STERNBERG exigeaient que les a_{ik} soient deux fois dérivables. Mais la diminution du nombre d'hypothèses imposées aux coefficients est loin d'être seulement un effort de nature sportive! Si vous vous êtes occupés une seule fois, Messieurs, d'équations aux dérivées partielles non linéaires, vous savez bien que cette théorie exige de la théorie des équations linéaires les résultats les plus précis et les plus subtils.

I.

Le point de départ de la méthode directe dont nous voulons maintenant donner une esquisse, consiste en quelques limitations des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad (2)$$

et de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

M. A. KORN s'occupa le premier, en 1907, de telles évaluations; elles furent ensuite traitées par beaucoup d'auteurs.

Introduisons ici quelques notations. Nous appelons norme de la fonction f dans le domaine G l'expression

$$\|f\|_{\alpha}^G = \text{Max}_G |f| + \text{la plus petite constante de Hölder.} \quad (4)$$

c'est-à-dire la plus petite constante C satisfaisant à l'inégalité

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq Cr_{12}^{\alpha}, \quad 1 > \alpha > 0, \quad (5)$$

P_1, P_2 étant des points du domaine G et r_{12} leur distance. Pareillement, f étant une fonction dérivable m fois dans G et dont les dérivées d'ordre m satisfont à la condition de Hölder, nous appelons $\|f\|_{\alpha, m}^G$, l'expression

$$\|f\|_{\alpha, m}^G = \text{Max}_G |f| + \Sigma \|D_1 f\|_{\alpha}^G + \dots + \Sigma \|D_m f\|_{\alpha}^G \quad (6)$$

chaque sommation étant ici étendue à toutes les dérivées d'ordre considéré.

Envisageons maintenant l'équation (3), où f remplit la condition de Hölder, dans une sphère K_R de rayon R . On sait (d'après M. A. Korn) que la solution de (3), s'annulant sur la frontière de K_R , admet dans K_R fermée les dérivées secondes continues et satisfaisant à la condition de Hölder avec le même exposant α ; en outre nous avons l'inégalité

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{K_R} \leq C \|f\|_{\alpha}^{K_R} \quad (7)$$

où la constante C ne dépend pas de R .

D'autre part envisageons l'équation homogène (2) dans un domaine G borné dont une partie de la frontière entière S est un hyperplan H . Supposons u bornée dans G . Quant aux valeurs aux limites que nous désignerons par $\varphi(s)$ (s étant un point de H ou de S), elles doivent admettre sur H des dérivées secondes¹, satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant α . Alors dans

¹ Bien entendu, les dérivées de φ sont calculées par rapport aux variables paramétriques qui caractérisent la portion donnée de la surface H .

le voisinage U de chaque point P situé à l'intérieur ¹ de H la fonction u possède des dérivées du second ordre « Hölderiennes » En outre l'inégalité

$$\| u \|_{\alpha, 2}^U \leq C \left(\| \varphi \|_{\alpha, 2}^V + \text{Max}_G | u | \right) \quad (8)$$

subsiste ².

Cette généralisation du théorème concernant l'équation de Laplace qui consiste à supposer la régularité des valeurs aux limites sur une *portion* seulement de la frontière et non pas sur la frontière entière, est une des bases de notre procédé.

II.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer et les évaluations correspondantes s'étendent facilement aux équations homogènes ou non homogènes du type elliptique dont les coefficients a_{ik}^0 sont *constants*;

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (a_{ik}^0 = a_{ki}^0) \quad (9)$$

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f.$$

Il suffit de remarquer que $L^0 u$ se transforme en Δu par une substitution linéaire des variables x_1, x_2, \dots, x_n . En supposant le déterminant des $a_{ik}^0 = 1$ et

$$| a_{ik}^0 | \leq m, \quad (10)$$

(ce qui ne diminue pas la généralité) nous obtenons

$$\| u \|_{\alpha, 2}^K \leq C(m) \| f \|_{\alpha}^K \text{ pour l'équation } L^0 u = f, \quad (11)$$

$$\| u \|_{\alpha, 2}^U \leq C(m) \left(\| \varphi \|_{\alpha, 2}^V + \text{Max}_G | u | \right) \text{ pour } L^0 u = 0.$$

¹ U est le produit d'une sphère à n dimensions et de l'ensemble $G + S$.

² $\| \varphi \|_{\alpha, 2}^H$ est aussi calculée par rapport aux paramètres locaux sur H .

Cette évaluation diffère de la précédente seulement par le fait que, maintenant, la constante C dépend de m . On peut d'ailleurs trouver aisément la forme exacte de la fonction $C(m)$.

III.

Passons maintenant à l'équation générale

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f. \quad (12)$$

Nous supposons $|a_{ik}| \leq m$, les constantes de Hölder des $a_{ik} \leq M$, le déterminant des $a_{ik} = 1$ et nous considérons d'abord la solution de (12) à l'intérieur¹ du domaine borné G, le second membre f étant Hölderien ($\|f\|_a^G < \infty$). Nous supposons en plus qu'une limitation de u est connue dans tout le domaine G et que u ainsi que ses dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur de G (mais pas nécessairement sur la frontière S). Cherchons une limitation de $D_1 u$, $D_2 u$ et des constantes de Hölder pour $D_2 u$ à l'intérieur de G. Soulignons, que nous *ne sommes pas* en train de construire une solution; la solution u de (12) est donnée, ses dérivées sont régulières et notre but est d'établir quelques inégalités. Notre procédé est le suivant: Soit P un point intérieur à G, $d(P)$ sa distance de la frontière du domaine G et λ un nombre (arbitraire) de l'intervalle $< 01 >$: $0 \leq \lambda \leq 1$. Construisons un cube $W(P, \lambda)$ à n dimensions, de centre P et de côtés parallèles aux axes; la longueur des côtés est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}} \lambda d(P)$. Nous nous proposons de trouver la borne supérieure de la fonction

$$\left[d(P) \right]^{\alpha+2} \left\| u \right\|_{a,2}^{W(P,\lambda)} \stackrel{df}{=} h(P, \lambda)$$

pour λ constant. Désignons cette borne, qui d'ailleurs est finie, par $N(\lambda)$. Soit P_0 un point intérieur à G tel que

$$\left[d(P_0) \right]^{2+\alpha} \left\| u \right\|_{a,2}^{W(P_0,\lambda)} \cong \frac{N(\lambda)}{2}. \quad (13)$$

¹ A la fin de ce paragraphe nous donnerons une évaluation analogue sur la frontière et dans son voisinage.

En écrivant l'équation (12) sous la forme

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(P_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^n [a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f, \quad (14)$$

nous pouvons appliquer les résultats obtenus plus haut pour l'équation à coefficients constants à

$$L^0 u = \Psi, \quad (15)$$

où

$$\Psi = \Sigma [a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f. \quad (16)$$

Nous ne reproduirons pas ici tout le calcul (qui, d'ailleurs, ne dépasse pas l'étendue d'une page et demie¹); le résultat en est

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq K(m, M) \left\{ \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \lambda^\alpha (d(P_0))^\alpha + \frac{\text{Max } |u|}{\lambda^{2+\alpha} [d(P_0)]^{2+\alpha}} + \dots \right\} \quad (17)$$

K dépend de M, c'est-à-dire de la constante de Hölder des coefficients a_{ik} ; on peut trouver facilement la forme exacte de cette dépendance. D étant le diamètre du domaine G, définissons λ_0 par la relation

$$K(m, M) \lambda_0^\alpha D^\alpha = \frac{1}{2}; \quad (18)$$

l'inégalité précédente devient alors

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} + K(m, M) \frac{\text{Max } |u|}{\lambda_0^{2+\alpha} [d(P_0)]^{2+\alpha}} + \dots \quad (19)$$

En transportant $\frac{1}{2} \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}$ dans le premier membre de l'inégalité (19) et en la multipliant ensuite par $[d(P_0)]^{2+\alpha}$, nous obtenons

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot [d(P_0)]^{2+\alpha} \leq K_1(m, M) \left[\|f\|_\alpha^G + \text{Max}_G |u| \right], \quad (20)$$

d'où nous tirons, en vertu de (13), une limitation pour $N(\lambda)$.

¹ Voir mes publications indiquées plus haut et particulièrement la *Math. Zeitschrift*.

Ce raisonnement reste valable pour l'équation plus générale

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (21)$$

Passons maintenant à la limitation dans *le voisinage de la frontière*. Il faut alors ajouter à nos hypothèses la supposition suivante:

Dans un voisinage U d'une portion H de la frontière¹ les dérivées secondes de u satisfont à la condition² de Hölder; $\|u\|_{\alpha,2}^U < \infty$. φ étant les valeurs aux limites, nous prouvons, par un procédé tout à fait semblable au précédent, une limitation pour $\|u\|_{\alpha,2}^{U'}$ dans chaque domaine U' intérieur à U . Il suffit de transformer H en un hyperplan H' et d'appliquer les limitations précédentes³.

IV.

Nous démontrerons maintenant qu'on peut *déduire les théorèmes d'existence des limitations précédentes*. Commençons par l'équation

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \quad (22)$$

et par des valeurs aux limites ayant des dérivées secondes Hölderiennes (problème de Dirichlet).

Envisageons l'ensemble d'équations du type elliptique dépendant d'un paramètre λ

$$\sum a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 u^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_k} = f \quad (23)$$

et telles que l'on ait $a_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker), mais $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}$. Pour $\lambda = 0$ nous obtenons alors l'équation de Poisson

$$\Delta u^{(0)} = f$$

¹ Voir note 1, p. 129.

² C'est-à-dire les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder dans l'ensemble envisagé.

³ Voir l'inégalité (8).

et pour $\lambda = 1$ l'équation donnée (22). On voit tout de suite que tous les coefficients $a_{ik}^{(\lambda)}$ satisfont à la même condition de Hölder, c'est-à-dire que leurs normes hölderiennes toutes ensemble sont bornées. Pour $\lambda = 0$ notre équation est résoluble et en plus $u^{(0)}$ (c'est-à-dire sa solution pour $\lambda = 0$) satisfait ainsi que ses dérivées premières et secondes à la condition de Hölder: $\|u^{(0)}\|_{\alpha, 2}^G < \infty$. La méthode des approximations successives (employée pour ce problème déjà par M. Korn) démontre aisément l'existence de la solution pour λ voisin de 0 et il résulte de la démonstration que $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^G < \infty$. D'ailleurs cette démonstration devient vraiment banale si l'on se sert des notations de la théorie des opérations fonctionnelles. L'équation étant résoluble pour λ_0 nous pouvons de même établir l'existence des solutions $u^{(\lambda)}$ pour un λ voisin de λ_0 en *restant* toujours dans la classe de fonctions dont les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder. La limitation *uniforme* $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^G < C$ reste valable pour toutes les solutions $u^{(\lambda)}$; on en déduit la résolubilité de (23) pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire celle de (22). En plus $u^{(1)} = u$ appartient à la classe envisagée, ce qui veut dire que ses dérivées secondes satisfont dans $G + S$ à une condition de Hölder. J'attire votre attention sur la façon extrêmement simple par laquelle notre procédé fournit l'allure de la fonction u . La transition aux valeurs aux limites continues seulement est maintenant immédiate; on applique les limitations précédentes valables pour les domaines fermés \overline{G} contenus ¹ dans G .

V.

Notre procédé est également simple dans le cas de l'équation plus générale

$$K(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (24)$$

¹ C'est la conséquence des limitations fondamentales du paragraphe précédent; il s'agit d'une évaluation qui permet de majorer $\|u\|_{\alpha, 2}^{\overline{G}}$ seulement par $\text{Max}_G |u|$ dans chaque domaine fermé \overline{G} situé à l'intérieur de G .

L'emploi des équations intégrales n'est plus nécessaire ni la construction de la fonction de Green. Posons

$$L(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \Psi. \quad (25)$$

u est alors une *opération fonctionnelle* $F(\Psi)$ de Ψ et l'équation (24) prend la forme

$$\Psi + \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} [F(\Psi)] + cF(\Psi) = f. \quad (26)$$

En introduisant la notation

$$W(\Psi) = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(\Psi) + cF(\Psi), \quad (27)$$

nous avons

$$\Psi + W(\Psi) = f. \quad (28)$$

Nos limitations prouvent que $W(\Psi)$ est une opération linéaire *complètement continue* à laquelle est alors applicable la théorie développée en 1915 par M. F. RIESZ. On en déduit immédiatement l'alternative suivante: l'équation non homogène (24) est toujours résoluble ou bien l'équation homogène admet une solution non nulle s'annulant sur la frontière.

VI.

Remarquons encore que ce procédé permet de traiter l'équation (24) pour des coefficients continus seulement et même bornés. J'ai démontré le résultat en question dans une note dans les *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1934. Pour le moment je me borne au cas de dimensions $n = 2$. La fonction u est continue¹, ses dérivées premières et secondes existent presque partout et l'équation (24) est valable seulement dans ce sens.

¹ u satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{2}$ et ses dérivées premières satisfont à cette condition sur presque chaque droite parallèle à une direction arbitrairement fixée.

J'ai appliqué ces résultats dans une deuxième note dans les *C. R.*¹ à l'équation elliptique quasilineaire

$$\begin{aligned} A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t \\ = D(x, y, z, p, q) \end{aligned} \quad (29)$$

$$AC - B^2 > \Delta > 0$$

à coefficients *continus* et bornés en x, y, z, p, q . Le problème de Dirichlet est ici toujours résoluble dans le sens que nous venons de préciser². On obtient ce résultat par l'application du théorème du point invariant sous la forme exposée dans mon travail dans les *Studia Math.*, 2, pp. 171-180³. C'est en quelque sorte une généralisation de mes résultats antérieurs concernant l'équation de forme normale

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q),$$

où f est seulement continue.

VII.

Nous avons montré comment on peut traiter le problème de Dirichlet. Les autres problèmes aux limites, la construction de la fonction de Green etc. ne présentent maintenant — il faut le souligner — plus aucune difficulté. Je voudrais exposer ici encore la construction de la fonction de Green⁴.

¹ 26. XII. 1934. La 12^me ligne de la page 1567 de cette note doit être lue: « limites arbitraires suffisamment régulières ».

² Remarquons que la méthode développée ici pour limiter une solution est très générale; nous pouvons de chaque évaluation de solutions des équations de Laplace et de Poisson passer à une évaluation analogue pour les équations elliptiques générales. On peut alors faire différentes hypothèses sur les coefficients a_{ik} .

³ Je m'appuie ici sur le théorème II du travail cité p. 175. Remarquons à cette occasion que la démonstration du théorème I (p. 173) de ce travail donne le théorème en question du point invariant seulement pour les espaces métriques et linéaires dans lesquels zéro possède des voisinages convexes arbitrairement petits.

⁴ Une fois résolu le problème de Dirichlet il est très facile de construire la fonction de Green $G(X, E)$. Dans le cas de l'équation de Laplace cette fonction de Green s'obtient en retranchant de la solution $\frac{1}{r^{n-2}}$ une fonction harmonique qui sur la frontière est égale à cette solution fondamentale. Dans le cas général on opère de la même façon; on définit immédiatement la partie singulière. On doit alors en retrancher la solution d'un problème de Dirichlet posé pour une équation $L(u) = f$.

Posons, comme on le fait souvent dans la théorie des équations du type elliptique de second ordre,

$$R(X, E) = \sum_{r,s=1}^n \alpha_{rs}(E) (x_r - e_r) (x_s - e_s), \quad (30)$$

X, E étant des points de l'espace euclidien à n dimensions de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n et e_1, e_2, \dots, e_n ; $\alpha_{rs}(E)$ sont les éléments de la matrice inverse de la matrice $a_{ik}(E)$. Soit Ω^* un domaine borné contenant Ω et sa fermeture. Je vais me servir d'une remarque bien connue et employée par beaucoup d'auteurs. Soit ρ une fonction suffisamment régulière (par exemple Hölderienne) et posons

$$u(X) = -\mu \int_{\Omega^*} \dots \int [R(X, E)]^{\frac{2-n}{2}} \rho(E) d\tau_E, \quad (31)$$

où

$$\mu = -2^{-2} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right).$$

En calculant les dérivées secondes de la fonction u et en formant¹ l'opérateur $K_X(u)$ on arrive (par un procédé bien connu de la théorie du potentiel) à l'expression

$$K_X(u) = \rho(X) + c \int_{\Omega^*} \dots \int \lambda[X, E] \rho(E) d\tau_E \quad (32)$$

dont le noyau est

$$\lambda(X, E) = K_X[R(X, E)], \quad (33)$$

c dépendant de μ . La dérivation est ici effectuée par rapport à X . Il n'est pas nécessaire de résoudre une équation intégrale correspondante à (32) ni pour des petits ni pour des grands domaines Ω^* . Nous ferons seulement deux remarques:

α) $\rho(E)$ étant bornée, le résultat $m(X)$ de l'opération fonctionnelle

$$m(X) = \int_{\Omega^*} \dots \int \lambda(X, E) \rho(E) d\tau_E \quad (34)$$

¹ Il s'agit de l'opérateur K défini par (24); l'indice inférieur X indique que la dérivation se fait par rapport à X .

effectuée sur ρ satisfait à la condition de Hölder (ce qui se prouve à l'aide de méthodes très simples, employées déjà dans la théorie du potentiel).

β) Le noyau $\lambda(X, E)$ est singulier et d'ordre $r^{n-\alpha}$, où r désigne la distance des deux points X, E .

Il est une conséquence de la condition β) que les ordres des noyaux itérés

$$\lambda^{(1)} = \lambda, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots, \lambda^{(i-1)}, \lambda^{(i)}, \dots$$

diminuent successivement et soient bornés à partir d'un indice suffisamment élevé $i - 1$. A cause de α) $\lambda^{(i)}(X, E)$ satisfait à une condition de Hölder par rapport à la première variable X .

Envisageons

$$\begin{aligned} R'(X, E) &= [R(X, E)]^{\frac{2-n}{2}} + \mu \int_{\Omega^*} \dots \int R^{\frac{2-n}{2}} \lambda(\bar{E}, E) d\tau_{\bar{E}} + \dots \\ &\dots + \mu^{i-1} \int_{\Omega^*} \dots \int R^{\frac{2-n}{2}} \lambda^{(i-1)}(\bar{E}, E) d\tau_{\bar{E}}. \end{aligned} \quad (35)$$

En vertu de (32) nous avons

$$K_X R'(X, E) = \mu^i \lambda^{(i)}(X, E).$$

Supposons maintenant que le point E , qui joue le rôle d'un pôle, soit fixe à l'intérieur de Ω . E restant constant, la fonction $R'(X, E)$ est continue sur la frontière de Ω . Considérons dans Ω une solution u de l'équation

$$K_X u = -\mu^i \lambda^{(i)}, \quad E \text{ constant}$$

les valeurs aux limites étant $-R'(X, E)$. La fonction $R' + u = G(X, E)$ est la fonction de Green cherchée s'annulant sur la frontière de Ω .

VIII.

Les évaluations obtenues précédemment qui ont été le point de départ de nos recherches mènent immédiatement à des

limitations importantes de la fonction de Green $G(X, E)$ et de ses dérivées premières et secondes. Par exemple: dans le domaine Ω_δ à distance δ du pôle les limitations

$$\|G\|_{\alpha, 2}^{\Omega_\delta} \leq \frac{C_1(M)}{\delta^{n+\alpha}}; \quad \|G\|_{\alpha, 1}^{\Omega_\delta} \leq \frac{C_2(M)}{\delta^{n+\alpha-1}}$$

sont valables. Dans les normes $\| \cdot \|$ la dérivation s'effectue toujours par rapport au premier point X . On peut d'ailleurs démontrer facilement certaines conditions de Hölder relativement au point E . (On calcule facilement les valeurs de $C_1(M)$ et $C_2(M)$.) On traite aussi aisément le problème de Neumann et ses généralisations ¹.

IX.

J'ai tâché de montrer comment on cherchait les solutions des équations linéaires du type elliptique par une voie directe. Il est vraisemblable que cette méthode pourrait aussi rendre service pour des autres types d'équations. Je veux encore indiquer de récents résultats d'autres auteurs, mais seulement des résultats obtenus pendant les derniers mois.

Avant tout, ce sont les nouveaux travaux de M. GIRAUD qui cherche à résoudre l'équation (24), étant donnée sur la frontière la valeur de la dérivée dans une direction arbitraire non tangente et d'ailleurs pouvant varier d'un point à l'autre. On ramène le problème à une équation intégrale, mais l'ordre du noyau $\lambda(X, E)$ est trop élevé et l'intégrale $\int \int \lambda(X, E) \rho(E) d\tau_E$ doit être calculée dans le sens de Cauchy. On ne peut pas utiliser directement la théorie de Fredholm. M. Giraud a développé la théorie ² de ces équations intégrales singulières.

On peut étendre aux équations linéaires du type elliptique général du second ordre les recherches que M. VASILESCO vous a exposées ce matin. Le résultat capital en est le suivant: les

¹ Je ne donne pas ici les calculs en question pour que la conférence ne soit pas trop longue. Ils sont maintenant très simples, car nous pouvons (v. §§ VII et VIII) construire la fonction de Green et limiter ses dérivées d'une façon très brève. Je montrerai cela dans un travail qui paraîtra bientôt.

² Voir *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.*, 1935.

points irréguliers sont les mêmes qu'il s'agisse de l'équation de Laplace ou de l'équation générale linéaire ¹.

Pour terminer je voudrais remarquer que, à l'exception d'un travail de E. E. LEVI fait en 1910, je ne connais point de nouvelles recherches sur l'équation du type elliptique d'ordre $2p$ ($p > 1$) ni sur des systèmes d'équations (évidemment quelques généralisations faciles sont possibles). Je crois alors que les futurs efforts devraient aller dans cette direction-là.

LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES ²

PAR

Jean LERAY (Paris).

I. — GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON LINÉAIRES.

1. — *Un type particulièrement simple d'espaces abstraits : ceux de M. BANACH.* — Nous envisageons des problèmes dont l'inconnue est un point x d'un *espace fonctionnel donné*, \mathcal{E} .

Nous supposons que \mathcal{E} est un espace abstrait de Banach : on peut combiner linéairement ses points ; une distance est définie ; la distance $\|x\|$ qui sépare l'origine du point x est nommée norme de x ; on a, λ étant une constante réelle, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

\mathcal{E} sera par exemple l'espace des fonctions continues, l'espace de Hilbert, l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant α , l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes et d'exposant α ; \mathcal{E} pourra être éventuellement un espace euclidien.

¹ Voir par exemple TAUTZ, *Math. Zeitschr.* Bd. 29, 1935.

² Conférence faite le 19 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève ; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

En général un tel espace n'est pas compact : un domaine borné de \mathcal{E} ne peut être recouvert à l'aide d'un nombre fini d'hypersphères de rayon ε . Par exemple il est impossible de trouver un système, constitué par un nombre fini de fonctions continues, qui présente le caractère suivant : toute fonction continue, dont la plus grande valeur absolue est inférieure à 1, est approchée à $1/10$ près par un élément au moins de ce système. Un espace qui n'est pas compact a une topologie relativement compliquée.

Nous nommerons *complètement continue* une transformation continue $\mathcal{F}(x)$ qui transformera tout ensemble borné en ensemble compact. Des critères très aisés permettent d'affirmer qu'une transformation fonctionnelle est complètement continue : si \mathcal{E} est l'espace des fonctions continues, $\mathcal{F}(x)$ est complètement continue quand elle transforme des fonctions bornées en des fonctions possédant un même module de continuité ; toutes les transformations fonctionnelles forgées à l'aide d'intégrations sont complètement continues.

N. B. — Quand \mathcal{E} est euclidien, toute transformation continue est évidemment complètement continue.

2. — *La notion de degré topologique dans un espace euclidien ; son application à la discussion d'un système de n équations à n inconnues.* — Soit $y = \Phi(x)$ une transformation continue d'un espace euclidien \mathcal{E} en lui-même ; nous supposons $\Phi(x)$ définie sur un domaine D et sur sa frontière D' . Le nombre de fois que l'image $\Phi(D)$ de D recouvre un point b varie quand ce point se déplace ; mais comptons un recouvrement comme étant positif quand il conserve l'orientation de l'espace, comme étant négatif dans le cas contraire ; le nombre algébrique de fois que le point b est recouvert reste constant, tant que b ne franchit pas l'image $\Phi(D')$ de la frontière D' ; ce nombre algébrique est appelé¹ « degré topologique de la transformation $\Phi(x)$ au point b ». Ce degré topologique reste constant quand on modifie continûment $\Phi(x)$, D , b sans que b traverse $\Phi(D')$.

La notion de degré topologique permet de discuter le nombre

¹ La relation $\Phi(x) = b$ représente en fait un système de n équations à n inconnues.

des solutions qu'une équation $\Phi(x) = b$ possède à l'intérieur d'un domaine D . Énonçons par exemple le *théorème d'existence* suivant: Si l'on peut réduire continûment la transformation $y = \Phi(x)$ à l'identité, $y = x$, sans que l'image de D' vienne jamais recouvrir le point b , si b appartient à D , alors l'équation $\Phi(x) = b$ possède au moins une solution. En effet le degré en b de $\Phi(x)$ est celui de l'identité, en vertu de la propriété d'invariance du degré: c'est $+1$; le point b est donc recouvert par l'image $\Phi(D)$ de D . C.Q.F.D.

3. — *Impossibilité de définir d'une manière générale le degré d'une transformation continue opérant dans un espace abstrait.* — Il est facile de donner des exemples d'équations fonctionnelles pour lesquelles le théorème d'existence énoncé ci-dessus ne vaut plus:

Considérons l'espace \mathcal{E} des fonctions continues d'une variable s qui varie de 0 à 1. Evisageons dans \mathcal{E} le domaine fonctionnel D des fonctions $x(s)$ telles que $0 < x(s) < 1$. Soit $\varphi[x]$ une fonction continue de x , dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, et qui vaut 0 et 1 en même temps que x . Nommons $\Phi(x)$ la transformation fonctionnelle qui associe à $x(s)$ la fonction $\varphi[x(s)]$. Soit un paramètre k variant de 0 à 1; la transformation $k\Phi(x) + (1 - k)x$ dépend continûment de k ; elle coïncide avec l'identité pour $k = 0$, avec Φ pour $k = 1$; elle transforme tout point de la frontière D' de D en point de D' . Les hypothèses du théorème d'existence sont vérifiées, à cela près que \mathcal{E} n'est pas euclidien. Or l'équation $\varphi[x(s)] = b(s)$, où b est une fonction continue comprise entre 0 et 1, n'admet en général aucune solution continue $x(s)$, si $\varphi[x]$ n'est pas croissant.

La notion de degré topologique ne peut donc pas être généralisée à une transformation quelconque d'un espace abstrait.

4. — *Un type de transformations des espaces de Banach qui possèdent un degré topologique.* — Considérons tout d'abord une transformation « dégénérée », c'est-à-dire du type suivant: $y = x + \mathcal{F}_m(x)$, toutes les valeurs prises par $\mathcal{F}_m(x)$ appartenant à un sous-ensemble linéaire de \mathcal{E} , \mathcal{E}_m , qui a m dimensions. Cette transformation dégénérée laisse globalement invariant chaque

hyperplan parallèle à \mathcal{E}_m . Il est bien naturel de définir son degré topologique en un point b comme étant son degré quand on la considère dans l'hyperplan parallèle à \mathcal{E}_m qui passe par b . On légitime aisément cette définition en prouvant que ce degré reste le même quand on substitue à \mathcal{E}_m un hyperplan \mathcal{E}_n , à nombre plus grand de dimensions, qui contient \mathcal{E}_m . Le degré en un point b d'une transformation dégénérée, envisagée sur un domaine D , reste constant quand on modifie continûment b , D et cette transformation sans que b atteigne l'image de la frontière D' .

Considérons maintenant une transformation qui soit à ε près une transformation dégénérée, quel que soit ε ; il est légitime de nommer degré de cette transformation les degrés (égaux à partir d'un certain rang) de ces transformations dégénérées qui l'approchent. *Les transformations en question sont les transformations $y = x + \mathcal{F}(x)$, où $\mathcal{F}(x)$ est complètement continue.* En effet l'ensemble des valeurs prises par $\mathcal{F}(x)$ appartient à m sphères de rayon ε ; on peut donc approcher, à ε près, $\mathcal{F}(x)$ par une transformation $\mathcal{F}_m(x)$ dont toutes les valeurs appartiennent à l'hyperplan que déterminent les centres de ces sphères.

5. — *Propriétés d'un certain type d'équations fonctionnelles.* — Soit à étudier les points d'un domaine D qui satisfont à une équation du type

$$x + \mathcal{F}(x) = 0 .$$

Supposons qu'on sache réduire continûment cette équation à une équation simple, sans qu'aucune de ses solutions atteigne la frontière D' ; on effectue pratiquement cette réduction en introduisant un paramètre k ($0 \leq k \leq 1$); l'équation s'écrit

$$x + \mathcal{F}(x, k) = 0 ;$$

pour $k = 1$ on a l'équation proposée, pour $k = 0$ on a une équation simple. Le degré topologique au point $y = 0$ de la transformation $y = x + \mathcal{F}(x)$ est alors égal à celui de la transformation $y = x + \mathcal{F}(x, 0)$; on le connaît. S'il diffère de zéro l'équation

proposée possède *au moins une solution*. C'est le cas, par exemple, si $\mathcal{F}(x, 0) \equiv 0$ et si D contient le point $y = 0$.

On peut compléter ce théorème d'existence: la solution dont l'existence est assurée peut être rattachée à la solution $x = 0$, $k = 0$ par un *continu* de solutions de l'équation $x + \mathcal{F}(x, k) = 0$.

Envisageons d'autre part la transformation $y = x + \mathcal{F}(x)$ au voisinage des points où $x + \mathcal{F}(x) = 0$; l'étude locale de cette transformation en ces points se fait à l'aide de l'équation aux variations de l'équation proposée; dans certains cas on arrive à démontrer que tous les recouvrements du point $y = 0$ sont positifs; si en outre le degré de la transformation $x + \mathcal{F}(x)$ au point 0 est $+1$, un seul recouvrement est possible; on peut ainsi, dans ces circonstances favorables, établir que la solution de l'équation proposée est *unique*.

6. — *Conclusion*. — Quand D est une très grande sphère notre théorème d'existence revêt la forme suivante: Pour pouvoir affirmer que l'équation $x + \mathcal{F}(x) = 0$ est résoluble, il suffit de démontrer qu'elle ne présente pas de solution *arbitrairement grande* quand on la réduit continûment à une équation telle que $x = 0$. Démontrer qu'une équation fonctionnelle a des solutions revient donc à résoudre le problème suivant: assigner des majorantes aux solutions qu'elle possède éventuellement. Il serait d'ailleurs inimaginable qu'on puisse résoudre une équation par un procédé qui ne fournisse pas de renseignement sur l'ordre de grandeur des inconnues. Pour nous, résoudre une équation, c'est majorer les inconnues et préciser leur allure le plus possible; ce n'est pas en construire, par des développements compliqués, une solution dont l'emploi pratique sera presque toujours impossible.

On peut se permettre de considérer ce théorème d'existence comme étant une généralisation au cas non linéaire de l'alternative de Fredholm: soit une équation de Fredholm $x + \mathcal{L}(x) = b$ (où $\mathcal{L}(x) = \int K(s, s') x(s') ds'$ est complètement continue); cette équation possède sûrement une solution, sauf si l'équation $x + \mathcal{L}(x) = 0$ en possède une; or ce cas est justement celui où l'équation proposée admettrait des solutions *arbitrairement grandes*.

II. — EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE
ET DU TYPE ELLIPTIQUE.

7. — *Application de la théorie des équations fonctionnelles au problème de Dirichlet non linéaire.* — Nous allons étudier le problème de Dirichlet que voici: définir dans un domaine à deux dimensions Δ une solution d'une équation du type elliptique

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\left(4f' \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) f' \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - f'' \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) > 0\right)$$

qui prenne sur la frontière Δ' de Δ des valeurs données.

Nous simplifierons notablement notre exposé en supposant que l'équation est quasi-linéaire, c'est-à-dire du type

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D(\dots) . \quad (2)$$

Ce que nous dirons au cours de ce paragraphe, concernant l'équation (2) s'adapte à l'équation (1), au prix de quelques complications.

Nous supposons que A, B, C, D sont des fonctions continues et dérivables de leurs arguments, et que

$$A(\dots) \cdot C(\dots) - B(\dots)^2 > 0$$

quelles que soient les valeurs des arguments.

Etant donnée une fonction quelconque $z(x, y)$, envisageons la fonction $Z(x, y)$ qui prend sur Δ' les valeurs données et qui vérifie dans Δ l'équation

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2B(\dots) \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = D(\dots) . \quad (3)$$

Z est une fonctionnelle de z , $\mathcal{F}(z)$. Le problème de Dirichlet envisagé équivaut à l'équation fonctionnelle $z = \mathcal{F}(z)$.

Pour préciser la nature de la fonctionnelle $\mathcal{F}(z)$ les théorèmes les plus fins de la théorie des équations linéaires du type elliptique

vont nous être indispensables. Nous allons supposer que z appartient à l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes; le théorème de M. Schauder, qui fut l'objet de la conférence précédente, enseigne que Z appartient à l'espace des fonctions dont la dérivée seconde est hölderienne; Z est une fonction plus régulière que z ; ceci entraîne que $\mathcal{F}(z)$ est une transformation complètement continue. La théorie des équations fonctionnelles exposée ci-dessus s'applique donc :

Introduisons dans l'équation (2) un paramètre k qui varie de 0 à 1: pour $k = 1$ nous avons le problème posé; pour $k = 0$ nous avons, par exemple, le problème de Dirichlet posé pour l'équation de Laplace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Si l'on peut trouver une condition de Hölder que vérifient les dérivées premières de toutes les solutions de l'équation ou, plus simplement, si l'on parvient à majorer en valeur absolue les dérivées secondes de ces solutions, alors le problème envisagé possède une solution au moins.

Résoudre le problème de Dirichlet, posé pour une équation du second ordre et du type elliptique, c'est donc majorer sa solution, ses dérivées premières et ses dérivées secondes; c'est les majorer avec le maximum de précision et d'élégance.

8. — *Résolution de l'équation quasi-linéaire sans second membre.* — On connaît un cas important où cette majoration de l'inconnue est possible: le problème de Dirichlet relatif à un domaine convexe Δ , quand l'équation est l'équation quasi-linéaire sans second membre

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$(AC - B^2 > 0) .$$

Tous les points de la surface inconnue $z(x, y)$ sont hyperboliques; cette surface ne peut contenir aucun contour fermé plan; chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux courbes (au moins), qui aboutissent au contour donné, par lequel la

surface est limitée. Ces plans rencontrent donc ce contour en quatre points au moins. Puisque ce contour a une projection convexe Δ' et puisqu'on le suppose régulier, la plus grande pente des plans qui le rencontrent en quatre points a une borne supérieure finie. Cette borne limite supérieurement $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$. Voici donc majorés $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Malheureusement la majoration des dérivées secondes est à l'heure actuelle extrêmement compliquée. On étudie d'abord une certaine fonction ω , quadratique par rapport à ces dérivées secondes et dont l'expression est loin d'être simple. Supposons que ω atteigne son maximum en un point intérieur à Δ ; on a en ce point $d\omega = 0, d^2\omega \leq 0$; ces relations, combinées avec les limitations de $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, avec l'équation (4) et avec les diverses dérivées des deux premiers ordres de cette équation (4), permettent, grâce à un choix très adroit de ω , de majorer le maximum de cette quantité. Majorer les dérivées secondes revient donc à les majorer le long du contour. De nouveaux changements d'inconnue très habiles ramènent ce problème à celui que nous avons traité ci-dessus: majorer la plus grande pente d'une surface dont le contour est donné et dont tous les points sont hyperboliques.

Remarquons que parmi les équations du type (4) se trouve celle des surfaces minima:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

9. — *Conclusion.* — M. S. BERNSTEIN a traité divers autres cas spéciaux: celui des surfaces dont la courbure moyenne est constante, dont la courbure totale est constante, ...

M. H. WEYL a amorcé celui de la surface convexe dont le ds^2 est donné. Je ne les exposerai pas.

L'exemple du problème de Plateau montre bien que les problèmes de Dirichlet qu'envisage M. S. Bernstein ont pour inconnue non pas une fonction $z(x, y)$, mais une surface qui n'est pas en général représentée par une fonction de ce type. La

Physique mathématique fournit d'innombrables systèmes différentiels ou de Pfaff dont il est vraisemblablement aisé de prouver l'équivalence avec une équation fonctionnelle du type $x = \mathcal{F}(x)$: les intégrer, c'est savoir majorer leurs solutions; or nous ne disposons à l'heure actuelle d'aucune méthode générale qui puisse diriger nos calculs. Forger une telle méthode, tel est le problème fondamental qui se pose. Nous possédons quelques inégalités diverses; je veux en citer une, particulièrement élégante, due à M. T. CARLEMAN (*Math. Zeitschrift*, 1921, t. 9, p. 154-160), RADÒ et BECKENBACH (*Trans. of the Amer. Math. Society*, t. 35, 1933): Si S est l'aire d'une surface (inconnue) dont tous les points sont hyperboliques et qui passe par un contour (donné) de longueur L, alors $S < \frac{L^2}{4\pi}$. Sans doute la théorie des fonctions analytiques, qui est si riche en inégalités, nous sera-t-elle un exemple très utile: le livre que M. Radò a consacré au problème de Plateau (*On the Problem of Plateau, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin, 1933) montre avec quel bonheur les idées de cette théorie ont déjà été appliquées à l'étude des surfaces minima.

III. — LES ÉQUATIONS DE NAVIER.

10. — *Régimes permanents.* — Les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier, qui constituent un système non linéaire du second ordre; les variables indépendantes, qui s'imposent, sont les coordonnées d'espace et de temps: l'inconnue est la vitesse; c'est un vecteur de divergence nulle.

Étudions d'abord un régime permanent; le problème qui se pose est un problème de Dirichlet dans un cas analogue au type elliptique. M. Odqvist l'a ramené à un système d'équations intégrales; celles-ci constituent une équation fonctionnelle du type $x = \mathcal{F}(x)$. La première quantité que l'on majore est une grandeur physique: l'énergie dissipée par unité de temps. On parvient à la limiter en utilisant deux expressions qu'elle revêt: la première est une intégrale de volume qui exprime l'intensité du frottement visqueux interne; la deuxième est une intégrale

de surface qui mesure la quantité d'énergie fournie au système. La majoration de l'énergie dissipée effectuée, on majore aisément les diverses inconnues, et ceci résout le problème.

11. — *Mouvements non permanents; solutions turbulentes.* — Etudions maintenant le mouvement qui correspond à un champ de vitesses initiales donné; le problème est d'un type analogue au type parabolique; simplifions la question en admettant que le liquide emplit tout l'espace. L'énergie cinétique décroît; la quantité d'énergie dissipée est au plus égale à l'énergie cinétique initiale; ces deux inégalités, qui résultent des équations de Navier, constituent deux premières majorations fondamentales.

Si le mouvement est plan, c'est-à-dire si l'on réduit à deux le nombre de dimensions de l'espace, on peut parvenir à combiner ces inégalités avec les équations de Navier de manière à obtenir une série d'inégalités de plus en plus précises; il en résulte l'existence d'une solution régulière définie de l'instant initial $t = 0$ à $t = +\infty$.

Mais il en va bien autrement dans l'espace à trois dimensions. Les inégalités énergétiques ne semblent pas entraîner que le maximum de la vitesse reste borné, que le mouvement reste régulier; on doute qu'il soit possible d'établir un théorème d'existence global, c'est-à-dire concernant l'intervalle $0 \leq t < +\infty$. Cependant il est bien vraisemblable qu'on peut régulariser le mouvement en se contentant de renforcer les termes de viscosité quand des irrégularités tendent à se former; les équations de Navier, très peu modifiées, possèdent une solution définie de l'instant initial à $t = +\infty$. Pour examiner comment se comporte cette solution régulière, quand la modification apportée aux équations de Navier tend vers 0, il est nécessaire d'utiliser la théorie des fonctions mesurables: Le champ des vitesses tend vers une ou plusieurs limites, définies par des fonctions de carrés sommables, qu'on sait seulement être mesurables; ces fonctions possèdent des dérivées premières en un sens généralisé; elles vérifient les relations intégrales de M. Oseen. Ces relations intégrales équivalent en pratique aux équations de Navier; mais elles ont l'avantage sur ces dernières de ne pas contenir celles des dérivées des

inconnues qui n'ont pas de raison physique d'exister ; il se trouve que ce sont les dérivées dont on ne réussit pas à établir l'existence.

Nommons un tel champ de vitesses : « solution turbulente des équations de Navier ». Une solution turbulente a la structure suivante : il existe sur l'axe des temps une série d'intervalles de régularité, durant lesquels cette solution constitue une solution régulière des équations de Navier, indéfiniment dérivable ; l'ensemble complémentaire de l'axe des temps, qui constitue l'ensemble des irrégularités, est de mesure nulle ; à ces époques d'irrégularités le champ des vitesses vérifie seulement une condition de continuité très large.

La théorie des équations aux dérivées partielles semble ainsi être appelée à devenir un champ d'applications de la *théorie des fonctions réelles*.

HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIE

Chapitre I.

Tout ce que l'on sait actuellement sur le sujet que traite le premier chapitre est contenu dans les deux articles suivants :

LERAY-SCHAUDER, *Annales de l'Ecole normale*, t. 51, 1934, p. 45-63 (ch. I, II, III).

LERAY, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 200, 25 mars 1935, p. 1082.

Le premier théorème d'existence qui a réussi à résoudre une équation fonctionnelle pouvant admettre plusieurs solutions est celui « du point fixe » :

BIRKHOFF et KELLOG, *Transactions of the Amer. Math. Society*, t. 23 (1922).

SCHAUDER, *Studia mathematica*, t. 2, 1930, p. 170-179 (Satz II).

Ce théorème du point fixe n'est qu'un corollaire du théorème d'existence qu'expose le chapitre I de cette conférence.

J'ai signalé le premier que la démonstration d'un théorème d'existence pouvait être ramenée à la majoration de l'inconnue :

LERAY, Thèse, *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, chap. I (p. 1-20).

M. SCHAUDER, le premier, découvrit que des théorèmes de Topologie combinatoire valent encore dans les espaces de Banach, quand on prend la précaution essentielle de substituer à la notion de transformation continue quelconque celle de transformation du type $x + \mathcal{F}(x)$ (où $\mathcal{F}(x)$ est complètement continue).

SCHAUDER, *Studia mathematica*, Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, t. 1, 1929 (p. 123-139).

Math. Annalen, t. 106, 1932 (p. 661-721).

La notion de degré topologique est due à

BROUWER, *Math. Annalen*, t. 71, 1912 (p. 97-106).

Mais cet auteur considère des transformations opérant sur des variétés fermées à n dimensions; l'emploi que, dans notre travail commun, M. Schauder et moi avons fait de cette notion, suppose essentiellement que la transformation envisagée est définie sur l'ensemble de fermeture d'un ensemble ouvert.

Chapitre II.

Les travaux fondamentaux et classiques sur les problèmes de Dirichlet non linéaires sont ceux de

E. PICARD, voir par exemple ses « Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles », rédigées par M. Brelot, *Cahiers scientifiques de M. Julia*, Gauthier-Villars, 1930.

S. BERNSTEIN, *Math. Annalen*, t. 69, 1910, p. 82-136. — *Annales de l'École normale*, t. 27, 1910 (p. 233-256); t. 29, 1912, (p. 431-485).

M. GIRAUD a publié ces dernières années dans les *Annales de l'École normale*, dans les *Comptes rendus de l'Académie* et dans les autres périodiques français, de nombreux et importants mémoires qui prolongent les recherches de MM. Picard et Bernstein.

MM. PICARD, BERNSTEIN et GIRAUD obtiennent leurs théorèmes d'existence par la méthode des approximations successives.

M. SCHAUDER, en s'appuyant sur des théorèmes de Topologie généralisés aux espaces abstraits, a établi des résultats que ne peut atteindre la méthode des approximations successives:

SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, t. 26, 1927. — *Studia mathematica*, t. 1, 1929. — *Math. Annalen*, t. 106, 1932 (p. 661-721). — *Comptes rendus de l'Académie*, t. 199, 26 déc. 1934.

L'affirmation du § 7, « résoudre le problème de Dirichlet, c'est savoir majorer l'inconnue », se trouve dans le travail déjà cité:

LERAY-SCHAUDER, *Annales de l'École normale*, t. 51, 1934 (chap. IV et V).

Cette affirmation, qui s'appuie sur notre théorie des équations fonctionnelles, est une simplification notable des théorèmes dont M. S. Bernstein déduit ses théorèmes d'existence: cet auteur est conduit par ses méthodes à se restreindre aux cas où l'unicité de la solution est assurée; il fait des hypothèses superflues; par exemple, quand il résout l'équation quasi-linéaire sans second membre (4), il se trouve contraint à se limiter au cas où A, B, C dépendent de $x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ et sont indépendants de z .

Les majorations du § 8 se trouvent en principe dans les pages 119-124 du travail déjà cité:

S. BERNSTEIN, *Math. Annalen*, t. 69, 1910.

La majoration de la plus grande pente du plan tangent a été reprise par:
T. RADÒ, *Acta litt. ac scient.*, Szeged, t. 4, 1924-1936.
VON NEUMANN, *Abhandlungen des math. Seminars*, Hambourg, t. 8, 1931.

M. Schauder a repris la majoration des dérivées secondes en mettant bien en évidence que les six pages citées constituent la partie essentielle de la résolution de l'équation quasi-linéaire sans second membre:

SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, t. 37, 1933, p. 623-634.

Voir, d'autre part, concernant les majorations des solutions d'équations du second ordre et du type elliptique:

H. LEWY, *Trans. of the American Math. Society*, t. 37, 1935.

Chapitre III.

LERAY, Thèse, *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, p. 1-82. — *Acta mathematica*, t. 63, p. 193-248 (1934). — *Journal de Mathématiques*, t. 13, 1934, p. 331-418. — *Comptes rendus de l'Académie*, t. 194, 30 mai 1932, p. 1893.

Ces quatre articles utilisent les travaux antérieurs de MM. Oseen et Odqvist:

OSEEN, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927. — *Acta mathematica*, t. 34, 1911.
ODQVIST, *Math. Zeitschrift*, t. 32, 1930.

CHRONIQUE

Le Jubilé de M. Jacques Hadamard.

La cérémonie du Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard, Membre de l'Institut, a eu lieu au Collège de France, le mardi 7 janvier 1936, sous la présidence de M. Mario ROUSTAN, Ministre de l'Education nationale et de M. FABRY, Ministre de la Guerre, devant une nombreuse assistance composée d'anciens élèves, d'amis, de collègues et de savants français et étrangers.

Des discours furent prononcés en éloge du grand savant par MM. BÉDIER, Administrateur du Collège de France, LEBESGUE, Professeur au Collège de France, le Général HACHETTE, commandant l'Ecole Polytechnique, MM. GUILLET, Directeur de l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, Emile PICARD, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, VESSIOT, au nom de l'Association des