Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE

Autor: Cartan, Elie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27310

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE[1]

LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE[2]

PAR

Elie CARTAN, Membre de l'Institut (Paris).

I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES FINIS ET CONTINUS.

La topologie des groupes n'a fait l'objet de recherches suivies que depuis une dizaine d'années. Je m'occuperai presque exclusivement dans cette Conférence des groupes finis et continus de Lie. Les travaux déjà anciens sur la structure infinitésimale de ces groupes fournissent presque tous les éléments nécessaires à l'étude de leurs propriétés topologiques en grand; réciproquement cette étude éclaire d'un jour nouveau certains théorèmes de nature purement algébrique relatifs à la structure infinitésimale des groupes et à leurs représentations linéaires: dans cette voie, c'est M. Hermann WEYL qui a été l'initiateur [4][3].

Je désirerais, avant d'entrer dans le vif du sujet, dire quelques mots des groupes finis et continus les plus généraux et de ce

[1] Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut. La série comprenait en outre une conférence de M. A. WEIL, Maître de conférences à l'Université de Strasbourg, intitulée: La mesure invariante dans les espaces homogènes clos; elle fera l'objet d'un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

[2] Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

[3] Les nombres entre crochets réfèrent aux ouvrages cités dans la bibliographie.

qu'on sait de leurs propriétés topologiques. Un tel groupe, d'ordre r, peut être défini [**7**, **16**] au moyen d'une variété topologique (au sens de Hausdorff) à r dimensions, dont chaque point représente un élément du groupe; à l'intérieur de cette variété on a défini une opération (multiplication) faisant correspondre à deux points ou éléments quelconques a et b rangés dans un certain ordre un troisième point $c = ab$, cette opération jouissant des propriétés suivantes:

1° *Elle est associative:* $(ab)\,c = a\,(bc)$;

2° *Elle admet un module ou élément-unité* i *tel que* $ia = ai$;

3° *Chaque élément* a *admet un inverse* a^{-1} *caractérisé par* $aa^{-1} = a^{-1}a = i$;

4° *L'inverse* a^{-1} *de* a *dépend d'une manière continue de* a *et le produit* ab *dépend d'une manière continue de l'ensemble des deux points* a *et* b.

Le groupe fini et continu est un groupe de Lie s'il est possible de choisir dans la variété des coordonnées telles que les fonctions définissant la loi de multiplication ou de composition soient analytiques; il suffit du reste que, pour un choix convenable des coordonnées, ces fonctions soient dérivables jusqu'à un certain ordre. La question de savoir si tout groupe fini et continu est un groupe de Lie n'est pas tranchée; on sait cependant que les groupes d'ordre 1 et 2, ainsi que les groupes compacts ou clos sont des groupes de Lie: ce dernier résultat est dû, comme on sait, à M. J. von Neumann.

La variété d'un groupe fini et continu jouit de deux propriétés topologiques simples:

1° *Elle est orientable;*

2° *Son groupe fondamental, ou groupe de Poincaré, est abélien.*

La première propriété est évidente, car on obtient une orientation cohérente des différents voisinages de la variété en orientant d'une certaine manière un voisinage V_0 de l'élément unité i et en conférant au voisinage V de l'élément a qui se déduit de V_0 par la transformation $x' = ax$ l'orientation induite par cette transformation.

La seconde propriété est plus cachée. Tout groupe fini et

continu g admet, d'après O. Schreier [8], un groupe de recouvrement simplement connexe G. Les éléments de G qui correspondent à l'élément-unité i de g forment un sous-groupe *proprement discontinu* γ de G. Soit α un élément de γ, x un élément quelconque de G; l'élément $x\alpha\, x^{-1}$ de G, correspondant à l'élément unité de g, appartient à γ; il se réduit à α pour $x = i$ et il varie d'une manière continue avec x: il est donc toujours égal à α. L'élément α appartenant ainsi au centre de G, le groupe γ est abélien; or il est isomorphe au groupe de Poincaré de g.

Aux deux propriétés précédentes on en peut ajouter une troisième lorsque le groupe est clos:

3° *La caractéristique d'Euler d'un groupe fini et continu clos est nulle.*

Cela résulte immédiatement de l'existence, pour la variété, de déformations sans point fixe, par exemple celles qui sont définies par les équations $x' = ax$ (groupe des paramètres).

Les propriétés précédentes ne sont pas caractéristiques des variétés de groupes. Par exemple l'espace sphérique à $2n + 1 \geqq 5$ dimensions est orientable, simplement connexe et de caractéristique nulle; si c'était l'espace d'un groupe, ce groupe serait clos, donc serait un groupe de Lie; d'après les théorèmes que nous verrons un peu plus loin, ce groupe serait semi-simple et son troisième nombre de Betti serait positif, alors que celui de l'espace donné est nul.

II. — Les groupes de Lie.

Arrivons aux groupes de Lie. Rappelons qu'un tel groupe, d'ordre r, admet des transformations infinitésimales dont l'ensemble forme un anneau avec r éléments de base $X_1, X_2, \ldots, X_r$; toute transformation infinitésimale est de la forme $e^i X_i$ [1] avec r coefficients réels arbitraires e^i. Rappelons aussi la notion du crochet (XY) de deux transformations infinitésimales, celle des *constantes de structure* c_{ij}^k qui entrent

[1] Nous supprimons, suivant l'usage, le signe de sommation devant un indice répété deux fois.

dans les *relations de structure* de Lie

$$(X_i X_j) = c_{ij}^k X_k \,, \tag{1}$$

enfin les relations algébriques [**1**]

$$\left\{ \begin{array}{c} c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 \,, \\ c_{ij}^m c_{mk}^h + c_{jk}^m c_{mi}^h + c_{ki}^m c_{mj}^h = 0 \,. \end{array} \right. \tag{2}$$

Deux groupes d'ordre r sont *infinitésimalement isomorphes* si, par un choix convenable de leurs bases infinitésimales, ils ont les mêmes constantes de structure; ils ne sont pas nécessairement isomorphes « en grand », mais leurs groupes simplement connexes de recouvrement sont isomorphes.

Dans la théorie de la structure des groupes, l' « équation de Killing » joue un rôle important: c'est l'équation

$$\left\| e^k c_{ki}^j - \delta_i^j r \right\| = 0 \qquad (\delta_i^j = 1 \text{ si } i = j \,, \quad 0 \text{ si } i \neq j) \,, \tag{3}$$

qui indique, une transformation infinitésimale $e^i X_i$ étant donnée, l'existence d'une transformation infinitésimale $\eta^h X_k$ telle qu'on ait

$$(e^i X_i \,, \quad \eta^j X_j) = r \eta^k X_k \,.$$

La somme des carrés des racines de l'équation de Killing est une forme quadratique

$$\varphi(e) \equiv e^i e^j c_{ih}^h c_{jh}^k \tag{4}$$

qui joue un rôle fondamental [**2**].

Cette forme $\varphi(e)$, comme du reste les coefficients des différentes puissances de r dans l'équation de Killing, est un invariant du *groupe adjoint linéaire* Γ. C'est celui qui indique comment les transformations infinitésimales du groupe donné G sont transformées par les éléments du groupe: à l'élément a correspond la transformation linéaire en $e^1, e^2, \ldots, e^r$ qui fait passer de $e^i X_i$ à $a(e^i X_i) a^{-1}$. Le groupe Γ est isomorphe, holoédrique ou mériédrique, de G; l'ordre de Γ peut être inférieur à celui de G; il ne lui est égal que si le centre de G est discontinu, G étant

alors un groupe de recouvrement de Γ. Si G est clos, Γ l'est aussi, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Rappelons enfin qu'à la transformation infinitésimale X_i de G correspond dans Γ la transformation infinitésimale

$$E_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} . \tag{5}$$

III. — Les groupes clos.

Dans l'étude topologique des groupes de Lie, les groupes clos jouent un rôle essentiel et c'est par eux que nous allons commencer. On a facilement des renseignements importants sur leur structure. En effet le groupe adjoint Γ d'un groupe clos G est également clos; d'après un théorème de M. H. Weyl [**4**], il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qu'on peut supposer ramenée à $(e^1)^2 + (e^2)^2 + \ldots + (e^r)^2$, de sorte que Γ est un groupe orthogonal. De là on déduit que les constantes de structure c_{ij}^k, antisymétriques par rapport à leurs deux premiers et par rapport à leurs deux derniers indices, ne changent pas par une permutation circulaire et changent de signe par une permutation impaire de leurs indices.

Si nous regardons les e^i comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à r dimensions, Γ est un groupe de rotations ou de symétries autour de l'origine O. Par suite s'il laisse invariante une variété linéaire à p dimensions passant par O, il laissera invariante la variété à $r - p$ dimensions totalement perpendiculaire à la première. Du reste dire qu'une variété linéaire est invariante par Γ, c'est dire que les transformations infinitésimales $e^i X_i$ dont les points-images $(e^1, \ldots, e^r)$ sont dans la variété engendrent un *sous-groupe invariant* de G. Par un choix convenable des axes, c'est-à-dire de la base infinitésimale de G, on arrive, en utilisant les remarques précédentes, à partager les r variables e^i en h séries de $p_1, p_2, \ldots, p_h$ variables, ou encore les r transformations infinitésimales de base en h séries correspondantes, de manière

1° *que les transformations d'une même série engendrent un sous-groupe invariant de* G;

2° *que ces sous-groupes soient échangeables entre eux;*

3° *qu'aucun d'eux n'admette un sous-groupe invariant d'ordre plus petit.*

Si l'une des séries ne contient qu'un élément, il lui correspond un sous-groupe invariant abélien clos. Si l'une des séries contient plusieurs éléments, il lui correspond un sous-groupe invariant *simple*, c'est-à-dire n'admettant aucun sous-groupe invariant continu. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante [**14, 16**]:

Tout groupe clos est abélien ou infinitésimalement isomorphe au produit direct d'un ou plusieurs groupes simples et éventuellement d'un groupe abélien. Cela veut dire, dans le second cas, que le produit direct en question est un groupe de recouvrement du groupe donné.

IV. — Les groupes simples clos.

Nous sommes ainsi conduits naturellement à l'étude des groupes simples clos. Le groupe adjoint Γ d'un tel groupe G ne peut laisser invariante qu'une seule forme quadratique définie (à un facteur constant près), sans quoi il laisserait invariante au moins une variété linéaire réelle, qui correspondrait à un sous-groupe invariant continu. Il en résulte que *la forme quadratique* $\varphi(e)$ *d'un groupe simple clos est définie*; on voit du reste facilement qu'elle est négative. La réciproque est fondamentale: *tout groupe dont la forme* $\varphi(e)$ *est définie est clos.*

Remarquons en passant ce fait qu'une propriété du groupe infinitésimal entraîne ici une propriété topologique du groupe global. Il n'en est pas toujours ainsi; deux groupes abéliens de même ordre, caractérisés par les mêmes constantes de structure, toutes nulles, peuvent être l'un clos, l'autre ouvert.

Il nous faut ici rappeler, avant de donner la démonstration, un théorème classique [**2**] d'après lequel tout groupe dont la forme $\varphi(e)$ est de discriminant non nul est *semi-simple*, c'est-à-dire est simple ou est infinitésimalement le produit direct de plusieurs groupes simples. Il suffit donc de démontrer la réciproque énoncée pour les groupes simples.

La démonstration se fait en deux temps: on démontre d'abord

que le groupe adjoint linéaire Γ est clos; on démontre ensuite que le groupe donné lui-même G est clos.

Le groupe Γ est du même ordre que G. Les coefficients de ses substitutions linéaires sont *bornés*, le groupe Γ étant orthogonal; mais cela *ne suffit pas* pour affirmer que Γ est clos. Passons par l'intermédiaire du groupe Γ' de toutes les automorphies, internes et externes, du groupe infinitésimal: c'est un groupe *algébrique* en ce sens que les coefficients de ses substitutions linéaires sont caractérisés par les relations algébriques qui expriment l'invariance des relations de structure; étant algébrique et borné, le groupe Γ' est clos. Par suite Γ, qui est la partie connexe de Γ' contenant la substitution identique, est aussi clos [**16**].

Le théorème en vue sera prouvé si G recouvre Γ un nombre fini de fois, ou encore si le groupe simplement connexe de recouvrement de Γ recouvre Γ un nombre fini de fois. C'est M. H. Weyl [**4**] qui a démontré le premier cette dernière propriété: il avait du reste en vue, plutôt qu'une propriété topologique de certains groupes, un moyen de démontrer par voie transcendante la complète réductibilité des représentations linéaires des groupes semi-simples, réductibilité qu'on n'était pas arrivé à prouver par voie algébrique.

Essayons de donner une idée de la démonstration [**10, 11**]. Le groupe adjoint clos Γ admet une infinité de sous-groupes abéliens maximums, tous homologues entre eux et d'ordre l, rang du groupe donné. Une transformation infinitésimale générique de Γ est homologue à un nombre fini de transformations infinitésimales d'un quelconque γ de ces sous-groupes abéliens, qu'on peut supposer engendré par $X_1, X_2, \ldots, X_l$; on peut supposer que pour la transformation $e^i X_i$ de γ, la forme $\varphi(e)$ est réduite à $-[(e^1)^2 + \ldots + (e^l)^2]$. Représentons la transformation $e^i X_i$ de γ, dans l'espace euclidien à l dimensions, par le vecteur d'origine O et de composantes e^i. Il existe dans cet espace un angle l-èdre Π de sommet O tel que toute transformation infinitésimale générique de Γ soit homologue à une transformation et une seule *intérieure* à Π. Mais il y a des transformations infinitésimales *singulières*, caractérisées par la propriété que l'équation de Killing admette plus de l racines nulles au lieu du nombre normal l: il y en a alors au moins $l + 2$, ces racines étant

deux à deux opposées. Ces transformations singulières sont homologues aux transformations portées sur les faces de Π. Elles dépendent seulement de $r - 3$ paramètres homogènes. Ajoutons que si l'on prend les symétriques de Π par rapport à ses différentes faces et ainsi de suite, on obtient une décomposition régulière de l'espace autour du point origine O.

Passons aux transformations finies de Γ; elles admettent des multiplicateurs de module 1, dont l sont égaux à 1, les autres étant deux à deux inverses. Toute transformation finie *générique* T (avec exactement l multiplicateurs égaux à 1) peut être engendrée par une transformation infinitésimale générique ayant une homologue à l'intérieur de Γ; T peut être représentée par un point déterminé intérieur à Π, les différentes transformations finies engendrées par une même transformation infinitésimale étant représentées par les points d'une demi-droite issue de O. Si l'on suit cette demi-droite à partir de O, il arrive un moment où on trouve une transformation finie singulière: le lieu des points ainsi obtenus est une portion d'hyperplan qui délimite, avec les faces de Π, un simplexe Σ; toute transformation finie non singulière de Γ a pour image un point *ou un nombre fini de points* intérieurs à Σ. Du reste si l'on prend les symétriques de Σ par rapport à ses $l+1$ faces et qu'on procède de même pour les nouveaux simplexes obtenus et ainsi de suite, on obtient un pavage régulier de l'espace, toute transformation finie non singulière de Γ ayant toujours le même nombre fini d'images à l'intérieur de chacun des simplexes obtenus.

Ce nombre fini est égal au nombre des sommets de Σ qui représentent la substitution identique de Γ. Nous allons voir que *c'est aussi le nombre de fois que Γ est recouvert par son groupe simplement connexe de recouvrement.*

Il sera commode d'employer un langage géométrique. La forme définie positive $-\varphi(e)$ permet d'introduire dans l'espace de Γ une métrique riemannienne invariante par Γ, qui se trouve être ainsi le plus grand groupe des déplacements de son espace, rendu riemannien. Les sous-groupes à un paramètre de Γ sont représentés par des géodésiques issues du point unité i; nous dirons qu'un arc de géodésique d'origine i est *régulier* si le sous-groupe correspondant est engendré par une transformation infinité-

simale non singulière et s'il n'y a aucun élément singulier sur cet arc. En suivant une géodésique non singulière à partir de i, on arrivera à un premier point singulier, qui n'est autre que le premier *point focal* de i sur la géodésique. Tous ces points focaux engendrent une variété à $r - 3$ dimensions, celle qui a pour image dans l'espace euclidien de γ la face de Σ opposée au sommet O. Si nous considérons maintenant dans l'espace de Γ un arc $\widehat{ab}$ ne contenant aucun point singulier et si nous nous donnons *l'un des arcs réguliers* de géodésique joignant i à a, on pourra suivre par continuité, de a en b, cet arc régulier. Tous les arcs réguliers ainsi obtenus seront représentés à l'intérieur de Σ par des segments de droites partant de O et aboutissant aux différents points de l'image de l'arc ab. Supposons l'arc ab fermé, partant de a et y revenant, *sans contenir aucun point singulier.* Si nous nous donnons l'arc régulier de géodésique joignant i à a et si nous le suivons par continuité, ou bien nous retrouverons le même arc en revenant au point de départ, ou bien nous en trouverons un autre. Dans le premier cas le cycle considéré est homotope à zéro; il suffit pour s'en convaincre d'effectuer une homothétie de centre i et de rapport k variant de 1 à 0, chaque point du contour se déplaçant sur l'arc régulier de géodésique qui le joint à i. Mais, dans le second cas, le cycle *n'est pas* homotope à zéro, car s'il l'était on pourrait opérer la réduction sans que le cycle rencontre jamais la variété à $r - 3$ dimensions des points singuliers; les arcs réguliers de géodésique joignant i aux points du contour varieraient d'une manière continue et l'arc régulier final joignant O à a serait toujours le même, c'est-à-dire différent de l'arc régulier initial joignant les mêmes points, ce qui est absurde. En particulier un cycle partant de i et y revenant aura pour image dans le simplexe Σ un chemin partant de O et aboutissant à un des sommets de Σ qui représentent la substitution identique; le cycle est homotope à zéro ou non suivant que ce sommet est confondu ou non avec O. On voit bien nettement ainsi qu'il y a autant de classes de cycles non homotopes entre eux qu'il y a dans Σ de sommets représentant la substitution identique. C'est ce que nous voulions démontrer.

Ajoutons un théorème important. Considérons le groupe G

simplement connexe de recouvrement de Γ. Toute transformation finie non singulière de G a pour image *un point et un seul* intérieur à Σ. Par suite toute variété fermée qui ne contient aucun élément singulier a pour image une variété fermée intérieure à (Σ). Chaque point de la variété donnée peut donc être joint au point unité *par un arc régulier de géodésique et un seul*; par suite cette variété est homotope à zéro. On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME. *Dans l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe, toute variété fermée qui ne contient aucun élément singulier est homotope à zéro.*

En particulier, la variété des éléments singuliers étant à $r - 3$ dimensions, toute variété fermée à deux dimensions peut être déformée de manière à ne plus contenir d'éléments singuliers, d'où le nouveau théorème:

THÉORÈME. *Dans l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe, toute variété fermée à deux dimensions est homotope à zéro.*

Les théorèmes précédents entraînent évidemment le suivant:

THÉORÈME. *Les deux premiers nombres de Betti d'un groupe simple clos, simplement connexe ou non, sont nuls.*

Tous ces théorèmes s'étendent aux groupes semi-simples clos, c'est-à-dire aux groupes dont la forme $\varphi(e)$ est définie; *tous ces groupes ont leurs deux premiers nombres de Betti nuls.* Il n'en est évidemment pas de même pour les groupes clos dont la forme $\varphi(e)$ n'est que semi-définie.

Revenons aux groupes simples. Le groupe de Poincaré du groupe adjoint Γ d'un groupe simple clos est isomorphe au groupe des déplacements, accompagnés ou non de symétries, qui, dans l'espace euclidien du sous-groupe abélien γ, laissent invariant le simplexe Σ et amènent successivement en coïncidence le sommet O avec les autres sommets homologues. Il y a, comme on sait, quatre grandes classes de groupes simples clos, chaque classe ayant un représentant linéaire bien connu, à savoir:

A. Le groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive à $l + 1$ variables;

B. Le groupe orthogonal réel à $2l + 1$ variables;

C. Le groupe linéaire complexe de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_{2l}\bar{x}_{2l}$ et de la forme quadratique extérieure $[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \ldots + [x_{2l-1} x_{2l}]$.

D. Le groupe orthogonal réel à $2l \geqq 6$ variables;

Le groupe de Poincaré du groupe adjoint est cyclique d'ordre $l + 1$ (classe A), cyclique d'ordre 2 (classes B et C), cyclique d'ordre 4 (classe D, l impair), non cyclique d'ordre 4 (classe D, l pair). Le groupe linéaire unitaire unimodulaire est simplement connexe, mais le groupe orthogonal ne l'est pas, étant recouvert deux fois par son groupe simplement connexe de recouvrement.

M. H. Weyl a montré *a priori*, par des considérations tirées de la théorie des équations intégrales, que tout groupe clos admet une infinité de représentations linéaires *fidèles*, c'est-à-dire telles qu'à deux éléments distincts du groupe correspondent deux substitutions linéaires distinctes.

V. — Les groupes simples ouverts.

J'ai beaucoup insisté sur les groupes clos. Comme nous allons le voir, ils contiennent la clef de presque toutes les propriétés topologiques des groupes de Lie ouverts. On a en effet le théorème général suivant:

Théorème. *L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe ouvert est le produit topologique d'un espace euclidien et éventuellement d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos.*

Nous allons commencer par démontrer ce théorème pour les groupes semi-simples ouverts. Il résultera du théorème suivant:

L'espace du groupe adjoint Γ *d'un groupe simple ouvert* G *est le produit topologique de l'espace d'un groupe linéaire clos et d'un espace euclidien.*

Il suffit pour passer de ce théorème au précédent de remarquer que le groupe simplement connexe de recouvrement d'un groupe linéaire clos est le produit direct d'un ou plusieurs groupes clos simplement connexes et, éventuellement, d'un groupe abélien

simplement connexe, c'est-à-dire d'un groupe de translations, dont la variété est un espace euclidien.

Le second théorème a l'avantage de permettre la détermination du groupe fondamental de Γ, qui est confondu avec celui d'un groupe linéaire clos, en particulier de son premier nombre de Betti.

Avant de donner des indications sur la démonstration du théorème énoncé, rappelons qu'il existe deux catégories de groupes simples [**3**]: il y a d'abord les groupes simples à r paramètres complexes, c'est-à-dire d'ordre $2r$ à notre point de vue; ce sont les seuls qui soient considérés dans ma Thèse; mais il y a aussi ce que j'ai appelé des *formes réelles* de ces premiers groupes: ce sont des groupes à r paramètres réels tels que le groupe simple à r paramètres complexes s'en déduise par le passage, en ce qui concerne les paramètres, du réel au complexe: cette phrase a un sens à cause de l'analyticité des fonctions qui définissent la loi de composition d'un groupe de Lie. J'ai déterminé toutes ces formes réelles en 1913. A cet égard on arrive à une constatation tout à fait remarquable, c'est qu'on peut déduire, par le passage du réel au complexe, tout groupe simple à paramètres complexes d'un groupe simple clos. M. H. Weyl a donné depuis [**4**] une démonstration de ce fait qui s'applique simultanément à tous les types de groupes simples à paramètres complexes.

Considérons d'abord un groupe simple G à r paramètres complexes; la forme $\varphi(e)$, considérée dans le domaine réel, est réductible à une somme de r carrés positifs et de r carrés négatifs. Toute forme réelle close de G est un sous-groupe de G auquel est attachée une *automorphie involutive* de G, celle qui fait passer d'un paramètre complexe de G au paramètre conjugué. L'espace de toutes ces automorphies involutives est un espace riemannien symétrique homéomorphe à l'espace euclidien; son groupe des déplacements est le groupe adjoint Γ de G. Par deux points il passe une géodésique et une seule; le produit des deux automorphies involutives associées à ces deux points est un déplacement (transvection) qui fait glisser cette géodésique sur elle-même. Cela posé tout déplacement est, d'une manière et d'une seule, le produit d'une rotation autour d'un point origine donné O, c'est-à-dire d'une transformation du groupe adjoint d'une des

formes réelles closes de G, par une transvection, celle qui amène O dans le point transformé de O par le déplacement considéré. Il résulte de là que *l'espace de* Γ *est le produit topologique de l'espace du groupe adjoint de la forme réelle close par l'espace euclidien à* r *dimensions. Le groupe adjoint* Γ *a donc le même groupe fondamental que le groupe adjoint de la forme réelle close correspondante.* Il résulte, en particulier, de là que *tout groupe simple à paramètres complexes admet des représentations linéaires fidèles.*

Passons maintenant à une forme réelle ouverte d'un groupe simple G à paramètres complexes. Là encore la théorie des espaces riemanniens symétriques, dont j'ai parlé dans ma conférence du Congrès de Zurich [**19**], éclaire les choses [**12**]. Dans l'espace $\mathcal{E}_G$ à r dimensions, que nous avons associé au groupe G, l'automorphie involutive de G qui provient du passage des paramètres de g d'une valeur complexe à la valeur conjuguée, définit une symétrie qui laisse fixes tous les points d'une certaine variété totalement géodésique $\mathcal{E}_g$. Cette variété $\mathcal{E}_g$, homéomorphe à l'espace euclidien, joue par rapport au groupe g le même rôle que l'espace $\mathcal{E}_G$ par rapport au groupe G; son groupe de déplacements est le groupe adjoint de g et chacune de ses transformations est d'une manière et d'une seule le produit d'une rotation autour d'un point fixe O de $\mathcal{E}_g$ par la transvection qui amène O dans le point transformé de O par le déplacement donné. Chaque rotation autour de O est d'autre part complètement caractérisée par le groupe linéaire qui transforme les vecteurs d'origine O. Il en résulte immédiatement le théorème à démontrer.

Ajoutons que si le groupe g est simple, le groupe linéaire clos des rotations est semi-simple ou est infinitésimalement le produit direct d'un groupe semi-simple et d'un groupe abélien *d'ordre* 1. Il en résulte le

THÉORÈME. *Le premier nombre de Betti de l'espace d'un groupe simple ouvert est égal à* 0 *ou à* 1.

Les groupes simples ouverts dont le groupe adjoint a son premier nombre de Betti égal à 1 jouent un rôle important dans certains problèmes de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes; ils interviennent [**23**] comme

groupes de transformations pseudo-conformes laissant invariant un domaine borné symétrique: cela veut dire un domaine admettant en lui-même une transformation pseudo-conforme involutive dont un point arbitrairement donné du domaine est un point invariant isolé.

Comme exemples de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est égal à 1, citons le groupe homographique réel d'une variable, le groupe linéaire complexe d'une forme d'Hermite indéfinie, le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réelle réductible à $p \geqq 2$ carrés positifs et 2 carrés négatifs. Comme exemple de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est nul, citons le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réductible à $p \geqq 3$ carrés positifs et $q \geqq 3$ carrés négatifs. Si l'un des entiers p et q est impair, le groupe fondamental du groupe adjoint est d'ordre 4; si p et q sont pairs tous deux, il est d'ordre 8. Enfin le groupe des déplacements de l'espace hyperbolique réel à $n \geqq 3$ dimensions admet un groupe fondamental d'ordre 2.

Ajoutons la remarque qu'*un groupe simple ouvert n'admet pas toujours de représentation linéaire fidèle;* il en est certainement ainsi si le premier nombre de Betti de son groupe adjoint est égal à 1, le premier nombre de Betti du groupe lui-même étant nul; exemple: le groupe simplement connexe de recouvrement du groupe homographique réel à une variable.

Si l'on passe maintenant d'un groupe simple ouvert à un groupe semi-simple ouvert, on voit que son premier nombre de Betti h_1 est au plus égal au nombre des groupes simples dont il est infinitésimalement le produit direct; quant au second nombre de Betti, on démontre facilement qu'il est égal à $\frac{h_1(h_1-1)}{2}$.

VI. — Les groupes de Lie simplement connexes et le troisième théorème fondamental de Lie.

Il nous reste maintenant à démontrer, pour les groupes de Lie simplement connexes les plus généraux, le théorème suivant, dont je rappelle l'énoncé.

L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe est le produit topologique d'espaces de groupes simples clos et d'un espace euclidien.

La démonstration que je vais indiquer de ce théorème est intimement liée à la démonstration d'un autre théorème dont je n'ai pas encore parlé, c'est la réciproque du troisième théorème fondamental de S. Lie. J'ai rappelé au début de cette conférence l'existence de relations algébriques (2) entre les constantes de structure d'un groupe de Lie quelconque. On connaît plusieurs démonstrations du fait qu'à tout choix de constantes satisfaisant à ces relations correspond un groupe, mais ces démonstrations ne prouvent l'existence que d'un groupe *local*, limité au voisinage de l'élément identique et c'est une question non encore résolue de savoir si un groupe fini et continu *local* peut être toujours prolongé en un véritable groupe fini et continu, défini *globalement*. J'ai indiqué [**17**] pour les groupes infinitésimaux de Lie, une démonstration faisant appel à un théorème d'E. E. Levi; mais la démonstration de ce dernier théorème est par elle-même assez compliquée et n'a du reste jamais été faite que dans le cas des groupes infinitésimaux à paramètres complexes[1]. Je vais indiquer une démonstration plus simple qui a cependant sur la précédente l'inconvénient de s'appuyer sur la propriété d'un groupe simple clos d'avoir ses deux premiers nombres de Betti nuls.

Remarquons d'abord que la première démonstration donnée par Lie lui-même de la réciproque de son troisième théorème fondamental est valable au point de vue *global* aussi bien que *local*. Elle s'applique lorsque le groupe infinitésimal est du même ordre que son groupe dérivé, ce qui revient à dire que le groupe n'admet aucun groupe continu abélien qui lui soit isomorphe (mériédrique ou holoédrique). Dans ce cas en effet on peut écrire *a priori* les transformations infinitésimales (5) du groupe adjoint par la seule connaissance des constantes de structure:

$$\mathrm{E}_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} \; ; \tag{5}$$

[1] M. J.-H.-C. Whitehead a obtenu récemment de ce théorème une élégante démonstration, non encore publiée, valable aussi bien dans le domaine réel que dans le domaine complexe.

or ces r transformations infinitésimales engendrent un groupe sous la seule condition que les c_{ik}^{h} satisfassent aux relations algébriques de Lie, et ces constantes sont les constantes de structure de ce groupe. On a ainsi un groupe infinitésimal de la structure donnée; mais comme ce groupe est linéaire, ses transformations opèrent sur un champ préexistant, à savoir l'espace euclidien à r dimensions, et, dans ce champ, on peut composer les transformations du groupe local de manière à engendrer un groupe global.

Cette conclusion s'applique en particulier à tous les groupes infinitésimaux semi-simples [1]; c'est pour cela que nous n'avons pas eu à nous poser la question d'existence des groupes globaux dans ce cas-là.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Tout groupe infinitésimal de Lie admet une représentation intégrale simplement connexe dont la variété est le produit topologique d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos et d'un espace euclidien.*

Ce théorème est vrai pour les groupes infinitésimaux semi-simples. Nous allons procéder par récurrence en démontrant le Lemme suivant.

LEMME. *Soit* G *un groupe infinitésimal d'ordre* r + n *admettant un sous-groupe invariant abélien* g *d'ordre* n. *Si le groupe infinitésimal* G/g *vérifie le théorème fondamental, il en est de même du groupe* G.

Supposons un instant ce lemme démontré. Si G n'est pas semi-simple, il admet un plus grand sous-groupe invariant intégrable G_1 [**2**]; le sous-groupe G_1 étant intégrable, cela signifie que si l'on forme ses groupes dérivés successifs G_2, G_3, ..., le dernier G_k est abélien [**1**]. D'autre part, d'après un théorème de Lie, tous ces groupes sont invariants dans G. Cela posé, l'application du Lemme au groupe G/G_2, qui admet G_1/G_2 comme sous-groupe invariant abélien, alors que le groupe simple G/G_1 satisfait au théorème fondamental, montre que G/G_2 satisfait

[1] Elle serait générale si l'on savait démontrer que tout groupe infinitésimal de Lie est isomorphe (holoédrique) d'un groupe linéaire.

aussi à ce théorème. On applique ensuite le Lemme de proche en proche aux groupes G/G_3, G/G_4, etc. jusqu'au groupe G lui-même.

Avant de nous occuper du Lemme, donnons quelques indications sur la démonstration de la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie. Si l'on se donne un système de constantes c_{ij}^k satisfaisant aux relations algébriques de Lie, on aura le groupe des paramètres d'un groupe de la structure donnée en construisant *dans une variété à* r *dimensions convenablement choisie*, *r* expressions de Pfaff $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r$ linéairement indépendantes et partout régulières satisfaisant aux *équations de Maurer-Cartan* [1]

$$(\omega^i)' = \frac{1}{2} c_{jk}^i [\omega^j \omega^k] \ . \tag{6}$$

Ces formes étant construites, on aura le groupe des paramètres cherché en intégrant les équations complètement intégrables

$$\omega^i(\xi' \, ; \, d\xi') = \omega^i(\xi \, ; \, d\xi) \ ,$$

les ξ étant les coordonnées d'un élément du groupe, les ξ' celles de l'élément transformé. *Si la variété choisie est simplement connexe*, cette intégration, *tant qu'elle pourra se poursuivre*, donnera pour les ξ' des fonctions uniformes des ξ, mais, pour être sûr qu'on ne sera jamais arrêté dans l'intégration, on sera obligé d'astreindre les formes ω_i à des conditions restrictives, par exemple que l'espace riemannien obtenu en introduisant dans la variété une forme différentielle quadratique définie positive $g_{ij}\omega^i\omega^j$ à coefficients g_{ij} constants, est *normal*[2] ou *complet*. La démonstration classique de la réciproque du troisième théorème fondamental revient, ce qui est facile [**6**], à trouver des formes ω^i satisfaisant aux équations de Maurer dans l'espace euclidien des paramètres canoniques; *mais ces formes cessent d'être linéairement indépendantes* quand on s'éloigne suffisamment de l'élément-unité.

Cela posé, venons au Lemme à démontrer. Soient X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) les transformations infinitésimales de base du

---

[1] Dans un groupe de paramètres ξ, les formes ω^i sont les paramètres de la transformation infinitésimale $a_\xi^{-1} a_{\xi+d\xi}$ [**16**].

[2] E. Cartan, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, 1928, p. 64-65.

sous-groupe invariant abélien g et soient $X_\alpha (\alpha = n + 1, \ldots, n + r)$, r autres transformations formant avec les n premières une base pour le groupe infinitésimal G. On a par hypothèse

$$(X_i X_j) = 0 , \qquad (X_i X_\alpha) = c_{i\alpha}^k X_k , \qquad (X_\alpha X_\beta) = c_{\alpha\beta}^\lambda X_\lambda + c_{\alpha\beta}^k X_k , \tag{7}$$

la sommation par rapport à l'indice latin k s'étendant aux valeurs 1, 2, ..., n, la sommation par rapport à l'indice grec λ s'étendant aux valeurs $n + 1, n + 2, \ldots, n + r$. Les équations de Maurer-Cartan prennent ici la forme

$$\left\{ \begin{aligned} (\omega^\alpha)' &= \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^\alpha [\omega^\lambda \omega^\mu] , \\ (\omega^i)' &= c_{k\alpha}^i [\omega^k \omega^\alpha] + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^i [\omega^\alpha \omega^\beta] . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Les premières équations (8) sont les équations de Maurer-Cartan du groupe G/g, qui, par hypothèse, satisfait au théorème fondamental; soit G′ le groupe simplement connexe correspondant. On prendra pour ω^α les formes correspondant à ce groupe, qui sont linéairement indépendantes et partout régulières dans l'espace E′ simplement connexe du groupe G′.

Reste à trouver les formes ω^i. Les $c_{k\alpha}^i$ sont les coefficients des substitutions linéaires infinitésimales

$$U_\alpha \equiv c_{k\alpha}^h u^k \frac{\partial f}{\partial u^h} ,$$

qui engendrent un groupe isomorphe de G′, comme le montrent les relations faciles à vérifier

$$(U_\alpha U_\beta) = c_{\alpha\beta}^\lambda U .$$

Soient

$$(u^i)' = A_k^i (\xi) u^k$$

les équations finies de ce groupe, les $A_k^i(\xi)$ étant des fonctions partout régulières dans l'espace E′. Si on substitue aux formes inconnues ω^i les formes

$$\bar{\omega}^i = A_k^i (\xi) \omega^k , \tag{9}$$

un calcul facile[1] montre que les dernières équations (8) deviennent

$$(\overline{\omega}^i)' = \frac{1}{2} A^i_k(\xi)\, c^k_{\alpha\beta}[\omega^\alpha \omega^\beta] \,. \tag{8'}$$

Le second membre est une forme quadratique extérieure partout régulière dans l'espace E′ du groupe G′. D'autre part les équations de Maurer sont localement intégrales, et par suite *le second membre est un élément d'intégrale de différentielle exacte.* Le second nombre de Betti de E′ étant nul, il résulte d'un théorème de M. de Rham [**18**] qu'on peut trouver dans E′ une expression de Pfaff $H^i_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha$ partout régulière dont la dérivée extérieure soit le second membre de (8′). Il suffit alors de poser

$$\overline{\omega}^i = d\eta^i + H^i_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha \,,$$

d'où l'on tire

$$\omega^i = B^i_k(\xi)\, d\eta^k + K^i_\alpha(\xi)\, d\xi^\alpha \;; \tag{10}$$

on a ainsi obtenu, dans l'espace E qui est le produit topologique de E′ et de l'espace euclidien des η^i, $n + r$ formes *indépendantes et partout régulières* satisfaisant aux équations de Maurer. *Mais ici l'intégration qui conduit au groupe des paramètres ne soulève aucune difficulté:* les $(\xi^\alpha)'$ s'expriment au moyen des ξ^α par les fonctions qui définissent le groupe des paramètres de G′; quant aux $(\eta^i)'$, elles sont données par des *quadratures* effectuées dans l'espace simplement connexe E′ des ξ^α. Le Lemme est donc complètement démontré.

Le théorème fondamental ne s'applique qu'aux groupes de Lie simplement connexes; mais la connaissance d'un groupe de Lie simplement connexe entraîne celle des autres groupes infinitésimalement isomorphes par la détermination des sous-groupes proprement discontinus de son centre.

---

[1] En exprimant que les ω^α sont les paramètres de la transformation infinitésimale $a_\xi^{-1} a_{\xi+d\xi}$ du groupe (9), on trouve

$$\frac{\partial A^i_m}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = A^i_k\, c^k_{m\alpha}\, \omega^\alpha$$

d'où résultent les équations (8′).

VII. — Dernières recherches sur les groupes simples clos.

L'importance, dans la topologie des groupes, des groupes simples clos appelle l'attention sur les propriétés topologiques de ces groupes dont nous n'avons donné qu'une faible partie, à savoir que leurs deux premiers nombres de Betti sont nuls.

La première recherche plus approfondie sur ce sujet repose sur un théorème, susceptible du reste de s'appliquer à tout espace riemannien symétrique clos, et qui s'énonce ainsi [**15**]:

Le p^{ième} *nombre de Betti d'un groupe de Lie clos est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants de degré* p *de l'espace du groupe, et ce nombre est lui-même égal au nombre des formes extérieures de degré* p *linéairement indépendantes qui sont invariantes par le groupe adjoint.*

La démonstration de ce théorème fait appel aux théorèmes de M. de Rham [**18**].

D'après cela le premier nombre de Betti du groupe adjoint d'un groupe dont la forme $\varphi(e)$ est définie est évidemment nul. En effet ce groupe adjoint est clos et il n'admet aucun invariant linéaire, car l'existence d'un tel invariant prouverait l'existence d'un sous-groupe invariant d'ordre $r - 1$, ce qui est absurde.

On peut démontrer presque aussi facilement que le second nombre de Betti est nul; s'il ne l'était pas, le groupe adjoint laisserait invariante une forme $a_{ij}[e^i e^j]$ non identiquement nulle, les coefficients a_{ij} étant antisymétriques. L'invariance s'exprime par les relations

$$c_{ij}^r a_{rk} = c_{ik}^r a_{rj} \ ;$$

si nous désignons par $\{ijk\}$ le premier membre de cette relation, nous voyons qu'il se reproduit par l'échange des deux derniers indices et que d'autre part il change de signe par l'échange des deux premiers. On en déduit facilement qu'il est nul. Mais alors chacune des formes linéaires $a_{1i}e^i$, $a_{2i}e^i$, ..., $a_{ri}e^i$ est invariante; cela n'est possible que si elles sont toutes nulles, ce qui est absurde.

Cette démonstration du théorème relatif aux deux premiers nombres de Betti est beaucoup plus simple que celle qui a été indiquée plus haut, mais elle va moins loin. En revanche il nous est maintenant bien facile de voir que *le troisième nombre de Betti d'un groupe simple clos n'est jamais nul.* Cela tient à l'existence de la forme invariante

$$\gamma_{ijk}[e^i e^j e^k] ,$$

où l'on a posé

$$\gamma_{ijk} = c_{ij}^m A_{mk} = c_{jk}^m A_{mi} = c_{ki}^m A_{mj} ,$$

les A_{ij} étant les coefficients de la forme $\varphi(e)$. Ces coefficients γ_{ijk} se reproduisent avec ou sans changement de signe suivant qu'on effectue sur les indices une permutation impaire ou paire.

En m'appuyant sur la théorie de la représentation linéaire des groupes simples sous la forme que lui a donnée M. H. Weyl [**4**], j'ai pu démontrer [**15**] deux autres résultats remarquables:

1° *La somme des nombre de Betti d'un groupe clos de rang* l est 2^l;

2° *Le polynome de Poincaré du groupe*, c'est-à-dire le polynome $t^r + P_1 t^{r-1} + \ldots + P_{r-1} t + 1$ dont les coefficients sont les nombres de Betti successifs du groupe, *est divisible par* $(t + 1)^l$.

Ces résultats ne supposent pas le groupe semi-simple. Ils donnent immédiatement le polynone de Poincaré

$$(t^3 + 1)(t^{r-3} + 1)$$

d'un groupe simple clos de rang 2.

Les théorèmes précédents ramènent la recherche des nombres de Betti d'un groupe simple clos à un problème d'Algèbre. A ce point de vue il a été résolu récemment par M. Richard Brauer [**22**] qui a indiqué les polynomes de Poincaré pour les quatre grandes classes de groupes simples, à savoir:

(A) : $(t^3 + 1)(t^5 + 1) \ldots (t^{2l+1} + 1)$ $\quad r = l(l + 2)$;

(B) et (C) : $(t^3 + 1)(t^7 + 1) \ldots (t^{4l-1} + 1)$ $\quad r = l(2l + 1)$;

(D) : $(t^3 + 1)(t^7 + 1) \ldots (t^{4l-5} + 1)(t^{2l-1} + 1)$ $\quad r = l(2l - 1)$.

Ces résultats, dont j'avais indiqué les deux premiers comme probables, avaient été trouvés un peu auparavant par M. Pontrjagin, qui a employé une méthode de nature topologique, d'abord en utilisant le théorème relatif à la somme 2^l des nombres de Betti [**20**], ensuite en s'en affranchissant [**21**]. Cette méthode consiste essentiellement à montrer l'existence, dans un groupe simple clos G de rang l, d'un sous-groupe simple G′ d'ordre r' et de rang $l-1$ et, dans l'espace de G, d'une variété orientable fermée V à $r-r'$ dimensions ayant un seul élément commun avec G′. On obtient alors une base complète des homologies de G en prenant une base des homologies de G′ et en lui adjoignant les variétés obtenues par multiplication (au sens des groupes) des éléments de chaque variété de cette base par les éléments de V.

En supposant que cette manière de procéder puisse s'appliquer aussi aux groupes simples exceptionnels, on peut encore énoncer les résultats suivants.

Etant donné un groupe simple clos de rang l, il existe, dans l'espace du groupe, l variétés fermées orientables fondamentales $V_1, V_2, \ldots, V_l$ toutes de dimensions impaires, telles que les $2^l - 1$ variétés

$$V_{i_1} V_{i_2} \ldots V_{i_h} \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_h)$$

obtenues par multiplication au sens précédemment indiqué, jointes à la variété V_0 réduite au point unité, forment une base des homologies.

Cela posé considérons deux de ces variétés,

$$W = V_{i_1} V_{i_2} \ldots V_{i_k} ,$$
$$W' = V_{j_1} V_{j_2} \ldots V_{j_h} ,$$

dont la somme des dimensions soit supérieure ou égale à r. On a les théorèmes suivants:

1° *L'intersection* W. W′ *est homologue à zéro si l'une des* 1 *variétés fondamentales n'entre dans la composition d'aucune des deux variétés* W, W′.

2° *L'intersection est homologue au produit des variétés fondamentales entrant à la fois dans la composition de* W *et de* W′,

si toutes les variétés fondamentales entrent dans la composition soit de W, *soit de* W′, *soit de* W *et* W′.

Ces théorèmes rapprochent l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe de l'espace produit topologique de l espaces sphériques ayant les dimensions de V_1, V_2, ..., V_l: ces deux espaces ont les mêmes nombres de Betti, les mêmes groupes d'homologie et les mêmes lois d'intersections; mais on ne sait pas s'ils sont homéomorphes.

Comme vous le voyez, si les recherches toutes récentes sur la topologie des groupes simples nous ont apporté des résultats très intéressants, elles nous posent par cela même de nouveaux problèmes. Mais même en nous bornant à la simple détermination des nombres de Betti des groupes simples, on ne devra pas s'estimer complètement satisfait si on arrive à faire cette détermination pour les cinq groupes exceptionnels. C'est en quelque sorte une loi historique que les propriétés générales des groupes simples ont presque toutes été *vérifiées* d'abord sur les différents groupes et qu'on a ensuite cherché et trouvé une raison générale dispensant de l'examen des cas particuliers; je ne connais guère qu'une exception à cette loi: elle est fournie par le théorème sur la somme 2^l des nombres de Betti. Il faut espérer qu'on trouvera aussi une raison de portée générale expliquant la forme si particulière des polynomes de Poincaré des groupes simples clos.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Lie und F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen (B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 2me éd., 1930).
2. E. Cartan. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse, 2me éd., Paris, Vuibert, 1933).
3. — Les groupes réels simples finis et continus (*Ann. Ec. Norm.*, *31*, 1914, p. 265-355).
4. H. Weyl. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb- einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (*Math. Zeitschr.*, *23*, 1925, p. 271-309; *24*, 1925, p. 328-395).
5. E. Cartan. Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples (*Bull. Sc. Math.*, *49*, 1925, p. 130-152).
6. — Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff (*Comptes rendus*, *182*, 1926, p. 956-958).
7. O. Schreier. Abstrakte kontinuierliche Gruppen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, *4*, 1926, p. 15-32).

8. — Die Verwandschaft stetiger Gruppen im Grossen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, *6*, 1928, p. 367-376).
9. E. Cartan. Sur les géodésiques des espaces de groupes simples (*Comptes rendus*, *184*, 1927, p. 862).
10. — Sur la géométrie des groupes simples (*Annali di Mat.*, *4*, 1926-1927, p. 209-256).
11. — Complément au Mémoire « Sur la géométrie des groupes simples » (*Annali di Mat.*, *5*, 1928, p. 253-260).
12. — Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (*Ann. Ec. Norm.*, *44*, 1927, p. 345-467).
13. — Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos (*Comptes rendus*, *187*, 1928, p. 196-198).
14. — Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (*Journal Math. pures appl.*, *8*, 1929, p. 1-33).
15. — Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (*Annales Soc. pol. Math.*, *8*, 1929, p. 181-225).
16. — La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (*Mémorial Sc. Math.*, XLII, 1930).
17. — Le troisième théorème fondamental de Lie (*Comptes rendus*, *190*, 1930, p. 914 et 1005).
18. G. de Rham. Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (*Journal Math. pures appl.*, *10*, 1931, p. 115-200).
19. E. Cartan. Les espaces riemanniens symétriques (*Verhandl. Int. Math. Kongresses Zürich*, I, 1932, p. 152-161).
20. L. Pontrjagin. On Betti numbers of compact Lie's groups (*C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, *1*, 1935, p. 433-437).
21. — Sur les nombres de Betti des groupes de Lie (*Comptes rendus*, *200*, 1935, p. 1277-1280).
22. Richard Brauer. Sur les invariants intégraux des variétés des groupes de Lie simples clos (*Comptes rendus*, *201*, 1935, p. 419-421).
23. E. Cartan. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes (*Abh. math. Seminar Hamburg*, *11*, 1935, p. 116-162).