

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE<sup>1</sup>

---

## LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE<sup>2</sup>

PAR

Elie CARTAN, Membre de l'Institut (Paris).

---

### I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES FINIS ET CONTINUS.

La topologie des groupes n'a fait l'objet de recherches suivies que depuis une dizaine d'années. Je m'occuperai presque exclusivement dans cette Conférence des groupes finis et continus de Lie. Les travaux déjà anciens sur la structure infinitésimale de ces groupes fournissent presque tous les éléments nécessaires à l'étude de leurs propriétés topologiques en grand; réciproquement cette étude éclaire d'un jour nouveau certains théorèmes de nature purement algébrique relatifs à la structure infinitésimale des groupes et à leurs représentations linéaires: dans cette voie, c'est M. Hermann WEYL qui a été l'initiateur [4]<sup>3</sup>.

Je désirerais, avant d'entrer dans le vif du sujet, dire quelques mots des groupes finis et continus les plus généraux et de ce

---

<sup>1</sup> Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut. La série comprenait en outre une conférence de M. A. WEIL, Maître de conférences à l'Université de Strasbourg, intitulée: La mesure invariante dans les espaces homogènes clos; elle fera l'objet d'un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

<sup>2</sup> Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

<sup>3</sup> Les nombres entre crochets réfèrent aux ouvrages cités dans la bibliographie.

qu'on sait de leurs propriétés topologiques. Un tel groupe, d'ordre  $r$ , peut être défini [7, 16] au moyen d'une variété topologique (au sens de Hausdorff) à  $r$  dimensions, dont chaque point représente un élément du groupe; à l'intérieur de cette variété on a défini une opération (multiplication) faisant correspondre à deux points ou éléments quelconques  $a$  et  $b$  rangés dans un certain ordre un troisième point  $c = ab$ , cette opération jouissant des propriétés suivantes:

- 1° *Elle est associative*:  $(ab)c = a(bc)$ ;
- 2° *Elle admet un module ou élément-unité  $i$  tel que  $ia = ai$* ;
- 3° *Chaque élément  $a$  admet un inverse  $a^{-1}$  caractérisé par  $aa^{-1} = a^{-1}a = i$* ;
- 4° *L'inverse  $a^{-1}$  de  $a$  dépend d'une manière continue de  $a$  et le produit  $ab$  dépend d'une manière continue de l'ensemble des deux points  $a$  et  $b$ .*

Le groupe fini et continu est un groupe de Lie s'il est possible de choisir dans la variété des coordonnées telles que les fonctions définissant la loi de multiplication ou de composition soient analytiques; il suffit du reste que, pour un choix convenable des coordonnées, ces fonctions soient dérivables jusqu'à un certain ordre. La question de savoir si tout groupe fini et continu est un groupe de Lie n'est pas tranchée; on sait cependant que les groupes d'ordre 1 et 2, ainsi que les groupes compacts ou clos sont des groupes de Lie: ce dernier résultat est dû, comme on sait, à M. J. von NEUMANN.

La variété d'un groupe fini et continu jouit de deux propriétés topologiques simples:

- 1° *Elle est orientable*;
- 2° *Son groupe fondamental, ou groupe de Poincaré, est abélien.*

La première propriété est évidente, car on obtient une orientation cohérente des différents voisinages de la variété en orientant d'une certaine manière un voisinage  $V_0$  de l'élément unité  $i$  et en conférant au voisinage  $V$  de l'élément  $a$  qui se déduit de  $V_0$  par la transformation  $x' = ax$  l'orientation induite par cette transformation.

La seconde propriété est plus cachée. Tout groupe fini et

continu  $g$  admet, d'après O. SCHREIER [8], un groupe de recouvrement simplement connexe  $G$ . Les éléments de  $G$  qui correspondent à l'élément-unité  $i$  de  $g$  forment un sous-groupe *proprement discontinu*  $\gamma$  de  $G$ . Soit  $\alpha$  un élément de  $\gamma$ ,  $x$  un élément quelconque de  $G$ ; l'élément  $x\alpha x^{-1}$  de  $G$ , correspondant à l'élément unité de  $g$ , appartient à  $\gamma$ ; il se réduit à  $\alpha$  pour  $x = i$  et il varie d'une manière continue avec  $x$ : il est donc toujours égal à  $\alpha$ . L'élément  $\alpha$  appartenant ainsi au centre de  $G$ , le groupe  $\gamma$  est abélien; or il est isomorphe au groupe de Poincaré de  $g$ .

Aux deux propriétés précédentes on en peut ajouter une troisième lorsque le groupe est clos:

3° *La caractéristique d'Euler d'un groupe fini et continu clos est nulle.*

Cela résulte immédiatement de l'existence, pour la variété, de déformations sans point fixe, par exemple celles qui sont définies par les équations  $x' = ax$  (groupe des paramètres).

Les propriétés précédentes ne sont pas caractéristiques des variétés de groupes. Par exemple l'espace sphérique à  $2n + 1 \geq 5$  dimensions est orientable, simplement connexe et de caractéristique nulle; si c'était l'espace d'un groupe, ce groupe serait clos, donc serait un groupe de Lie; d'après les théorèmes que nous verrons un peu plus loin, ce groupe serait semi-simple et son troisième nombre de Betti serait positif, alors que celui de l'espace donné est nul.

## II. — LES GROUPES DE LIE.

Arrivons aux groupes de Lie. Rappelons qu'un tel groupe, d'ordre  $r$ , admet des transformations infinitésimales dont l'ensemble forme un anneau avec  $r$  éléments de base  $X_1, X_2, \dots, X_r$ ; toute transformation infinitésimale est de la forme  $e^i X_i$ <sup>1</sup> avec  $r$  coefficients réels arbitraires  $e^i$ . Rappelons aussi la notion du crochet  $(XY)$  de deux transformations infinitésimales, celle des *constantes de structure*  $c_{ij}^k$  qui entrent

<sup>1</sup> Nous supprimons, suivant l'usage, le signe de sommation devant un indice répété deux fois.

dans les *relations de structure* de Lie

$$(X_i X_j) = c_{ij}^k X_k, \quad (1)$$

enfin les relations algébriques [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \\ c_{ij}^m c_{mk}^h + c_{jk}^m c_{mi}^h + c_{ki}^m c_{mj}^h = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Deux groupes d'ordre  $r$  sont *infinitésimalement isomorphes* si, par un choix convenable de leurs bases infinitésimales, ils ont les mêmes constantes de structure; ils ne sont pas nécessairement isomorphes « en grand », mais leurs groupes simplement connexes de recouvrement sont isomorphes.

Dans la théorie de la structure des groupes, l'« équation de Killing » joue un rôle important: c'est l'équation

$$\| e^k c_{ki}^j - \delta_i^j r \| = 0 \quad (\delta_i^j = 1 \text{ si } i = j, \text{ } 0 \text{ si } i \neq j), \quad (3)$$

qui indique, une transformation infinitésimale  $e^i X_i$  étant donnée, l'existence d'une transformation infinitésimale  $\eta^k X_k$  telle qu'on ait

$$(e^i X_i, \eta^j X_j) = r \eta^k X_k.$$

La somme des carrés des racines de l'équation de Killing est une forme quadratique

$$\varphi(e) \equiv e^i e^j c_{ik}^h c_{jh}^k \quad (4)$$

qui joue un rôle fondamental [2].

Cette forme  $\varphi(e)$ , comme du reste les coefficients des différentes puissances de  $r$  dans l'équation de Killing, est un invariant du *groupe adjoint linéaire*  $\Gamma$ . C'est celui qui indique comment les transformations infinitésimales du groupe donné  $G$  sont transformées par les éléments du groupe: à l'élément  $a$  correspond la transformation linéaire en  $e^1, e^2, \dots, e^r$  qui fait passer de  $e^i X_i$  à  $a(e^i X_i) a^{-1}$ . Le groupe  $\Gamma$  est isomorphe, holoédrique ou méridrique, de  $G$ ; l'ordre de  $\Gamma$  peut être inférieur à celui de  $G$ ; il ne lui est égal que si le centre de  $G$  est discontinu,  $G$  étant

alors un groupe de recouvrement de  $\Gamma$ . Si  $G$  est clos,  $\Gamma$  l'est aussi, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Rappelons enfin qu'à la transformation infinitésimale  $X_i$  de  $G$  correspond dans  $\Gamma$  la transformation infinitésimale

$$E_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} . \quad (5)$$

### III. — LES GROUPES CLOS.

Dans l'étude topologique des groupes de Lie, les groupes clos jouent un rôle essentiel et c'est par eux que nous allons commencer. On a facilement des renseignements importants sur leur structure. En effet le groupe adjoint  $\Gamma$  d'un groupe clos  $G$  est également clos; d'après un théorème de M. H. WEYL [4], il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qu'on peut supposer ramenée à  $(e^1)^2 + (e^2)^2 + \dots + (e^r)^2$ , de sorte que  $\Gamma$  est un groupe orthogonal. De là on déduit que les constantes de structure  $c_{ij}^k$ , antisymétriques par rapport à leurs deux premiers et par rapport à leurs deux derniers indices, ne changent pas par une permutation circulaire et changent de signe par une permutation impaire de leurs indices.

Si nous regardons les  $e^i$  comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à  $r$  dimensions,  $\Gamma$  est un groupe de rotations ou de symétries autour de l'origine  $O$ . Par suite s'il laisse invariante une variété linéaire à  $p$  dimensions passant par  $O$ , il laissera invariante la variété à  $r - p$  dimensions totalement perpendiculaire à la première. Du reste dire qu'une variété linéaire est invariante par  $\Gamma$ , c'est dire que les transformations infinitésimales  $e^i X_i$  dont les points-images  $(e^1, \dots, e^r)$  sont dans la variété engendrent un *sous-groupe invariant* de  $G$ . Par un choix convenable des axes, c'est-à-dire de la base infinitésimale de  $G$ , on arrive, en utilisant les remarques précédentes, à partager les  $r$  variables  $e^i$  en  $h$  séries de  $p_1, p_2, \dots, p_h$  variables, ou encore les  $r$  transformations infinitésimales de base en  $h$  séries correspondantes, de manière

1° que les transformations d'une même série engendrent un *sous-groupe invariant* de  $G$ ;

2° que ces sous-groupes soient échangeables entre eux;

3° qu'aucun d'eux n'admette un sous-groupe invariant d'ordre plus petit.

Si l'une des séries ne contient qu'un élément, il lui correspond un sous-groupe invariant abélien clos. Si l'une des séries contient plusieurs éléments, il lui correspond un sous-groupe invariant simple, c'est-à-dire n'admettant aucun sous-groupe invariant continu. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante [14, 16]:

*Tout groupe clos est abélien ou infinitésimalement isomorphe au produit direct d'un ou plusieurs groupes simples et éventuellement d'un groupe abélien.* Cela veut dire, dans le second cas, que le produit direct en question est un groupe de recouvrement du groupe donné.

#### IV. — LES GROUPES SIMPLES CLOS.

Nous sommes ainsi conduits naturellement à l'étude des groupes simples clos. Le groupe adjoint  $\Gamma$  d'un tel groupe  $G$  ne peut laisser invariante qu'une seule forme quadratique définie (à un facteur constant près), sans quoi il laisserait invariante au moins une variété linéaire réelle, qui correspondrait à un sous-groupe invariant continu. Il en résulte que *la forme quadratique  $\varphi(e)$  d'un groupe simple clos est définie*; on voit du reste facilement qu'elle est négative. La réciproque est fondamentale: *tout groupe dont la forme  $\varphi(e)$  est définie est clos.*

Remarquons en passant ce fait qu'une propriété du groupe infinitésimal entraîne ici une propriété topologique du groupe global. Il n'en est pas toujours ainsi; deux groupes abéliens de même ordre, caractérisés par les mêmes constantes de structure, toutes nulles, peuvent être l'un clos, l'autre ouvert.

Il nous faut ici rappeler, avant de donner la démonstration, un théorème classique [2] d'après lequel tout groupe dont la forme  $\varphi(e)$  est de discriminant non nul est *semi-simple*, c'est-à-dire est simple ou est infinitésimalement le produit direct de plusieurs groupes simples. Il suffit donc de démontrer la réciproque énoncée pour les groupes simples.

La démonstration se fait en deux temps: on démontre d'abord

que le groupe adjoint linéaire  $\Gamma$  est clos; on démontre ensuite que le groupe donné lui-même  $G$  est clos.

Le groupe  $\Gamma$  est du même ordre que  $G$ . Les coefficients de ses substitutions linéaires sont *bornés*, le groupe  $\Gamma$  étant orthogonal; mais cela *ne suffit pas* pour affirmer que  $\Gamma$  est clos. Passons par l'intermédiaire du groupe  $\Gamma'$  de toutes les automorphies, internes et externes, du groupe infinitésimal: c'est un groupe *algébrique* en ce sens que les coefficients de ses substitutions linéaires sont caractérisés par les relations algébriques qui expriment l'invariance des relations de structure; étant algébrique et borné, le groupe  $\Gamma'$  est clos. Par suite  $\Gamma$ , qui est la partie connexe de  $\Gamma'$  contenant la substitution identique, est aussi clos [16].

Le théorème en vue sera prouvé si  $G$  recouvre  $\Gamma$  un nombre fini de fois, ou encore si le groupe simplement connexe de recouvrement de  $\Gamma$  recouvre  $\Gamma$  un nombre fini de fois. C'est M. H. WEYL [4] qui a démontré le premier cette dernière propriété: il avait du reste en vue, plutôt qu'une propriété topologique de certains groupes, un moyen de démontrer par voie transcendante la complète réductibilité des représentations linéaires des groupes semi-simples, réductibilité qu'on n'était pas arrivé à prouver par voie algébrique.

Essayons de donner une idée de la démonstration [10, 11]. Le groupe adjoint clos  $\Gamma$  admet une infinité de sous-groupes abéliens maximums, tous homologues entre eux et d'ordre  $l$ , rang du groupe donné. Une transformation infinitésimale générique de  $\Gamma$  est homologue à un nombre fini de transformations infinitésimales d'un quelconque  $\gamma$  de ces sous-groupes abéliens, qu'on peut supposer engendré par  $X_1, X_2, \dots, X_l$ ; on peut supposer que pour la transformation  $e^i X_i$  de  $\gamma$ , la forme  $\varphi(e)$  est réduite à  $-[(e^1)^2 + \dots + (e^l)^2]$ . Représentons la transformation  $e^i X_i$  de  $\gamma$ , dans l'espace euclidien à  $l$  dimensions, par le vecteur d'origine  $O$  et de composantes  $e^i$ . Il existe dans cet espace un angle  $l$ -èdre  $\Pi$  de sommet  $O$  tel que toute transformation infinitésimale générique de  $\Gamma$  soit homologue à une transformation et une seule *intérieure* à  $\Pi$ . Mais il y a des transformations infinitésimales *singulières*, caractérisées par la propriété que l'équation de Killing admette plus de  $l$  racines nulles au lieu du nombre normal  $l$ : il y en a alors au moins  $l + 2$ , ces racines étant

deux à deux opposées. Ces transformations singulières sont homologues aux transformations portées sur les faces de  $\Pi$ . Elles dépendent seulement de  $r - 3$  paramètres homogènes. Ajoutons que si l'on prend les symétriques de  $\Pi$  par rapport à ses différentes faces et ainsi de suite, on obtient une décomposition régulière de l'espace autour du point origine  $O$ .

Passons aux transformations finies de  $\Gamma$ ; elles admettent des multiplicateurs de module 1, dont  $l$  sont égaux à 1, les autres étant deux à deux inverses. Toute transformation finie *générique*  $T$  (avec exactement  $l$  multiplicateurs égaux à 1) peut être engendrée par une transformation infinitésimale générique ayant une homologue à l'intérieur de  $\Gamma$ ;  $T$  peut être représentée par un point déterminé intérieur à  $\Pi$ , les différentes transformations finies engendrées par une même transformation infinitésimale étant représentées par les points d'une demi-droite issue de  $O$ . Si l'on suit cette demi-droite à partir de  $O$ , il arrive un moment où on trouve une transformation finie singulière: le lieu des points ainsi obtenus est une portion d'hyperplan qui délimite, avec les faces de  $\Pi$ , un simplexe  $\Sigma$ ; toute transformation finie non singulière de  $\Gamma$  a pour image un point *ou un nombre fini de points* intérieurs à  $\Sigma$ . Du reste si l'on prend les symétriques de  $\Sigma$  par rapport à ses  $l + 1$  faces et qu'on procède de même pour les nouveaux simplexes obtenus et ainsi de suite, on obtient un pavage régulier de l'espace, toute transformation finie non singulière de  $\Gamma$  ayant toujours le même nombre fini d'images à l'intérieur de chacun des simplexes obtenus.

Ce nombre fini est égal au nombre des sommets de  $\Sigma$  qui représentent la substitution identique de  $\Gamma$ . Nous allons voir que *c'est aussi le nombre de fois que  $\Gamma$  est recouvert par son groupe simplement connexe de recouvrement.*

Il sera commode d'employer un langage géométrique. La forme définie positive —  $\varphi(e)$  permet d'introduire dans l'espace de  $\Gamma$  une métrique riemannienne invariante par  $\Gamma$ , qui se trouve être ainsi le plus grand groupe des déplacements de son espace, rendu riemannien. Les sous-groupes à un paramètre de  $\Gamma$  sont représentés par des géodésiques issues du point unité  $i$ ; nous dirons qu'un arc de géodésique d'origine  $i$  est *régulier* si le sous-groupe correspondant est engendré par une transformation infinité-

simale non singulière et s'il n'y a aucun élément singulier sur cet arc. En suivant une géodésique non singulière à partir de  $i$ , on arrivera à un premier point singulier, qui n'est autre que le premier *point focal* de  $i$  sur la géodésique. Tous ces points focaux engendrent une variété à  $r - 3$  dimensions, celle qui a pour image dans l'espace euclidien de  $\gamma$  la face de  $\Sigma$  opposée au sommet  $O$ . Si nous considérons maintenant dans l'espace de  $\Gamma$  un arc  $\widehat{ab}$  ne contenant aucun point singulier et si nous nous donnons *l'un des arcs réguliers* de géodésique joignant  $i$  à  $a$ , on pourra suivre par continuité, de  $a$  en  $b$ , cet arc régulier. Tous les arcs réguliers ainsi obtenus seront représentés à l'intérieur de  $\Sigma$  par des segments de droites partant de  $O$  et aboutissant aux différents points de l'image de l'arc  $ab$ . Supposons l'arc  $ab$  fermé, partant de  $a$  et y revenant, *sans contenir aucun point singulier*. Si nous nous donnons l'arc régulier de géodésique joignant  $i$  à  $a$  et si nous le suivons par continuité, ou bien nous retrouverons le même arc en revenant au point de départ, ou bien nous en trouverons un autre. Dans le premier cas le cycle considéré est homotope à zéro; il suffit pour s'en convaincre d'effectuer une homothétie de centre  $i$  et de rapport  $k$  variant de 1 à 0, chaque point du contour se déplaçant sur l'arc régulier de géodésique qui le joint à  $i$ . Mais, dans le second cas, le cycle *n'est pas* homotope à zéro, car s'il l'était on pourrait opérer la réduction sans que le cycle rencontre jamais la variété à  $r - 3$  dimensions des points singuliers; les arcs réguliers de géodésique joignant  $i$  aux points du contour varieraient d'une manière continue et l'arc régulier final joignant  $O$  à  $a$  serait toujours le même, c'est-à-dire différent de l'arc régulier initial joignant les mêmes points, ce qui est absurde. En particulier un cycle partant de  $i$  et y revenant aura pour image dans le simplexe  $\Sigma$  un chemin partant de  $O$  et aboutissant à un des sommets de  $\Sigma$  qui représentent la substitution identique; le cycle est homotope à zéro ou non suivant que ce sommet est confondu ou non avec  $O$ . On voit bien nettement ainsi qu'il y a autant de classes de cycles non homotopes entre eux qu'il y a dans  $\Sigma$  de sommets représentant la substitution identique. C'est ce que nous voulions démontrer.

Ajoutons un théorème important. Considérons le groupe  $G$

*simplement connexe* de recouvrement de  $\Gamma$ . Toute transformation finie non singulière de  $G$  a pour image *un point et un seul* intérieur à  $\Sigma$ . Par suite toute variété fermée qui ne contient aucun élément singulier a pour image une variété fermée intérieure à  $(\Sigma)$ . Chaque point de la variété donnée peut donc être joint au point unité *par un arc régulier de géodésique et un seul*; par suite cette variété est homotope à zéro. On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME. *Dans l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe, toute variété fermée qui ne contient aucun élément singulier est homotope à zéro.*

En particulier, la variété des éléments singuliers étant à  $r - 3$  dimensions, toute variété fermée à deux dimensions peut être déformée de manière à ne plus contenir d'éléments singuliers, d'où le nouveau théorème:

THÉORÈME. *Dans l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe, toute variété fermée à deux dimensions est homotope à zéro.*

Les théorèmes précédents entraînent évidemment le suivant:

THÉORÈME. *Les deux premiers nombres de Betti d'un groupe simple clos, simplement connexe ou non, sont nuls.*

Tous ces théorèmes s'étendent aux groupes semi-simples clos, c'est-à-dire aux groupes dont la forme  $\varphi(e)$  est définie; *tous ces groupes ont leurs deux premiers nombres de Betti nuls.* Il n'en est évidemment pas de même pour les groupes clos dont la forme  $\varphi(e)$  n'est que semi-définie.

Revenons aux groupes simples. Le groupe de Poincaré du groupe adjoint  $\Gamma$  d'un groupe simple clos est isomorphe au groupe des déplacements, accompagnés ou non de symétries, qui, dans l'espace euclidien du sous-groupe abélien  $\gamma$ , laissent invariant le simplexe  $\Sigma$  et amènent successivement en coïncidence le sommet  $O$  avec les autres sommets homologues. Il y a, comme on sait, quatre grandes classes de groupes simples clos, chaque classe ayant un représentant linéaire bien connu, à savoir:

A. Le groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive à  $l + 1$  variables;

B. Le groupe orthogonal réel à  $2l + 1$  variables;

C. Le groupe linéaire complexe de la forme d'Hermité  $x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_{2l} \bar{x}_{2l}$  et de la forme quadratique extérieure  $[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}]$ .

D. Le groupe orthogonal réel à  $2l \geq 6$  variables;

Le groupe de Poincaré du groupe adjoint est cyclique d'ordre  $l + 1$  (classe A), cyclique d'ordre 2 (classes B et C), cyclique d'ordre 4 (classe D,  $l$  impair), non cyclique d'ordre 4 (classe D,  $l$  pair). Le groupe linéaire unitaire unimodulaire est simplement connexe, mais le groupe orthogonal ne l'est pas, étant recouvert deux fois par son groupe simplement connexe de recouvrement.

M. H. WEYL a montré *a priori*, par des considérations tirées de la théorie des équations intégrales, que tout groupe clos admet une infinité de représentations linéaires *fidèles*, c'est-à-dire telles qu'à deux éléments distincts du groupe correspondent deux substitutions linéaires distinctes.

## V. — LES GROUPES SIMPLES OUVERTS.

J'ai beaucoup insisté sur les groupes clos. Comme nous allons le voir, ils contiennent la clef de presque toutes les propriétés topologiques des groupes de Lie ouverts. On a en effet le théorème général suivant:

**THÉORÈME.** *L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe ouvert est le produit topologique d'un espace euclidien et éventuellement d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos.*

Nous allons commencer par démontrer ce théorème pour les groupes semi-simples ouverts. Il résultera du théorème suivant:

*L'espace du groupe adjoint  $\Gamma$  d'un groupe simple ouvert  $G$  est le produit topologique de l'espace d'un groupe linéaire clos et d'un espace euclidien.*

Il suffit pour passer de ce théorème au précédent de remarquer que le groupe simplement connexe de recouvrement d'un groupe linéaire clos est le produit direct d'un ou plusieurs groupes clos simplement connexes et, éventuellement, d'un groupe abélien

simplement connexe, c'est-à-dire d'un groupe de translations, dont la variété est un espace euclidien.

Le second théorème a l'avantage de permettre la détermination du groupe fondamental de  $\Gamma$ , qui est confondu avec celui d'un groupe linéaire clos, en particulier de son premier nombre de Betti.

Avant de donner des indications sur la démonstration du théorème énoncé, rappelons qu'il existe deux catégories de groupes simples [3]: il y a d'abord les groupes simples à  $r$  paramètres complexes, c'est-à-dire d'ordre  $2r$  à notre point de vue; ce sont les seuls qui soient considérés dans ma Thèse; mais il y a aussi ce que j'ai appelé des *formes réelles* de ces premiers groupes: ce sont des groupes à  $r$  paramètres réels tels que le groupe simple à  $r$  paramètres complexes s'en déduise par le passage, en ce qui concerne les paramètres, du réel au complexe: cette phrase a un sens à cause de l'analyticité des fonctions qui définissent la loi de composition d'un groupe de Lie. J'ai déterminé toutes ces formes réelles en 1913. A cet égard on arrive à une constatation tout à fait remarquable, c'est qu'on peut déduire, par le passage du réel au complexe, tout groupe simple à paramètres complexes d'un groupe simple clos. M. H. WEYL a donné depuis [4] une démonstration de ce fait qui s'applique simultanément à tous les types de groupes simples à paramètres complexes.

Considérons d'abord un groupe simple  $G$  à  $r$  paramètres complexes; la forme  $\varphi(e)$ , considérée dans le domaine réel, est réductible à une somme de  $r$  carrés positifs et de  $r$  carrés négatifs. Toute forme réelle close de  $G$  est un sous-groupe de  $G$  auquel est attachée une *automorphie involutive* de  $G$ , celle qui fait passer d'un paramètre complexe de  $G$  au paramètre conjugué. L'espace de toutes ces automorphies involutives est un espace riemannien symétrique homéomorphe à l'espace euclidien; son groupe des déplacements est le groupe adjoint  $\Gamma$  de  $G$ . Par deux points il passe une géodésique et une seule; le produit des deux automorphies involutives associées à ces deux points est un déplacement (transvection) qui fait glisser cette géodésique sur elle-même. Cela posé tout déplacement est, d'une manière et d'une seule, le produit d'une rotation autour d'un point origine donné  $O$ , c'est-à-dire d'une transformation du groupe adjoint d'une des

formes réelles closes de  $G$ , par une transvection, celle qui amène  $O$  dans le point transformé de  $O$  par le déplacement considéré. Il résulte de là que *l'espace de  $\Gamma$  est le produit topologique de l'espace du groupe adjoint de la forme réelle close par l'espace euclidien à  $r$  dimensions. Le groupe adjoint  $\Gamma$  a donc le même groupe fondamental que le groupe adjoint de la forme réelle close correspondante.* Il résulte, en particulier, de là que *tout groupe simple à paramètres complexes admet des représentations linéaires fidèles.*

Passons maintenant à une forme réelle ouverte d'un groupe simple  $G$  à paramètres complexes. Là encore la théorie des espaces riemanniens symétriques, dont j'ai parlé dans ma conférence du Congrès de Zurich [19], éclaire les choses [12]. Dans l'espace  $\mathcal{E}_g$  à  $r$  dimensions, que nous avons associé au groupe  $G$ , l'automorphie involutive de  $G$  qui provient du passage des paramètres de  $g$  d'une valeur complexe à la valeur conjuguée, définit une symétrie qui laisse fixes tous les points d'une certaine variété totalement géodésique  $\mathcal{E}_g$ . Cette variété  $\mathcal{E}_g$ , homéomorphe à l'espace euclidien, joue par rapport au groupe  $g$  le même rôle que l'espace  $\mathcal{E}_g$  par rapport au groupe  $G$ ; son groupe de déplacements est le groupe adjoint de  $g$  et chacune de ses transformations est d'une manière et d'une seule le produit d'une rotation autour d'un point fixe  $O$  de  $\mathcal{E}_g$  par la transvection qui amène  $O$  dans le point transformé de  $O$  par le déplacement donné. Chaque rotation autour de  $O$  est d'autre part complètement caractérisée par le groupe linéaire qui transforme les vecteurs d'origine  $O$ . Il en résulte immédiatement le théorème à démontrer.

Ajoutons que si le groupe  $g$  est simple, le groupe linéaire clos des rotations est semi-simple ou est infinitésimalement le produit direct d'un groupe semi-simple et d'un groupe abélien d'ordre 1. Il en résulte le

**THÉORÈME.** *Le premier nombre de Betti de l'espace d'un groupe simple ouvert est égal à 0 ou à 1.*

Les groupes simples ouverts dont le groupe adjoint a son premier nombre de Betti égal à 1 jouent un rôle important dans certains problèmes de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes; ils interviennent [23] comme

groupes de transformations pseudo-conformes laissant invariant un domaine borné symétrique: cela veut dire un domaine admettant en lui-même une transformation pseudo-conforme involutive dont un point arbitrairement donné du domaine est un point invariant isolé.

Comme exemples de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est égal à 1, citons le groupe homographique réel d'une variable, le groupe linéaire complexe d'une forme d'Hermite indéfinie, le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réelle réductible à  $p \geq 2$  carrés positifs et 2 carrés négatifs. Comme exemple de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est nul, citons le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réductible à  $p \geq 3$  carrés positifs et  $q \geq 3$  carrés négatifs. Si l'un des entiers  $p$  et  $q$  est impair, le groupe fondamental du groupe adjoint est d'ordre 4; si  $p$  et  $q$  sont pairs tous deux, il est d'ordre 8. Enfin le groupe des déplacements de l'espace hyperbolique réel à  $n \geq 3$  dimensions admet un groupe fondamental d'ordre 2.

Ajoutons la remarque qu'un groupe simple ouvert n'admet pas toujours de représentation linéaire fidèle; il en est certainement ainsi si le premier nombre de Betti de son groupe adjoint est égal à 1, le premier nombre de Betti du groupe lui-même étant nul; exemple: le groupe simplement connexe de recouvrement du groupe homographique réel à une variable.

Si l'on passe maintenant d'un groupe simple ouvert à un groupe semi-simple ouvert, on voit que son premier nombre de Betti  $h_1$  est au plus égal au nombre des groupes simples dont il est infinitésimalement le produit direct; quant au second nombre de Betti, on démontre facilement qu'il est égal à  $\frac{h_1(h_1 - 1)}{2}$ .

## VI. — LES GROUPES DE LIE SIMPLEMENT CONNEXES ET LE TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE.

Il nous reste maintenant à démontrer, pour les groupes de Lie simplement connexes les plus généraux, le théorème suivant, dont je rappelle l'énoncé.

*L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe est le produit topologique d'espaces de groupes simples clos et d'un espace euclidien.*

La démonstration que je vais indiquer de ce théorème est intimement liée à la démonstration d'un autre théorème dont je n'ai pas encore parlé, c'est la réciproque du troisième théorème fondamental de S. Lie. J'ai rappelé au début de cette conférence l'existence de relations algébriques (2) entre les constantes de structure d'un groupe de Lie quelconque. On connaît plusieurs démonstrations du fait qu'à tout choix de constantes satisfaisant à ces relations correspond un groupe, mais ces démonstrations ne prouvent l'existence que d'un groupe *local*, limité au voisinage de l'élément identique et c'est une question non encore résolue de savoir si un groupe fini et continu *local* peut être toujours prolongé en un véritable groupe fini et continu, défini *globalement*. J'ai indiqué [17] pour les groupes infinitésimaux de Lie, une démonstration faisant appel à un théorème d'E. E. Levi; mais la démonstration de ce dernier théorème est par elle-même assez compliquée et n'a du reste jamais été faite que dans le cas des groupes infinitésimaux à paramètres complexes<sup>1</sup>. Je vais indiquer une démonstration plus simple qui a cependant sur la précédente l'inconvénient de s'appuyer sur la propriété d'un groupe simple clos d'avoir ses deux premiers nombres de Betti nuls.

Remarquons d'abord que la première démonstration donnée par Lie lui-même de la réciproque de son troisième théorème fondamental est valable au point de vue *global* aussi bien que *local*. Elle s'applique lorsque le groupe infinitésimal est du même ordre que son groupe dérivé, ce qui revient à dire que le groupe n'admet aucun groupe continu abélien qui lui soit isomorphe (mériédrique ou holoédrique). Dans ce cas en effet on peut écrire *a priori* les transformations infinitésimales (5) du groupe adjoint par la seule connaissance des constantes de structure :

$$E_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} ; \quad (5)$$

<sup>1</sup> M. J.-H.-C. Whitehead a obtenu récemment de ce théorème une élégante démonstration, non encore publiée, valable aussi bien dans le domaine réel que dans le domaine complexe.

or ces  $r$  transformations infinitésimales engendrent un groupe sous la seule condition que les  $c_{ih}^h$  satisfassent aux relations algébriques de Lie, et ces constantes sont les constantes de structure de ce groupe. On a ainsi un groupe infinitésimal de la structure donnée; mais comme ce groupe est linéaire, ses transformations opèrent sur un champ préexistant, à savoir l'espace euclidien à  $r$  dimensions, et, dans ce champ, on peut composer les transformations du groupe local de manière à engendrer un groupe global.

Cette conclusion s'applique en particulier à tous les groupes infinitésimaux semi-simples<sup>1</sup>; c'est pour cela que nous n'avons pas eu à nous poser la question d'existence des groupes globaux dans ce cas-là.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant.

**THÉORÈME FONDAMENTAL.** *Tout groupe infinitésimal de Lie admet une représentation intégrale simplement connexe dont la variété est le produit topologique d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos et d'un espace euclidien.*

Ce théorème est vrai pour les groupes infinitésimaux semi-simples. Nous allons procéder par récurrence en démontrant le Lemme suivant.

**LEMME.** *Soit  $G$  un groupe infinitésimal d'ordre  $r + n$  admettant un sous-groupe invariant abélien  $g$  d'ordre  $n$ . Si le groupe infinitésimal  $G/g$  vérifie le théorème fondamental, il en est de même du groupe  $G$ .*

Supposons un instant ce lemme démontré. Si  $G$  n'est pas semi-simple, il admet un plus grand sous-groupe invariant intégrable  $G_1$  [2]; le sous-groupe  $G_1$  étant intégrable, cela signifie que si l'on forme ses groupes dérivés successifs  $G_2, G_3, \dots$ , le dernier  $G_k$  est abélien [1]. D'autre part, d'après un théorème de Lie, tous ces groupes sont invariants dans  $G$ . Cela posé, l'application du Lemme au groupe  $G/G_2$ , qui admet  $G_1/G_2$  comme sous-groupe invariant abélien, alors que le groupe simple  $G/G_1$  satisfait au théorème fondamental, montre que  $G/G_2$  satisfait

<sup>1</sup> Elle serait générale si l'on savait démontrer que tout groupe infinitésimal de Lie est isomorphe (holoédrique) d'un groupe linéaire.

aussi à ce théorème. On applique ensuite le Lemme de proche en proche aux groupes  $G/G_3$ ,  $G/G_4$ , etc. jusqu'au groupe  $G$  lui-même.

Avant de nous occuper du Lemme, donnons quelques indications sur la démonstration de la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie. Si l'on se donne un système de constantes  $c_{ij}^k$  satisfaisant aux relations algébriques de Lie, on aura le groupe des paramètres d'un groupe de la structure donnée en construisant dans une variété à  $r$  dimensions convenablement choisie,  $r$  expressions de Pfaff  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r$  linéairement indépendantes et partout régulières satisfaisant aux équations de Maurer-Cartan <sup>1</sup>

$$(\omega^i)' = \frac{1}{2} c_{jk}^i [\omega^j \omega^k] . \quad (6)$$

Ces formes étant construites, on aura le groupe des paramètres cherché en intégrant les équations complètement intégrables

$$\omega^i(\xi'; d\xi') = \omega^i(\xi; d\xi) ,$$

les  $\xi$  étant les coordonnées d'un élément du groupe, les  $\xi'$  celles de l'élément transformé. Si la variété choisie est simplement connexe, cette intégration, tant qu'elle pourra se poursuivre, donnera pour les  $\xi'$  des fonctions uniformes des  $\xi$ , mais, pour être sûr qu'on ne sera jamais arrêté dans l'intégration, on sera obligé d'astreindre les formes  $\omega_i$  à des conditions restrictives, par exemple que l'espace riemannien obtenu en introduisant dans la variété une forme différentielle quadratique définie positive  $g_{ij} \omega^i \omega^j$  à coefficients  $g_{ij}$  constants, est *normal*<sup>2</sup> ou *complet*. La démonstration classique de la réciproque du troisième théorème fondamental revient, ce qui est facile [6], à trouver des formes  $\omega^i$  satisfaisant aux équations de Maurer dans l'espace euclidien des paramètres canoniques; mais ces formes cessent d'être linéairement indépendantes quand on s'éloigne suffisamment de l'élément-unité.

Cela posé, venons au Lemme à démontrer. Soient  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) les transformations infinitésimales de base du

<sup>1</sup> Dans un groupe de paramètres  $\xi$ , les formes  $\omega^i$  sont les paramètres de la transformation infinitésimale  $a_{\xi}^{-1} a_{\xi+d\xi}$  [16].

<sup>2</sup> E. CARTAN, Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, 1928, p. 64-65.

sous-groupe invariant abélien  $g$  et soient  $X_\alpha$  ( $\alpha = n + 1, \dots, n + r$ ),  $r$  autres transformations formant avec les  $n$  premières une base pour le groupe infinitésimal  $G$ . On a par hypothèse

$$(X_i X_j) = 0, \quad (X_i X_\alpha) = c_{i\alpha}^k X_k, \quad (X_\alpha X_\beta) = c_{\alpha\beta}^\lambda X_\lambda + c_{\alpha\beta}^k X_k, \quad (7)$$

la sommation par rapport à l'indice latin  $k$  s'étendant aux valeurs  $1, 2, \dots, n$ , la sommation par rapport à l'indice grec  $\lambda$  s'étendant aux valeurs  $n + 1, n + 2, \dots, n + r$ . Les équations de Maurer-Cartan prennent ici la forme

$$\begin{cases} (\omega^\alpha)' = \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^\alpha [\omega^\lambda \omega^\mu], \\ (\omega^i)' = c_{k\alpha}^i [\omega^k \omega^\alpha] + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^i [\omega^\alpha \omega^\beta]. \end{cases} \quad (8)$$

Les premières équations (8) sont les équations de Maurer-Cartan du groupe  $G/g$ , qui, par hypothèse, satisfait au théorème fondamental; soit  $G'$  le groupe simplement connexe correspondant. On prendra pour  $\omega^\alpha$  les formes correspondant à ce groupe, qui sont linéairement indépendantes et partout régulières dans l'espace  $E'$  simplement connexe du groupe  $G'$ .

Reste à trouver les formes  $\omega^i$ . Les  $c_{k\alpha}^i$  sont les coefficients des substitutions linéaires infinitésimales

$$U_\alpha \equiv c_{k\alpha}^h u^k \frac{\partial f}{\partial u^h},$$

qui engendrent un groupe isomorphe de  $G'$ , comme le montrent les relations faciles à vérifier

$$(U_\alpha U_\beta) = c_{\alpha\beta}^\lambda U_\lambda.$$

Soient

$$(u^i)' = A_k^i(\xi) u^k$$

les équations finies de ce groupe, les  $A_k^i(\xi)$  étant des fonctions partout régulières dans l'espace  $E'$ . Si on substitue aux formes inconnues  $\omega^i$  les formes

$$\bar{\omega}^i = A_k^i(\xi) \omega^k, \quad (9)$$

un calcul facile<sup>1</sup> montre que les dernières équations (8) deviennent

$$(\bar{\omega}^i)' = \frac{1}{2} A_k^i(\xi) c_{\alpha\beta}^k [\omega^\alpha \omega^\beta] . \quad (8')$$

Le second membre est une forme quadratique extérieure partout régulière dans l'espace  $E'$  du groupe  $G'$ . D'autre part les équations de Maurer sont localement intégrales, et par suite *le second membre est un élément d'intégrale de différentielle exacte*. Le second nombre de Betti de  $E'$  étant nul, il résulte d'un théorème de M. de RHAM [18] qu'on peut trouver dans  $E'$  une expression de Pfaff  $H_\alpha^i(\xi) d\xi^\alpha$  partout régulière dont la dérivée extérieure soit le second membre de (8'). Il suffit alors de poser

$$\bar{\omega}^i = d\eta^i + H_\alpha^i(\xi) d\xi^\alpha ,$$

d'où l'on tire

$$\omega^i = B_k^i(\xi) d\eta^k + K_\alpha^i(\xi) d\xi^\alpha ; \quad (10)$$

on a ainsi obtenu, dans l'espace  $E$  qui est le produit topologique de  $E'$  et de l'espace euclidien des  $\eta^i$ ,  $n + r$  formes *indépendantes et partout régulières* satisfaisant aux équations de Maurer. *Mais ici l'intégration qui conduit au groupe des paramètres ne soulève aucune difficulté*: les  $(\xi^\alpha)'$  s'expriment au moyen des  $\xi^\alpha$  par les fonctions qui définissent le groupe des paramètres de  $G'$ ; quant aux  $(\eta^i)'$ , elles sont données par des *quadratures* effectuées dans l'espace simplement connexe  $E'$  des  $\xi^\alpha$ . Le Lemme est donc complètement démontré.

Le théorème fondamental ne s'applique qu'aux groupes de Lie simplement connexes; mais la connaissance d'un groupe de Lie simplement connexe entraîne celle des autres groupes infinitésimalement isomorphes par la détermination des sous-groupes proprement discontinus de son centre.

---

<sup>1</sup> En exprimant que les  $\omega^\alpha$  sont les paramètres de la transformation infinitésimale  $a_\xi^{-1} a_{\xi+d\xi}$  du groupe (9), on trouve

$$\frac{\partial A_m^i}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = A_k^i c_{m\alpha}^k \omega^\alpha$$

d'où résultent les équations (8').

VII. — DERNIÈRES RECHERCHES SUR LES GROUPES  
SIMPLES CLOS.

L'importance, dans la topologie des groupes, des groupes simples clos appelle l'attention sur les propriétés topologiques de ces groupes dont nous n'avons donné qu'une faible partie, à savoir que leurs deux premiers nombres de Betti sont nuls.

La première recherche plus approfondie sur ce sujet repose sur un théorème, susceptible du reste de s'appliquer à tout espace riemannien symétrique clos, et qui s'énonce ainsi [15]:

*Le p<sup>ième</sup> nombre de Betti d'un groupe de Lie clos est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants de degré p de l'espace du groupe, et ce nombre est lui-même égal au nombre des formes extérieures de degré p linéairement indépendantes qui sont invariantes par le groupe adjoint.*

La démonstration de ce théorème fait appel aux théorèmes de M. de RHAM [18].

D'après cela le premier nombre de Betti du groupe adjoint d'un groupe dont la forme  $\varphi(e)$  est définie est évidemment nul. En effet ce groupe adjoint est clos et il n'admet aucun invariant linéaire, car l'existence d'un tel invariant prouverait l'existence d'un sous-groupe invariant d'ordre  $r - 1$ , ce qui est absurde.

On peut démontrer presque aussi facilement que le second nombre de Betti est nul; s'il ne l'était pas, le groupe adjoint laisserait invariante une forme  $a_{ij}[e^i e^j]$  non identiquement nulle, les coefficients  $a_{ij}$  étant antisymétriques. L'invariance s'exprime par les relations

$$c_{ij}^r a_{rk} = c_{ik}^r a_{rj} ;$$

si nous désignons par  $\{ijk\}$  le premier membre de cette relation, nous voyons qu'il se reproduit par l'échange des deux derniers indices et que d'autre part il change de signe par l'échange des deux premiers. On en déduit facilement qu'il est nul. Mais alors chacune des formes linéaires  $a_{1i}e^i, a_{2i}e^i, \dots, a_{ri}e^i$  est invariante; cela n'est possible que si elles sont toutes nulles, ce qui est absurde.

Cette démonstration du théorème relatif aux deux premiers nombres de Betti est beaucoup plus simple que celle qui a été indiquée plus haut, mais elle va moins loin. En revanche il nous est maintenant bien facile de voir que *le troisième nombre de Betti d'un groupe simple clos n'est jamais nul*. Cela tient à l'existence de la forme invariante

$$\gamma_{ijk} [e^i e^j e^k] ,$$

où l'on a posé

$$\gamma_{ijk} = c_{ij}^m A_{mk} = c_{jk}^m A_{mi} = c_{ki}^m A_{mj} ,$$

les  $A_{ij}$  étant les coefficients de la forme  $\varphi(e)$ . Ces coefficients  $\gamma_{ijk}$  se reproduisent avec ou sans changement de signe suivant qu'on effectue sur les indices une permutation impaire ou paire.

En m'appuyant sur la théorie de la représentation linéaire des groupes simples sous la forme que lui a donnée M. H. WEYL [4], j'ai pu démontrer [15] deux autres résultats remarquables :

1° *La somme des nombre de Betti d'un groupe clos de rang  $l$  est  $2^l$ ;*

2° *Le polynome de Poincaré du groupe, c'est-à-dire le polynome  $t^r + P_1 t^{r-1} + \dots + P_{r-1} t + 1$  dont les coefficients sont les nombres de Betti successifs du groupe, est divisible par  $(t + 1)^l$ .*

Ces résultats ne supposent pas le groupe semi-simple. Ils donnent immédiatement le polynome de Poincaré

$$(t^3 + 1)(t^{r-3} + 1)$$

d'un groupe simple clos de rang 2.

Les théorèmes précédents ramènent la recherche des nombres de Betti d'un groupe simple clos à un problème d'Algèbre. A ce point de vue il a été résolu récemment par M. Richard BRAUER [22] qui a indiqué les polynomes de Poincaré pour les quatre grandes classes de groupes simples, à savoir :

$$(A) : \quad (t^3 + 1)(t^5 + 1) \dots (t^{2l+1} + 1) \quad r = l(l + 2) ;$$

$$(B) \text{ et } (C) : \quad (t^3 + 1)(t^7 + 1) \dots (t^{4l-1} + 1) \quad r = l(2l + 1) ;$$

$$(D) : \quad (t^3 + 1)(t^7 + 1) \dots (t^{4l-5} + 1)(t^{2l-1} + 1) \quad r = l(2l - 1) .$$

Ces résultats, dont j'avais indiqué les deux premiers comme probables, avaient été trouvés un peu auparavant par M. Pontrjagin, qui a employé une méthode de nature topologique, d'abord en utilisant le théorème relatif à la somme  $2^l$  des nombres de Betti [20], ensuite en s'en affranchissant [21]. Cette méthode consiste essentiellement à montrer l'existence, dans un groupe simple clos  $G$  de rang  $l$ , d'un sous-groupe simple  $G'$  d'ordre  $r'$  et de rang  $l-1$  et, dans l'espace de  $G$ , d'une variété orientable fermée  $V$  à  $r-r'$  dimensions ayant un seul élément commun avec  $G'$ . On obtient alors une base complète des homologies de  $G$  en prenant une base des homologies de  $G'$  et en lui adjoignant les variétés obtenues par multiplication (au sens des groupes) des éléments de chaque variété de cette base par les éléments de  $V$ .

En supposant que cette manière de procéder puisse s'appliquer aussi aux groupes simples exceptionnels, on peut encore énoncer les résultats suivants.

Etant donné un groupe simple clos de rang  $l$ , il existe, dans l'espace du groupe,  $l$  variétés fermées orientables fondamentales  $V_1, V_2, \dots, V_l$  toutes de dimensions impaires, telles que les  $2^l - 1$  variétés

$$V_{i_1} V_{i_2} \dots V_{i_h} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_h)$$

obtenues par multiplication au sens précédemment indiqué, jointes à la variété  $V_0$  réduite au point unité, forment une base des homologies.

Cela posé considérons deux de ces variétés,

$$\begin{aligned} W &= V_{i_1} V_{i_2} \dots V_{i_k}, \\ W' &= V_{j_1} V_{j_2} \dots V_{j_h}, \end{aligned}$$

dont la somme des dimensions soit supérieure ou égale à  $r$ . On a les théorèmes suivants:

1° *L'intersection  $W \cdot W'$  est homologue à zéro si l'une des  $l$  variétés fondamentales n'entre dans la composition d'aucune des deux variétés  $W, W'$ .*

2° *L'intersection est homologue au produit des variétés fondamentales entrant à la fois dans la composition de  $W$  et de  $W'$ ,*

si toutes les variétés fondamentales entrent dans la composition soit de  $W$ , soit de  $W'$ , soit de  $W$  et  $W'$ .

Ces théorèmes rapprochent l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe de l'espace produit topologique de  $l$  espaces sphériques ayant les dimensions de  $V_1, V_2, \dots, V_l$ : ces deux espaces ont les mêmes nombres de Betti, les mêmes groupes d'homologie et les mêmes lois d'intersections; mais on ne sait pas s'ils sont homéomorphes.

Comme vous le voyez, si les recherches toutes récentes sur la topologie des groupes simples nous ont apporté des résultats très intéressants, elles nous posent par cela même de nouveaux problèmes. Mais même en nous bornant à la simple détermination des nombres de Betti des groupes simples, on ne devra pas s'estimer complètement satisfait si on arrive à faire cette détermination pour les cinq groupes exceptionnels. C'est en quelque sorte une loi historique que les propriétés générales des groupes simples ont presque toutes été vérifiées d'abord sur les différents groupes et qu'on a ensuite cherché et trouvé une raison générale dispensant de l'examen des cas particuliers; je ne connais guère qu'une exception à cette loi: elle est fournie par le théorème sur la somme  $2^l$  des nombres de Betti. Il faut espérer qu'on trouvera aussi une raison de portée générale expliquant la forme si particulière des polynômes de Poincaré des groupes simples clos.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. LIE und F. ENGEL. Theorie der Transformationsgruppen (B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 2<sup>me</sup> éd., 1930).
2. E. CARTAN. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse, 2<sup>me</sup> éd., Paris, Vuibert, 1933).
3. — Les groupes réels simples finis et continus (*Ann. Ec. Norm.*, 31, 1914, p. 265-355).
4. H. WEYL. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (*Math. Zeitschr.*, 23, 1925, p. 271-309; 24, 1925, p. 328-395).
5. E. CARTAN. Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples (*Bull. Sc. Math.*, 49, 1925, p. 130-152).
6. — Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff (*Comptes rendus*, 182, 1926, p. 956-958).
7. O. SCHREIER. Abstrakte kontinuierliche Gruppen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, 4, 1926, p. 15-32).

8. — Die Verwandschaft stetiger Gruppen im Grossen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, 6, 1928, p. 367-376).
  9. E. CARTAN. Sur les géodésiques des espaces de groupes simples (*Comptes rendus*, 184, 1927, p. 862).
  10. — Sur la géométrie des groupes simples (*Annali di Mat.*, 4, 1926-1927, p. 209-256).
  11. — Complément au Mémoire « Sur la géométrie des groupes simples » (*Annali di Mat.*, 5, 1928, p. 253-260).
  12. — Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (*Ann. Ec. Norm.*, 44, 1927, p. 345-467).
  13. — Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos (*Comptes rendus*, 187, 1928, p. 196-198).
  14. — Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (*Journal Math. pures appl.*, 8, 1929, p. 1-33).
  15. — Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (*Annales Soc. pol. Math.*, 8, 1929, p. 181-225).
  16. — La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (*Mémorial Sc. Math.*, XLII, 1930).
  17. — Le troisième théorème fondamental de Lie (*Comptes rendus*, 190, 1930, p. 914 et 1005).
  18. G. DE RHAM. Sur l'Analysis situs des variétés à  $n$  dimensions (*Journal Math. pures appl.*, 10, 1931, p. 115-200).
  19. E. CARTAN. Les espaces riemanniens symétriques (*Verhandl. Int. Math. Kongresses Zürich*, I, 1932, p. 152-161).
  20. L. PONTRJAGIN. On Betti numbers of compact Lie's groups (*C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.*, 1, 1935, p. 433-437).
  21. — Sur les nombres de Betti des groupes de Lie (*Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1277-1280).
  22. Richard BRAUER. Sur les invariants intégraux des variétés des groupes de Lie simples clos (*Comptes rendus*, 201, 1935, p. 419-421).
  23. E. CARTAN. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de  $n$  variables complexes (*Abh. math. Seminar Hamburg*, 11, 1935, p. 116-162).
-

# LA THÉORIE DES NŒUDS <sup>1</sup>

PAR

H. SEIFERT (Dresde).

---

Le problème essentiel de la théorie des nœuds peut être formulé comme suit: Soit donné un nœud dans l'espace euclidien à trois dimensions; c'est-à-dire une chaîne de segments fermée simple, donc un polygone. Il est utile de fermer l'espace euclidien par un point à l'infini. Autrement dit on se trouvera par la suite sur une variété close, la sphère à trois dimensions  $S$ . Soit donc  $k$  un nœud de  $S$  et  $k'$  un autre nœud d'une sphère à trois dimensions  $S'$ . Nous nous demanderons alors: Existe-t-il une représentation topologique de  $S$  sur  $S'$ , transformant  $k$  en  $k'$ ? Si c'est le cas,  $k$  et  $k'$  seront dit équivalents.

Rappelons d'abord les *invariants de nœud* les plus importants<sup>2</sup>.

1. Si  $k$  et  $k'$  sont équivalents, leurs espaces complémentaires  $S - k$  et  $S' - k'$  devront être homéomorphes. Ceci nous fournit le *groupe du nœud* de DEHN, c'est-à-dire le groupe fondamental de  $S - k$ , qui est un des invariants de nœud les plus efficaces. Dehn a montré qu'il est aisé de trouver des éléments générateurs et des relations caractéristiques de ce groupe, quand le nœud

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*. — Traduction rédigée par M. M. RUEFF (Zurich).

<sup>2</sup> K. REIDEMEISTER, *Knotentheorie* (Berlin, 1932). On y trouve un index bibliographique jusqu'à 1932.

H. SEIFERT, Verschlingungsinvarianten. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss*, 26 (1933). — Ueber das Geschlecht von Knoten. *Math. Ann.*, 110 (1934). — Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 11 (1935).

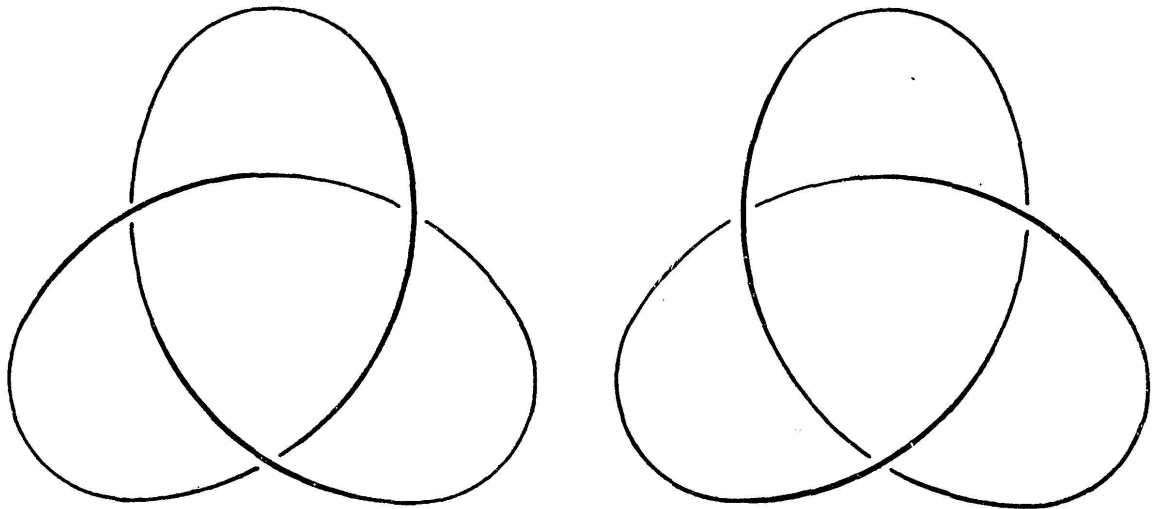
J. W. ALEXANDER, A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 19 (1933).

est donné par sa projection plane. Mais comme il n'existe pas de procédé général permettant de distinguer des groupes donnés par des éléments et relations génératrices, le groupe du nœud est d'une importance moindre. On a tout simplement remplacé le problème des nœuds non-résolu par un problème, non résolu également, de la théorie des groupes.

2. ALEXANDER et REIDEMEISTER ont touché à d'autres invariants par le procédé suivant: On considère, au lieu de  $S - k$ , les variétés de recouvrement de  $S - k$  sans ramification, ou, ce qui revient au même, les variétés de recouvrement de  $S$  ramifiées le long de  $k$ . Ces variétés ont des groupes d'homologie qui en général sont différents pour des nœuds différents. Il s'agit avant tout ici des *recouvrements cycliques de nœuds*, dont je donnerai plus tard la définition. Le recouvrement cyclique à une infinité de feuillets a une importance toute particulière. Comme nous le verrons, c'est des groupes d'homologie de ce dernier recouvrement qu'on tire l'*invariant polynomial* d'Alexander  $\Delta(x)$ , ou comme on l'appelle tout court, le *polynôme L du nœud*. C'est un polynôme à coefficients entiers  $\Delta(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  qui est lié au nœud d'une façon invariante.

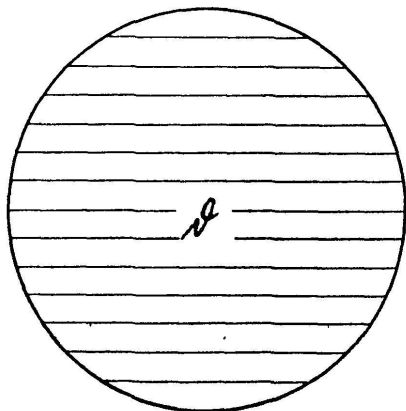
3. Les *invariants d'enlacement* des variétés cycliques de recouvrement sont d'autres invariants de nœud. Nous savons qu'il est possible d'attacher à toute paire d'éléments du groupe de torsion d'une variété à 3 dimensions orientée, un coefficient d'enlacement rationnel bien déterminé. Ces coefficients d'enlacement permettent de calculer les invariants d'enlacement. Ce sont des invariants du nœud, dont l'espace complémentaire possède une orientation spaciale déterminée, et ils changent en général avec cette orientation. A l'aide de ces invariants d'enlacement on peut parfois démontrer qu'un nœud n'est pas déformable en son symétrique par rapport à un plan. Au moyen de ces invariants on a par exemple démontré que le nœud des trèfles (Kleeblattschlinge) gauche et droit ne peuvent être déformés l'un dans l'autre (*fig. 1*); Dehn l'avait d'ailleurs déjà démontrer en considérant les automorphismes du groupe de nœud.

4. Citons finalement encore un invariant de nœud qui, il est vrai, n'est pas d'une grande importance pour distinguer des nœuds, mais qui se trouve en relation très étroite avec les invariants d'homologie 2. Il s'agit du *genre du nœud* qui est défini comme suit: Nous savons qu'il existe, pour tout nœud  $k$ , une surface orientable, sans singularités et sous-tendue par  $k$ .

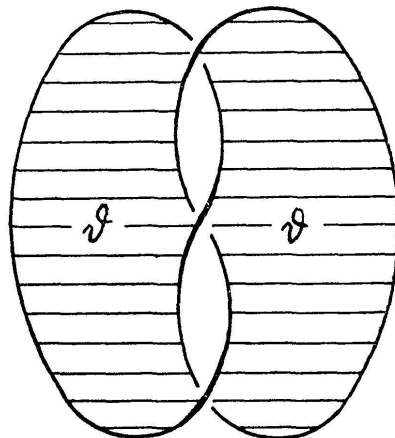


*Fig. 1*

Autrement dit il existe une surface orientable et sans singularités  $D$ , possédant un trou tel que le bord du trou soit justement  $k$ . Si  $k$  est équivalent au cercle on pourra choisir comme surface un élément à deux dimensions (*fig. 2*). Dans tous les autres cas  $D$  sera d'un genre supérieur, c'est-à-dire une sphère



*Fig. 2*



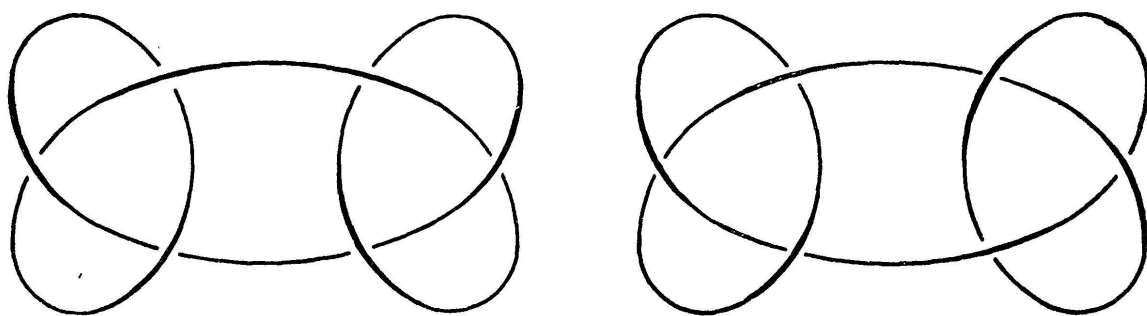
*Fig. 3*

avec  $h$  anses et un trou. Par exemple le nœud du trèfle est le bord d'un tore troué (*fig. 3*). Il est clair qu'on pourra faire passer par tout nœud une surface de genre arbitrairement grand, puisqu'on peut ajouter n'importe où, une anse à une surface qu'on aurait déjà sous-tendu par  $k$ . Il existe, par contre, pour tout nœud  $k$ , une surface de genre minimum, sous-tendue par  $k$ . C'est ce genre là qu'on appelle le genre du nœud. Ce genre est, il est clair, un invariant du nœud. Le cercle est de genre 0, alors que le nœud du trèfle est du genre 1.

Connaissant ce système d'invariants, deux questions s'imposent avant tout.

- A. *Dans quelle mesure les nœuds sont-ils caractérisés par ces invariants ?*
- B. *Ces invariants sont-ils indépendants ? Sinon quelles sont les relations qui existent entre eux ?*

J'aimerais vous exposer les résultats auxquels on est parvenu jusqu'à aujourd'hui. Tout d'abord une chose est claire: C'est que les groupes d'homologie 2) y compris le polynôme  $L$ , sont déterminés par le groupe du nœud 1). Ceci parce que les groupes fondamentaux des variétés de recouvrement de  $S - k$  sont des sous-groupes du groupe du nœud. Il en est autrement des invariants d'enlacement. Ceux-ci ne sont pas déterminés par le groupe du nœud. Par exemple: Le groupe du nœud est le même pour le produit de deux nœuds du trèfle droits et pour le produit



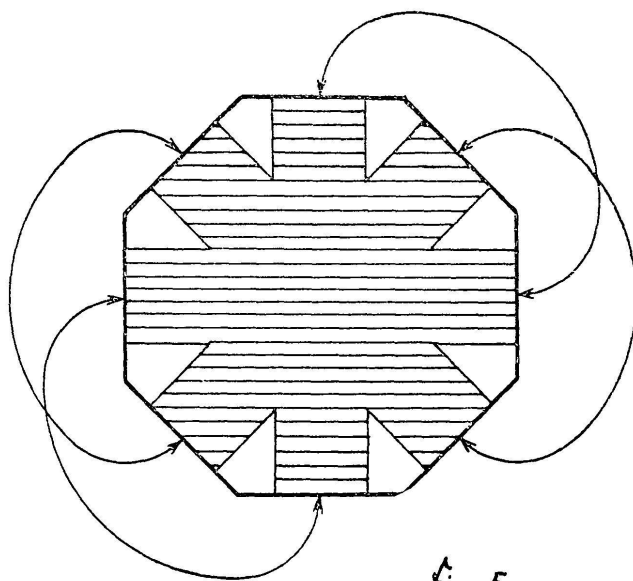
*Fig. 4*

d'un nœud du trèfle droit par un gauche (*fig. 4*), alors que les invariants d'enlacement de ces produits sont différents.

Il ne faudrait toutefois pas croire que le groupe du nœud est contenu dans les invariants d'enlacement. Nous rencontrerons, au contraire, une infinité de nœuds, dont les invariants d'enlacement sont les mêmes, et qui pourtant pourront être distingués les uns des autres grâce au groupe du nœud.

Nous savons que ALEXANDER ET BRIGGS ont calculé les groupes d'homologie des recouvrements à 2 et 3 feuillets, ainsi que le polynôme  $L$  de tous les nœuds comptant jusqu'à 9 recouvrements. Parmi ces 84 nœuds on rencontre 3 paires seulement, qu'on ne peut distinguer par les invariants d'homologie; pour ces 3 paires le groupe du nœud pourtant est efficace. Ceci montre la portée des invariants d'homologie.

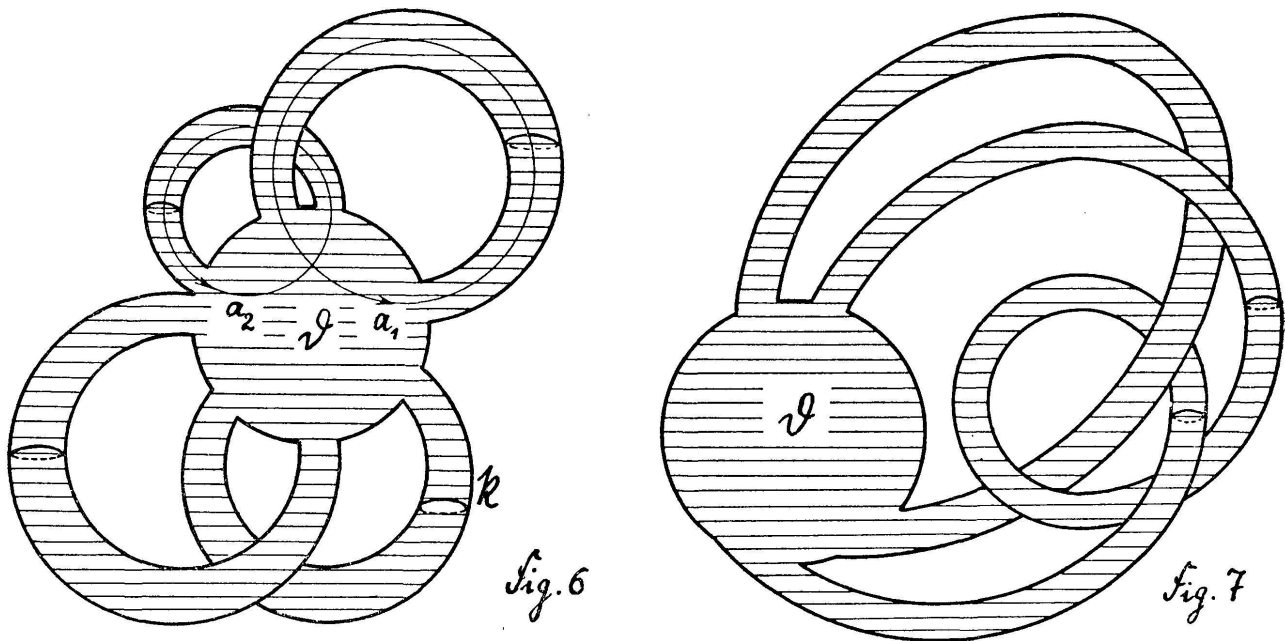
Pour avoir d'autres résultats concernant la portée des invariants 2) et 3), il est nécessaire de représenter ces derniers explicitement par des formules. Dans ce but nous partons du fait qu'il est possible de trouver pour tout nœud  $k$  une surface  $D$  orientable et sans singularités, sous-tendue par  $k$ . Soit  $D$



*Fig. 5*

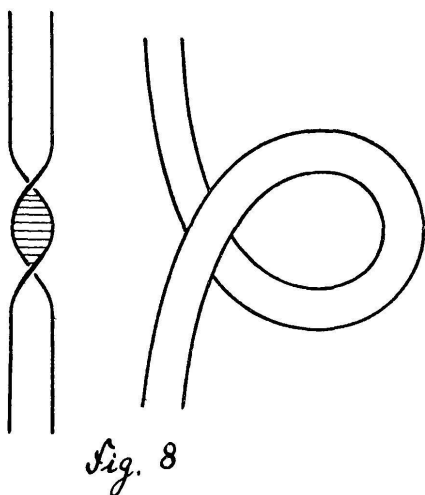
de genre  $h$ , c'est-à-dire une sphère avec  $h$  anses et un trou. Une telle surface avec un seul trou peut toujours être considérée comme un élément à 2 dimensions auquel on a ajouté  $2h$  rubans. Pour le voir développons la surface close de genre  $h$  en son polygone fondamental (*fig. 5*,  $h = 2$ ). On obtiendra un trou de la surface en découpant les angles du polygone. En identi-

fiant les côtés correspondants on obtient bien un élément à 2 dimensions auquel on a ajouté  $2h$  rubans. Il est vrai que la surface  $D$  n'aura pas toujours la position simple de la figure 6. Les rubans peuvent s'enlacer et se tordre. La figure 7 montre une surface de genre 1 avec un trou, immergée d'une manière un peu plus compliquée dans l'espace.



Par contre on pourra toujours atteindre la configuration suivante: 1) La projection de l'élément sur le plan est un disque. 2) En projection, les rubans n'ont que leurs attaches en commun

avec le disque; un ruban ne pourra donc jamais traverser le disque. 3) On peut admettre que les rubans ne sont pas tordus en projection, puisqu'un tour pourra toujours être remplacé par un recouplement du ruban (fig. 8).



On parvient à la variété cyclique de recouvrement  $S_g$  de la manière suivante: On coupe l'espace à trois dimensions  $S$ , dans lequel se trouve  $D$ , le long de  $D$ ;  $S$  devient une

variété à trois dimensions bordée, un feuillet à 3 dimensions  $\bar{S}$ . Le bord de  $S$  est formé par les deux côtés de la section que

nous appellerons  $D$  et  $xD$ . A tout point  $P$  du côté gauche correspond un point  $xP$  du côté droit et nous pourrions nous figurer que  $P$  et  $xP$  sont projetés sur un même point du plan. Les deux surfaces  $D$  et  $xD$  sont soudées l'une à l'autre le long de  $k$  et forment ensemble une surface close qui est la sphère avec  $2h$  anses. Après la coupe de l'espace on doit se représenter l'élément à deux dimensions comme une sphère et les rubans comme des tuyaux; ce que nous avons indiqué dans la figure 7 par de petits cercles méridiens autour des tuyaux. Le feuillet  $\bar{S}$  est la région extérieure à la surface fermée  $D + xD$ .

Le recouvrement cyclique à  $g$  feuillets  $S_g$  s'obtient de la façon suivante. On prend  $g$  exemplaires d'un tel feuillet, on soude le bord droit du feuillet  $i$  au bord gauche du feuillet  $i + 1$  et finalement le bord droit du feuillet  $g$  au bord gauche du premier feuillet. Si nous désignons en suivant les feuillets par  $\bar{S}, x\bar{S}, \dots, x^{g-1}\bar{S}$ , le bord droit  $x^{i+1}D$  de  $x_i\bar{S}$  sera identique au bord gauche de  $x^{i+1}\bar{S}$ , et en tournant autour du nœud  $k$  on aura le cycle suivant:

$$D, \bar{S}, xD, x\bar{S}, \dots, x^{g-1}D, x^{g-1}\bar{S}, D.$$

Ces  $g$  feuillets forment la variété de recouvrement cyclique à  $g$  feuillets  $S_g$  de  $S$  ramifiée le long de  $k$ . Quoique la surface  $D$  ait joué un rôle prépondérant dans sa construction, on voit aisément que  $S_g$  est indépendant du choix de  $D$ . On peut également caractériser  $S_g$  par la propriété suivante indépendamment de la surface sous-tendue:  $S_g$  est une variété de recouvrement de l'espace euclidien ramifié le long du nœud à  $g$  feuillets; une courbe  $\omega$  dans  $S_g$ , correspondante à une courbe fermée  $\omega_0$  de l'espace euclidien n'est fermée que lorsque  $\omega_0$  et le nœud ont un coefficient d'enlacement divisible par  $g$ .

Pour calculer le *groupe d'homologie* de  $S_g$ , nous cherchons tout d'abord le groupe d'homologie de  $\bar{S}$ . Il est, pour cela, nécessaire d'avoir un système d'éléments générateurs ainsi qu'un système de relations spécifiques.

Comme courbes de base nous choisirons les suivantes: Traçons sur  $D$ , donc sur le bord gauche du feuillet  $\bar{S}$ ,  $2h$  paires de coupes conjuguées fermées simples.

$$a_1, a_2, \dots, a_{2h-1}, a_{2h}.$$

Chacune parcourt un ruban et sera orientée comme dans la figure 6. Soient  $xa_1, \dots, xa_{2h}$  les courbes correspondantes de  $xD$ . On voit aisément que ces  $4h$  courbes

$$a_1, \dots, a_{2h}, xa_1, \dots, xa_{2h}, \quad (1)$$

engendrent le groupe d'homologie de  $S$ .

Nous donnons sans démonstration les relations:

$$\begin{aligned} a_1 \sim & (\nu_{i2} a_1 - \nu_{i1} a_2) + \dots + (\nu_{i,2h} a_{2h-1} - \nu_{i,2h-1} a_{2h}) - \\ & - (\nu_{i2} xa_1 - \nu_{i1} xa_2) - \dots - (\nu_{i,2h} xa_{2h-1} - \nu_{i,2h-1} xa_{2h}) \\ & \text{(homologie en } \bar{S}, \quad i = 1, \dots, 2h), \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\nu_{ik}$  désigne le coefficient d'enlacement du  $i$ -ième ruban avec le  $k$ -ième. Plus exactement: Nous considérons en projection les rubans  $a_i$  et  $a_k$  en tous les endroits où  $a_k$  passe sur  $a_i$ . Si  $a_k$  passe de gauche à droite sur  $a_i$ , nous donnerons à ce croisement l'indice  $+1$ , dans le cas contraire  $-1$  (fig. 9).  $\nu_{ik}$  est alors la

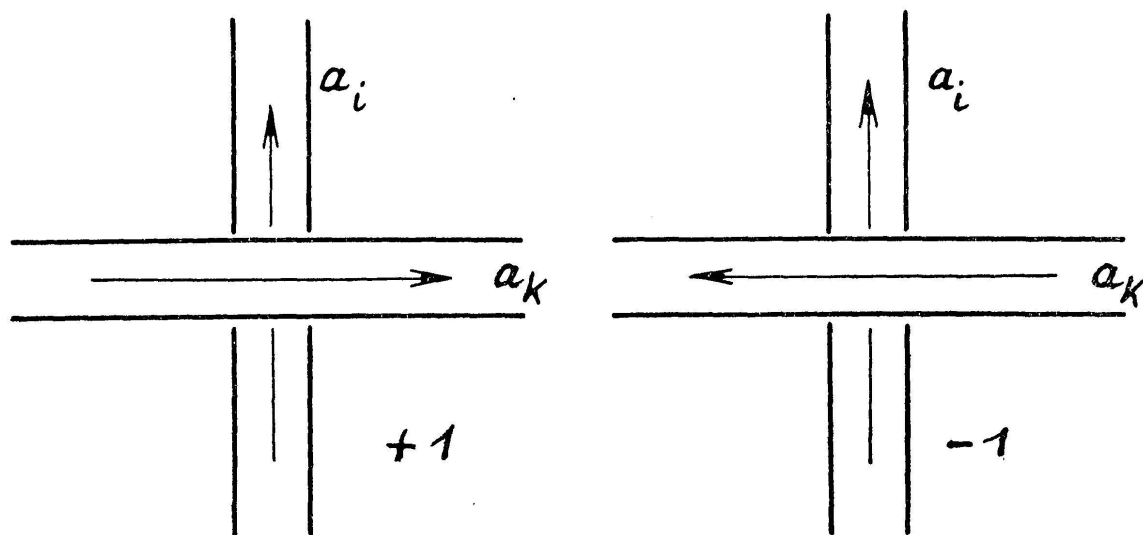


Fig. 9

somme de ces indices. Dans la figure 7 on a par exemple:  $\nu_{11} = -1$ ,  $\nu_{12} = 1$ ,  $\nu_{21} = 0$ ,  $\nu_{22} = 0$ . Il est possible d'écrire plus simplement la relation (2):

$$a_i \sim \sum_{k=1}^{2h} \gamma_{ik} (a_k - xa_k). \quad (2')$$



On peut considérer le symbole  $x$  qui jusqu'à présent n'avait été introduit que formellement, comme un opérateur du groupe d'homologie. On peut, en effet, l'interpréter comme le mouvement de superposition de  $S_\infty$  sur lui-même, transformant chaque feuillet dans le suivant. Cette représentation topologique de  $S_\infty$  sur lui-même conduit à un automorphisme du groupe d'homologie;  $x$  est donc un opérateur du groupe. En envisageant  $x$  sous cet angle, on peut prendre comme éléments générateurs les  $2h$  courbes  $a_1, \dots, a_{2h}$ , car les autres en découlent par l'opération  $x$ . De même les relations (6) découlent de (2') par l'application de  $x$ ; la matrice des coefficients de (2') est:

$$E - \Gamma + x\Gamma . \quad (7)$$

D'après un théorème de la théorie des groupes, le déterminant de cette matrice est un invariant du groupe avec opérateurs. Cet invariant n'est, il est vrai, déterminé qu'à une unité du domaine des coefficients près, c'est-à-dire qu'à  $\pm x^n$  près. Le déterminant

$$|E - \Gamma + x\Gamma| \quad (8)$$

est, à ce facteur arbitraire près, justement le polynôme  $L$  du nœud; son degré est évidemment  $\leq 2h$ .

Passons maintenant aux *invariants d'enlacement* de  $S_g$ . Pour calculer les invariants d'enlacement d'une variété quelconque orientable  $M^3$ , on a besoin de:

Un système d'éléments générateurs

$$a_1, \dots, a_m$$

du groupe d'homologie de dimension 1. On a entre les  $a_i$  certaines homologies

$$\sum \alpha_{ik} a_k \sim 0 .$$

Il existe donc des chaînes  $A_i$  à deux dimensions dont le bord est  $\sum \alpha_{ik} a_k$ . Soient maintenant  $a_1^*, \dots, a_m^*$  des courbes fermées resp. homologues à  $a_1, \dots, a_m$ , mais n'ayant aucun point commun avec elles.  $a_h^*$  n'a donc aucun point commun avec le bord de  $A_i$ . Sous ces conditions le coefficient d'intersection (*Schnittzahl*) est

$$\mathcal{S} (A_i, a_k^*) = \beta_{ik} .$$

Les matrices  $(\alpha_{ik})$  et  $(\beta_{ik})$  étant connues, on peut calculer les coefficients d'enlacements par un procédé purement algébrique. Dans le cas du recouvrement du nœud  $S_g$  la matrice  $(\alpha_{ik})$  devient :

$$(\alpha_{ik}) = (\Gamma - E)^g - \Gamma^g, \quad (9)$$

alors que la matrice  $(\beta_{ik})$  est

$$(\beta_{ik}) = (\Gamma - E)^g \Delta, \quad (10)$$

où  $\Delta$  est la matrice constante suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & -1 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Les formules (4), (8), (9), (10) montrent que le polynome L, le groupe d'homologie et les invariants d'enlacement de tous les recouvrements cycliques  $S_g$ , sont donnés par la matrice  $\Gamma$ , donc finalement par les coefficients d'enlacement  $\nu_{ik}$  des rubans de la surface D sous-tendue par k.*

On voit par là qu'il existe une infinité de nœuds, dont les invariants 2) et 3) coïncident. Car la position relative des rubans n'est déterminée en aucune façon par la connaissance des  $\nu_{ik}$ . Il est même possible de donner une infinité de positions de surface enrubannées, dont les  $\nu_{ik}$  sont les mêmes, mais qu'on ne peut déformer l'une dans l'autre. On peut en particulier construire des nœuds dont les invariants 2) et 3) sont ceux du cercle. C'est-à-dire qu'il existe des nœuds dont les recouvrements cycliques  $S_g$  sont des sphères ou des espaces de Poincaré. Il est alors nécessaire de considérer le groupe du nœud pour pouvoir les distinguer.

Pour terminer, disons encore un mot sur le genre du nœud. Il n'existe pas de procédé général pour calculer le genre d'un nœud. Par contre il est facile de trouver des limites pour le genre. Si le nœud est donné par sa projection plane, on peut immédiatement trouver une limite supérieure, en faisant passer une surface par le nœud; pour le faire on dispose d'un procédé très simple. Des limites inférieures seront données par les formules du groupe d'homologie et du polynome L. Si  $h$  est le genre du

nœud  $k$ , et si l'on a fait passer par  $k$  une surface de genre  $h$ , alors la matrice  $\Gamma$  est à  $2h$  lignes, et le polynôme  $L$  aura au plus le degré  $2h$ . Donc :

$$\text{Degré du polynôme } L \leq \text{double du genre du nœud.} \quad (11)$$

D'autre part le groupe d'homologie de  $S_g$  est engendré par  $2h$  courbes  $a_1, \dots, a_{2h}$ . On a donc :

$$\text{Nombre minimal des éléments générateurs du groupe d'homologie de } S_g \leq \text{double du genre du nœud.}$$

Si par hasard la limite inférieure coïncide avec la limite supérieure, on a le genre du nœud. Ce cas se présente pour la

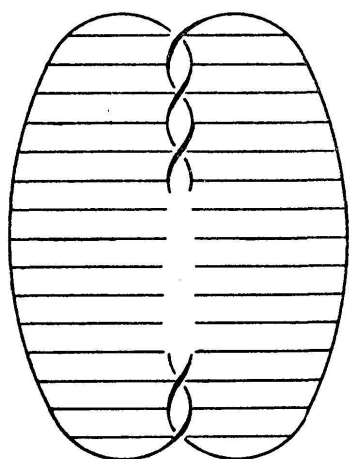


Fig. 10

tresse à deux brins avec  $m$  croisements ( $m$  impaire, dans la fig. 10). La surface hachurée de la figure 10 a le genre  $\frac{m-1}{2}$  qu'on trouve en comptant les points, les arêtes et les facettes. D'autre part, le groupe d'homologie du recouvrement  $S_m$  à  $m$  feuillets, possède exactement  $(m-1)$  coefficients de torsion de valeur 2; le nombre minimal des éléments générateurs est par conséquent  $m-1$ . Le nœud est donc de genre  $\frac{m-1}{2}$ . Comme  $m$  est

impair arbitraire, on a démontré par là l'existence de nœuds d'un genre quelconque. On trouvera de la même façon le genre des autres nœuds du tore ainsi que des 84 nœuds énumérés par Alexander et Briggs.

# RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES <sup>1</sup>

PAR

Georges DE RHAM (Lausanne).

---

Le fait que la Topologie intervient dans des problèmes relatifs aux intégrales multiples a été aperçu déjà par les fondateurs de la topologie des variétés: RIEMANN, BETTI et POINCARÉ, à propos de l'étude des intégrales attachées à une variété algébrique. M. CARTAN, amené sur ce même sujet par ses recherches sur les groupes continus, a formulé pour la première fois d'une manière précise les deux premiers des trois théorèmes dont je vais parler au début, et qui résument, à mon avis, toutes les relations entre la topologie et la théorie des intégrales partout régulières sur une variété close.

## 1. — LES TROIS THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

Considérons une variété à  $n$  dimensions  $V$ , close et orientable. Une intégrale  $p$ -uple sur cette variété est un nombre

$$I = \int_c \omega$$

qui dépend de deux choses: l'élément différentiel  $\omega$  et le champ d'intégration  $c$ .

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

L'élément  $\omega$ , que j'appellerai forme de degré  $p$  ou  $p$ -forme, est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{(i_1 \dots i_p)} A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_p} ,$$

les  $A$  sont des fonctions continues et à dérivées continues des coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sur  $V$ . Le champ d'intégration  $c$ , que j'appellerai champ à  $p$  dimensions ou  $p$ -champ, est formé par une ou plusieurs variétés orientées à  $p$  dimensions tracées sur  $V$ . Les  $p$ -champs peuvent être additionnés, soustraits et multipliés par un entier quelconque.

Ces intégrales jouissent des mêmes propriétés générales que les intégrales curvilignes, de surface ou triples dans l'espace ordinaire, qui en sont des cas particuliers. D'abord,  $I$  est fonction linéaire du champ  $c$ , et fonction linéaire aussi de la forme  $\omega$ . Ensuite, on a la formule générale de Stokes

$$\int_c \omega' = \int_{f(c)} \omega ,$$

$\omega$  est une  $p$ -forme régulière quelconque,  $c$  est un  $(p + 1)$ -champ quelconque,  $\omega'$  est la  $(p + 1)$ -forme appelée *dérivée (extérieure) de  $\omega$* ,  $f(c)$  le  $p$ -champ frontière de  $c$ . Cette formule générale contient comme cas particuliers les formules bien connues d'Ampère-Stokes, de Green et d'Ostrogradsky.

Remarquons ici l'analogie qui existe entre l'opération de dérivation appliquée aux formes et celle du passage à la frontière appliquée aux champs. Elles sont toutes deux linéaires, et répétées deux fois de suite, elles produisent toutes deux zéro :

$$(\omega')' = 0 , \quad f(f(c)) = 0 .$$

Les champs dont la frontière est nulle sont appelés champs fermés ou *cycles*. Les formes dont la dérivée est nulle sont appelées *exactes*. Par analogie avec la définition des homologies entre les champs, je dirai que deux  $p$ -formes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont *homologues*,  $\omega_1 \sim \omega_2$ , si leur différence  $\omega_1 - \omega_2$  est identique à la dérivée d'une  $(p - 1)$ -forme régulière sur toute la variété  $V$ .

Un intérêt particulier s'attache aux valeurs que peut prendre

l'intégrale d'une forme exacte étendue à un cycle, valeurs qu'on appelle *périodes*. La formule de Stokes permet de faire une première remarque évidente: *l'intégrale d'une forme exacte étendue à un cycle homologue à zéro est nulle. Étendue à deux cycles homologues entre eux, elle prend deux valeurs égales.*

Si le  $p$ -ième nombre de Betti de  $V$  est égal à  $B$ , on peut trouver, comme on sait, un système de  $B$   $p$ -cycles  $c_1, c_2, \dots, c_B$ , qui ne sont reliés par aucune homologie et tels que tout  $p$ -cycle est homologue à une combinaison linéaire à coefficients entiers de ces  $B$   $p$ -cycles. Un tel système est dit fondamental, les cycles qui le constituent seront dits *cycles fondamentaux*.

Il résulte de là que toute période d'une  $p$ -forme exacte est égale à une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes relatives aux cycles fondamentaux (ou *périodes fondamentales*).

Existe-t-il des formes exactes, régulières sur toute la variété  $V$ , ayant des périodes fondamentales arbitrairement choisies ? La réponse est affirmative et constitue le

THÉORÈME I. — *Il existe toujours une  $p$ -forme exacte et régulière sur  $V$ , ayant des périodes fondamentales arbitrairement données à l'avance.*

La formule de Stokes conduit à une seconde remarque évidente: c'est que *les périodes d'une forme homologue à zéro sont toutes nulles*. Le théorème suivant affirme la réciproque.

THÉORÈME II. — *Toute  $p$ -forme exacte et régulière sur  $V$ , dont les périodes sont toutes nulles, est la dérivée d'une  $(p - 1)$ -forme régulière sur  $V$ .*

On peut aussi énoncer ces théorèmes de la manière suivante:

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que le  $p$ -cycle  $c$  soit homologue à zéro est que*

$$\int_c \omega = 0 .$$

*quelle que soit la  $p$ -forme exacte  $\omega$ .*

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que la p-forme exacte  $\omega$  soit homologue à zéro est que*

$$\int_c \omega = 0 .$$

*quel que soit le p-cycle  $c$ .*

Sous cette forme, ils font penser au théorème suivant (théorème de dualité de Poincaré), avec lequel ils sont en relation étroite. Désignons par  $I(c^p \cdot c^{n-p})$  le nombre algébrique des points d'intersections du  $p$ -cycle  $c^p$  avec le  $(n - p)$ -cycle  $c^{n-p}$ . Alors: *la condition nécessaire et suffisante pour que le cycle  $c^p$  soit homologue à zéro, c'est que  $I(c^p \cdot c^{n-p}) = 0$  quel que soit le cycle  $c^{n-p}$ .*

Généralisons un peu la notion de cycle, en donnant encore ce nom aux combinaisons linéaires à coefficients constants quelconques (et non nécessairement entiers) de cycles ordinaires. Le symbole  $I(c^n \cdot c^{n-p})$  conserve sa signification, mais il n'est plus nécessairement égal à un nombre entier. Il résulte du théorème de Poincaré qu'à toute  $p$ -forme exacte  $\omega$  on peut associer un  $(n - p)$ -cycle  $c^{n-p}$  tel que

$$\int_{c^p} \omega = I(c^p \cdot c^{n-p})$$

quel que soit le  $p$ -cycle  $c^p$ . Il est clair que ce cycle associé n'est déterminé qu'à une homologie près, et que sa connaissance équivaut à celle des périodes fondamentales de  $\omega$ .

En tenant compte du théorème de Poincaré, le contenu de nos deux théorèmes revient alors à ceci :

I. *A tout  $(n - p)$ -cycle correspond une p-forme exacte associée.*

II. *Pour qu'une p-forme exacte soit homologue à zéro, il suffit que le  $(n - p)$ -cycle associé le soit.*

De deux formes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , de degrés  $p$  et  $q$ , on déduit une forme bien déterminée de degré  $p + q$ , leur produit (extérieur)  $\omega_1 \omega_2$ . Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des formes exactes, le produit l'est aussi. Il est

alors naturel de se demander comment les périodes du produit dépendent de celles des facteurs. La réponse est fournie par le

THÉORÈME III. — *Si  $c_1$  et  $c_2$  sont les cycles associés à  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , le cycle associé au produit  $\omega_1 \omega_2$  est le cycle  $c_2 \cdot c_1$  intersection de  $c_2$  avec  $c_1$ .*

Supposons en particulier que  $q = n - p$ ; le produit  $\omega_1 \omega_2$  est alors une  $n$ -forme dont la seule période fondamentale est

$$\int_V \omega_1 \omega_2$$

et le théorème III se réduit à l'égalité

$$\int_V \omega_1 \omega_2 = I(c_2 \cdot c_1) .$$

En combinant cette égalité avec le théorème de dualité de Poincaré, on obtient le résultat suivant:

*Pour que la  $p$ -forme exacte  $\omega_1$  soit homologe à zéro, il faut et il suffit que*

$$\int_V \omega_1 \omega_2 = 0 ,$$

*quelle que soit la  $(n - p)$ -forme exacte  $\omega_2$ .*

## 2. — APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS.

Voici une application intéressante de ce dernier résultat. Supposons que  $V$  soit la riemannienne à 4 dimensions qui correspond à une surface algébrique, et  $\omega_1$  l'élément d'une intégrale double de première espèce attachée à cette surface. Si  $\omega_2$  est l'imaginaire conjuguée de  $\omega_1$ , on voit immédiatement que

$$\int_V \omega_1 \omega_2 > 0 .$$

Donc  $\omega_1$  ne peut pas être homologe à zéro: *une intégrale double de première espèce ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles.*

C'est le théorème démontré par M. W. V. D. HODGE en 1930. (Dans cet ordre d'idées, le théorème III est le véritable fondement topologique des relations de Riemann et de M. Hodge entre les périodes des intégrales abéliennes.)

Dans un ordre d'idées voisin, je désire mentionner un complément important apporté par M. Hodge au théorème I pour les variétés  $V$  qui sont des espaces de Riemann.

Supposons d'abord que  $V$  soit une surface de genre  $p$ ; le premier nombre de Betti est égal à  $2p$ , il y a donc  $2p$  cycles fondamentaux et une intégrale curviligne possède  $2p$  périodes fondamentales. Or, depuis Riemann, on sait dans ce cas beaucoup plus que ce que nous apprend le théorème I, on sait en effet qu'il existe une intégrale *harmonique* ayant des périodes fondamentales arbitraires, et c'est ce *théorème d'existence d'intégrales harmoniques* que M. Hodge a généralisé de la manière suivante.

Dans le plan, avec des coordonnées rectangulaires  $xy$ , la condition pour que

$$\int A dx + B dy$$

soit harmonique peut s'énoncer ainsi:

1° La forme  $\omega = A dx + B dy$  doit être exacte ( $\omega' = 0$  ou  $A'_y = B'_x$ ).

2° La forme  $\omega^* = -B dx + A dy$  (que j'appellerai adjointe à  $\omega$ ) doit être aussi exacte ( $\omega^{*'} = 0$  ou  $A'_x + B'_y = 0$ ).

Si  $\omega = df$ , la première condition est automatiquement vérifiée et la seconde se réduit à l'équation de Laplace  $\Delta f = 0$ . La notion de forme adjointe n'est pas topologique comme celles de dérivée extérieure ou de produit extérieur, mais elle fait intervenir la métrique; on peut considérer  $\omega$  comme le travail élémentaire du vecteur  $\rho = (A, B)$ ,  $\omega^*$  est alors le travail élémentaire du vecteur  $\rho^* = (-B, A)$  qui se déduit de  $\rho$  par une rotation de 90 degrés. Remarquons aussi que l'élément de l'intégrale de Dirichlet,  $(A^2 + B^2) dx dy$ , n'est pas autre chose que le produit de  $\omega$  par la forme adjointe  $\omega^*$ .

Dans un espace de Riemann à  $n$  dimensions, toute  $p$ -forme  $\omega$  peut être considérée comme le produit scalaire de l'élément de variété à  $p$  dimensions par un système de  $p$ -vecteurs déterminé

en chaque point de l'espace; la forme adjointe  $\omega^*$ , de degré  $n - p$ , est alors le produit scalaire de l'élément de variété à  $n - p$  dimensions par le système des  $(n - p)$ -vecteurs supplémentaires<sup>1</sup>. Toute  $p$ -forme  $\omega$  possède donc une forme adjointe  $\omega^*$ , de degré  $n - p$ ; et le produit  $\omega\omega^*$ , égal au produit de l'élément de volume à  $n$  dimensions par le carré de la mesure du système de  $p$ -vecteurs déterminant  $\omega$ , est une  $n$ -forme essentiellement positive.

On peut maintenant généraliser la notion d'intégrale harmonique en disant que,  $\omega$  étant une  $p$ -forme régulière sur l'espace de Riemann  $V$ ,  $\int \omega$  est harmonique si  $\omega$  et la forme adjointe  $\omega^*$  sont toutes deux exactes. Cette définition posée, M. Hodge démontre l'existence d'une intégrale  $p$ -uple harmonique ayant des périodes arbitrairement données en suivant la méthode de Riemann-Hilbert du principe de Dirichlet. Considérant la famille de toutes les  $p$ -formes exactes et régulières sur l'espace  $V$  et ayant les périodes fondamentales données, il prouve qu'il y en a une qui rend l'intégrale  $n$ -uple  $\int_V \omega\omega^*$  minimum et qui fournit l'intégrale harmonique cherchée. Pour s'assurer de l'unicité, il suffit de prouver qu'une intégrale harmonique non identiquement nulle ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles, et cela résulte de l'inégalité  $\int_V \omega\omega^* > 0$  (même raisonnement que pour les intégrales doubles de première espèce).

Voici un autre théorème qui apporte un complément analogue au théorème II:

*$\omega$  étant une  $(p + 1)$ -forme régulière sur l'espace de Riemann  $V$ , et homologue à zéro, il existe une forme  $\omega$ , régulière sur  $V$ , telle que  $\omega' = \omega$  et dont la forme adjointe est homologue à zéro. Cette forme  $\omega$ , unique, est caractérisée, dans la famille de toutes les formes régulières dont la dérivée est égale à  $\omega$ , par la propriété de rendre l'intégrale  $\int_V \omega\omega^*$  minimum.*

Dans le cas  $n = 2$  et  $p = 1$ , cela revient à affirmer l'existence

<sup>1</sup> Voir, par exemple: E. CARTAN, La Géométrie des espaces de Riemann (*Mémorial des Sciences mathématiques*).

d'une fonction uniforme sur une surface donnée  $S$ , dont le laplacien soit égal à une fonction donnée  $f$  telle que  $\int_S f d\sigma = 0$ .

### 3. — PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.

Considérons, pour fixer les idées, une variété à 3 dimensions sur laquelle on a un cycle à 2 dimensions  $c^2$  non homologue à zéro. Il s'agit de construire une forme exacte de degré 2, régulière sur toute la variété, dont la période relative à  $c^2$  ne soit pas nulle. Une telle forme

$$\omega = A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

peut être considérée comme l'expression du débit élémentaire d'un courant électrique (stationnaire) de volume, son intégrale étendue à un champ  $c$  à 2 dimensions est alors le débit total à travers  $c$  et la condition que la forme soit exacte ( $\omega' = 0$  ou  $A'_x + B'_y + C'_z = 0$ ) exprime que le courant est conservatif. Notre problème consiste donc à construire un courant de volume, régulier et conservatif sur toute la variété, dont le débit total à travers  $c^2$  ne soit pas nul.

D'après le théorème de dualité de Poincaré, il existe un cycle à une dimension  $c^1$ , dont le nombre algébrique des points d'intersections avec  $c^2$  n'est pas nul:  $I(c^2, c^1) \neq 0$ . Imaginons que les lignes constituant  $c^1$  (lignes fermées et orientées) soient des fils métalliques parcourus par un courant électrique d'intensité constante égale à un. Le débit de ce courant à travers  $c^2$  est égal à  $I(c^2, c^1)$ , donc non nul. Ce courant est d'ailleurs conservatif (car  $c^1$  est fermé). On conçoit ensuite la possibilité d'étaler un peu ce courant, de manière qu'il remplisse une sorte de tube entourant  $c^1$ , avec une intensité de volume continue à l'intérieur du tube et nulle sur sa frontière. La forme  $\omega$ , égale au débit élémentaire de ce courant dans le tube et nulle en dehors, satisfait à toutes les conditions requises.

On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela

suggère l'idée que dans une variété à  $n$  dimensions  $V$ , un  $p$ -champ et une  $(n - p)$ -forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à  $p$  dimensions. Telle est l'idée qui m'a conduit à la démonstration des trois théorèmes dont on vient de parler. Je vais maintenant esquisser la théorie de ces courants et montrer comment elle conduit de manière très naturelle à la théorie des résidus d'intégrales doubles.

#### 4. — THÉORIE DES COURANTS.

DÉFINITIONS. — Un  $p$ -courant élémentaire est l'ensemble  $(c^{p+k}, \omega^k)$  d'un  $(p + k)$ -champ  $c^{p+k}$  et d'une  $k$ -forme  $\omega$  (définie au moins sur  $c^{p+k}$ ).  $p$  est la dimension du courant. Comme  $0 \leq p + k \leq n$  et  $0 \leq k \leq n$ , l'entier  $k$  ne peut prendre que les  $n - p + 1$  valeurs  $0, 1, \dots, (n - p)$ ; il y a  $(n - p + 1)$  types de  $p$ -courants élémentaires.

Un  $p$ -courant est la réunion d'un nombre fini de  $p$ -courants élémentaires.

*Addition et multiplication par un nombre.* — La somme  $C_1 + C_2$  de deux  $p$ -courants  $C_1$  et  $C_2$  est le  $p$ -courant formé par la réunion des  $p$ -courants élémentaires constituant  $C_1$  et  $C_2$ .

Le produit du  $p$ -courant élémentaire  $C = (c, \omega)$  par le nombre  $\lambda$  est le  $p$ -courant élémentaire  $C = (c, \lambda\omega)$ . Pour multiplier un courant quelconque par  $\lambda$ , on multipliera chacun des courants élémentaires qui le constitue par  $\lambda$ .

*Conventions de simplification.*

$$(c, \omega) = 0 \quad \text{si } c = 0 \quad \text{ou si } \omega = 0 \quad \text{sur } c .$$

$$(\lambda c, \omega) = \lambda (c, \omega) .$$

$$(c_1, \omega) + (c_2, \omega) = (c_1 + c_2, \omega) . \quad (c, \omega_1) + (c, \omega_2) = (c, \omega_1 + \omega_2) .$$

*Produit de deux courants.* — Le produit du  $p$ -courant élémentaire  $(c^{p+k}, \omega^k)$  par le  $q$ -courant élémentaire  $(c^{q+l}, \omega^l)$  est le  $(p + q - n)$ -courant élémentaire.

$$(c^{p+k}, \omega^k) (c^{q+l}, \omega^l) = (-1)^{k(n-q-l)} (c^{p+k} \cdot c^{q+l}, \omega^l \omega^k)$$

où  $c^{p+k} \cdot c^{q+l}$  est l'intersection de  $c^{p+k}$  avec  $c^{q+l}$  et  $\omega^l \omega^k$  le produit (extérieur) de  $\omega^l$  par  $\omega^k$ .

Le produit de deux courants quelconques s'obtient par la règle de distribution (tout courant étant la somme de courants élémentaires).

*Dérivé d'un courant.* — Le dérivé du  $p$ -courant élémentaire  $(c^{p+k}, \omega^k)$  est le  $(p-1)$ -courant

$$d(c^{p+k}, \omega^k) = (c, \omega') + (-1)^k (f(c), \omega)$$

où  $\omega'$  est la  $(k+1)$ -forme égale à la dérivée extérieure de  $\omega^k$  et  $f(c)$  le  $(p+k-1)$ -champ frontière du  $(p+k)$ -champ  $c^{p+k}$ .

Le dérivé d'un courant est la somme des dérivés des courants élémentaires qui le constituent.

*Indice d'un o-courant.* — On appellera *indice* du  $o$ -courant élémentaire  $C^0 = (c^k, \omega^k)$  le nombre

$$I(C^0) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \int_{c^k} \omega^k .$$

L'indice d'un courant quelconque est égal par définition à la somme des indices des courants élémentaires qui le constituent.

Si  $k=0$ ,  $c^k$  est un  $o$ -champ, c'est-à-dire un système de points  $P_i$  (en nombre fini) affectés de coefficients  $k_i$ :  $c^0 = \sum_i k_i P_i$ ;

$\omega^k$  est une fonction de point  $\omega^0 = f(P)$  et le signe  $\int_{c^k} \omega^k$  est alors défini par

$$\int_{c^0} \omega^0 = \sum_i k_i f(P_i) .$$

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS DÉFINIES. — a) Les  $p$ -courants forment un espace vectoriel.

b) La multiplication de deux courants est une opération distributive par rapport à l'addition, associative, et pseudo-commutative:  $C^p \cdot C^q = (-1)^{(n-p)(n-q)} C^q \cdot C^p$ ,  $p$  et  $q$  étant les dimensions de  $C^p$  et  $C^q$ .

c) La dérivation est une opération linéaire:  $d(\lambda C_1 + \mu C_2)$

$= \lambda dC_1 + \mu dC_2$ . Le second dérivé est toujours nul:  $d(dC) = 0$ . Le dérivé d'un produit est donné par la formule

$$d(C^p \cdot C^q) = C^p \cdot dC^q + (-1)^{n-p} dC^p \cdot C^q.$$

d) L'indice d'un  $o$ -courant est fonction linéaire de ce  $o$ -courant, et si  $C^0 = dC^1$ ,  $I(C^0) = I(dC^1) = 0$ .

REMARQUES. — a) La théorie précédente contient les deux théories des champs et des formes.

Appliquées à l'intérieur du système des courants du type  $(c, 1)$ , les opérations définies n'en font pas sortir et coïncident avec les opérations de la théorie des champs appliquées à  $c$ : la multiplication et la dérivation coïncident respectivement avec l'intersection et le passage à la frontière. L'indice d'un  $o$ -courant de ce type,  $I(c, 1)$ , est égal à la somme des coefficients des points du  $o$ -champ  $c$ , et si  $c = c^p \cdot c^{n-p}$ ,  $I(c, 1)$  est égal au nombre  $I(c^p \cdot c^{n-p})$  des points d'intersection de  $c^p$  avec  $c^{n-p}$ .

Appliquées à l'intérieur du système des courants du type  $(V, \omega)$ , les opérations définies n'en font pas sortir et coïncident avec les opérations de même nom de la théorie des formes appliquées à  $\omega$ . L'indice d'un  $o$ -courant  $(V, \omega)$  de ce type est égal (au signe près) à l'intégrale de la forme  $\omega$  étendue à  $V$ .

Nous conviendrons par suite de considérer  $(V, \omega)$  et  $\omega$  comme identiques, de même que  $(c, 1)$  et  $c$ .

Remarquons encore que, comme  $(c, \omega) = (c, 1)(V, \omega)$ , tout courant est une somme de produits d'un champ par une forme. Le  $n$ -courant  $(V, 1)$ , identique à la fois au  $n$ -champ  $V$  et à la  $o$ -forme  $1$ , joue le rôle d'unité dans la multiplication.

Dans le langage des algébristes, les systèmes des courants, des formes et des champs sont des algèbres, et l'algèbre des courants est le produit direct de l'algèbre des formes et de l'algèbre des champs.

b) Pour que cette notion de courant ne paraisse pas trop artificielle, indiquons une interprétation physique des 1-courants et des  $o$ -courants dans l'espace ordinaire.

Un courant électrique (stationnaire) peut toujours être représenté par un 1-courant. Les trois types possibles de 1-courants dans l'espace,  $(c^{k+1}, \omega^k)$  ( $k = 0, 1, 2$ ), représentent respec-

tivement les courants linéaires ( $k = 0$ ), superficiels ( $k = 1$ ), ou de volume ( $k = 2$ ).  $c^{k+1}$  est le support (à  $(k + 1)$  dimensions) du courant,  $\omega^k$  est le débit élémentaire à travers l'élément de variété à  $k$  dimensions tracé sur  $c^{k+1}$ .

Une distribution de masse dans l'espace est représentée par un  $o$ -courant. Les quatre types possibles de  $o$ -courants,  $(c^k, \omega^k)$  (pour  $k = 0, 1, 2, 3$ ) représentent respectivement les masses ponctuelles ( $k = 0$ ), linéaires ( $k = 1$ ), superficielles ( $k = 2$ ), ou de volume ( $k = 3$ ).  $c^k$  est le support des masses,  $\omega^k$  mesure la masse contenue dans un élément de  $c^k$ .

L'indice d'un  $o$ -courant a aussi une interprétation physique simple. Soit  $C^1$  le 1-courant qui représente un courant électrique,  $c^2$  un champ à 2 dimensions. Le produit  $(c^2, 1) \cdot C^1$  est un  $o$ -courant, son indice est le débit d'électricité à travers  $c^2$  (quel que soit le type de  $C^1$ , même s'il est une somme de courants des trois types).

Soit encore  $C^0$  le  $o$ -courant qui représente une distribution de masses,  $c^3$  un 3-champ. Le produit  $(c^3, 1) \cdot C^0$  est un  $o$ -courant dont l'indice est la quantité de masse contenue dans  $c^3$ . L'indice de  $C^0$  est la masse totale répartie dans tout l'espace.

Considérons enfin la dérivation. Si  $C^1$  est un 1-courant qui représente un courant électrique, son dérivé  $dC^1$  est le  $o$ -courant qui représente la répartition des sources (positives et négatives) d'électricité.

c) A tout  $(n - p)$ -courant  $C^{n-p}$  correspond une fonctionnelle linéaire de  $p$ -courant

$$F(C^p) = I(C^p \cdot C^{n-p}) .$$

Cela permet, dans des cas assez généraux, de déterminer le  $(n - p)$ -courant  $C^{n-p}$  par les valeurs de la fonctionnelle correspondante sur un certain ensemble de  $p$ -courants. C'est ainsi qu'une  $p$ -forme  $\omega$  est déterminée par les valeurs de l'intégrale  $\int_c \omega$  pour tout champ  $c$ .

Il faut remarquer toutefois que, l'intersection de deux champs pouvant être indéterminée, le produit  $C^p \cdot C^{n-p}$  et par suite l'indice  $I(C^p \cdot C^{n-p})$  ne sont pas déterminés pour tous les couples de courants  $C^p, C^{n-p}$ .

5. — THÉORIE DES RÉSIDUS.

Nous avons supposé que les formes  $\omega$  introduites dans la théorie des courants étaient partout régulières sur la variété  $V$ . Si l'on admet des formes qui présentent des singularités, pour que les lois essentielles de la théorie subsistent, la définition du dérivé doit être complétée. Lorsque  $\omega$  présente des singularités, le dérivé de  $(V, \omega)$  se compose non seulement de  $(V, \omega')$  — ce qui serait le cas si  $\omega$  était régulière —, mais encore d'autres termes provenant des singularités de  $\omega$  et qu'on peut appeler les résidus de  $\omega$ .

Je vais examiner à ce point de vue les formes différentielles algébriques dans le domaine complexe, ce qui nous conduira à la théorie des résidus de Cauchy et de Poincaré. Cette étude est basée sur la formule suivante.

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux courants dont la somme des dimensions est  $(n + 1)$ ,  $n$  étant la dimension de la variété considérée;  $C_1 \cdot C_2$  est alors un 1-courant, et l'indice de son dérivé  $d(C_1 \cdot C_2)$  est nul, ce qui donne

$$I(C_1 dC_2) = \pm I(C_2 dC_1) . \tag{A}$$

Cette formule est très importante. Si  $C_1$  et  $C_2$  sont des champs, elle traduit la pseudo-commutativité du coefficient d'enlacement des deux cycles  $dC_1$  et  $dC_2$ . Si  $C_1$  et  $C_2$  sont des formes, c'est la formule d'intégration par parties. Si  $C_1$  est un champ et  $C_2$  une forme, c'est la formule de Stokes. Dans les cas que nous allons examiner, elle se réduira aux formules des résidus de Cauchy et Poincaré.

Considérons d'abord une différentielle rationnelle  $f(z) dz$  sur la sphère de Riemann  $S$  de la variable complexe  $z$ . Soient  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ses points singuliers,  $r_k$  les résidus correspondants. Nous définissons le dérivé du 1-courant  $C^1 = (S, f(z) dz)$  par la formule

$$dC^1 = \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) .$$

Soit  $c^2$  un domaine sur  $S$  (ou 2-champ) de frontière  $c^1$ ;  $c^2$  est un 2-courant dont le dérivé est  $c^1$ . Appliquons la formule (A). On a

$$C^1 \cdot dc^2 = (S, f(z) dz) \cdot (c^1, 1) = - (c^1, f(z) dz) ,$$

done

$$I(C^1 \cdot dc^2) = \int_{c^1} f(z) dz .$$

Ensuite

$$c^2 \cdot dC^1 = (c^2, 1) \cdot \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) = \sum_k (c^2 \cdot z_k, 2i\pi r_k) .$$

Comme  $c^2 \cdot z_k = z_k$  ou 0 suivant que  $z_k$  est à l'intérieur ou à l'extérieur de  $c^2$ , il vient

$$I(c^2 \cdot dC^1) = 2i\pi \text{ (somme des résidus intérieurs à } c^2\text{)}$$

et la formule (A) se réduit à la formule des résidus de Cauchy. La formule  $I(dC^1) = 0$  exprime que la somme des résidus est nulle.

Considérons ensuite un élément d'intégrale double

$$\omega = f(x, y) dx dy ,$$

$f(x, y)$  étant une fonction rationnelle,  $x$  et  $y$  des coordonnées non homogènes dans le plan projectif complexe  $V$  à 4 dimensions réelles. Sa dérivée est nulle, mais elle a des points singuliers qui forment un nombre fini de courbes algébriques (donc des 2-champs)  $S_1, S_2, S_3, \dots$  Ce sont les courbes polaires de la fonction  $f(x, y)$  et éventuellement la droite de l'infini.

Poincaré a montré qu'à chacune de ces courbes est attachée une différentielle abélienne déterminée par  $\omega$ . Si par exemple  $f = \frac{P(xy)}{Q(xy)R(xy)}$ ,  $P, Q, R$  étant des polynômes, la différentielle attachée à la courbe  $Q = 0$  est

$$\frac{2i\pi P \cdot dx}{R \frac{\partial Q}{\partial y}}$$

Soit  $\omega_k$  la différentielle attachée à  $S_k$ . Nous définissons le dérivé du 2-courant  $C^2 = (V, \omega)$  par la formule

$$dC^2 = \sum_k (S_k, \omega_k) .$$

Soit  $c^3$  un champ à 3 dimensions sur  $V$ , dont la frontière  $c^2$  ne rencontre pas les courbes singulières  $S_k$ .  $c^3$  est un 3-courant dont le dérivé est  $c^2$ . Appliquons la formule (A). On a

$$C^2 \cdot dC^3 = (V, \omega) \cdot (c^2, 1) = (c^2, \omega) ,$$

d'où

$$I(C^2 \cdot dC^3) = - \int_{c^2} \omega .$$

Ensuite

$$C^3 \cdot dC^2 = (c^3, 1) \cdot \sum_k (S_k, \omega_k) = \sum_k (c^3 \cdot S_k, \omega_k) ,$$

d'où

$$I(C^3 \cdot dC^2) = - \sum_k \int_{c^3 \cdot S_k} \omega_k$$

et la formule (A) devient

$$\int_{c^2} \int f(xy) dx dy = \pm \sum_k \int_{c^3 \cdot S_k} \omega_k .$$

C'est la formule de réduction (de Poincaré) d'une période polaire d'intégrale double à des périodes (polaires ou cycliques) des intégrales abéliennes attachées aux courbes  $S_k$ .

En résumé, si les résidus d'une intégrale simple attachée à une courbe algébrique apparaissent comme un système de points affectés de coefficients, les résidus d'une intégrale double attachée à une surface algébrique se présentent sous la forme d'un système de courbes algébriques affectées d'intégrales simples. Plus généralement, les résidus d'une intégrale  $p$ -uple attachée à une variété algébrique à  $n$  dimensions (complexes) apparaissent comme un système de variétés algébriques à  $(n - 1)$  dimensions (complexes) affectées d'intégrales  $(p - 1)$ -uples.

## BIBLIOGRAPHIE

- E. CARTAN. Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos (*Comptes rendus*, t. 187, 1928, p. 196-198).
- Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (*Annales de la Soc. polon. de math.*, t. VIII, 1929, p. 182-225).
- W. V. D. HODGE. On multiple integrals attached to an algebraic variety (*Journal of the London Math. Soc.*, vol. 5, part. 4).
- A Dirichlet problem for harmonics functionals, with applications to analytic varieties (*Proceedings of the London Math. Soc.*, sér. 2, vol. 36, part. 4).
- Harmonic functionals in a riemannian space (*Proceedings of the London Math. Soc.*, sér. 2, vol. 38, part. 1 et 2).
- H. POINCARÉ. Sur les résidus des intégrales doubles (*Acta mathematica*, 1887).
- G. DE RHAM. Sur l'Analysis situs des variétés à  $n$  dimensions (Thèse, *Journal de Math. p. et appl.*, 1931).
- Sur les périodes des intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 3, p. 151-153).
- Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 4, p. 151-157).
- Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples (*Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Zürich, 1932, p. 195).
-

# LA NOTION DE CONNEXITÉ LOCALE EN TOPOLOGIE <sup>1</sup>

PAR

Casimir KURATOWSKI (Varsovie).

---

Il y a une dizaine d'années la Topologie était divisée en deux parties: la Topologie « ensembliste » et la Topologie « combinatoire ». La première, édifiée sur le terrain de la théorie des ensembles de Georg CANTOR, avait pour objet l'étude des propriétés topologiques des ensembles de points les plus généraux, la deuxième, fondée sur les idées de Henri POINCARÉ: celles d'homologies, de groupe de Betti, du groupe fondamental, concernait les polyèdres ou polytopes à  $n$  dimensions. La deuxième semblait inapplicable dans l'étude des ensembles arbitraires (autres que les polytopes), tandis que la première paraissait impuissante en face de l'étude de certaines propriétés topologiques extérieures des figures géométriques situées dans l'espace euclidien à  $n > 2$  dimensions, telles que le nombre des domaines complémentaires, enlacements d'ensembles, etc.

Les deux topologies se développaient indépendamment l'une de l'autre: non seulement les objets de leurs études étaient différents, mais il y avait aussi une différence frappante entre leurs méthodes: l'une était finitiste, l'autre était par contre liée à la notion de continuité.

Dès lors l'état des choses a complètement changé. En s'inspirant des idées de M. BROUWER, MM. ALEXANDROFF et VIETORIS ont réussi à définir dans le domaine de la topologie ensembliste (pour les espaces compacts les plus généraux) les notions combi-

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

natoires d'homologie, de groupe de Betti, d'enlacements, etc. Ainsi « unifiée »<sup>1</sup> et enrichie de nouvelles méthodes, la topologie a pu attaquer des problèmes qui paraissaient jusqu'ici inabordable. Elle n'est pas non plus sans intérêt pour l'étude des figures aussi régulières que les polytopes: il y a en effet des propriétés dont l'étude demande la considération de certains autres espaces (par ex. des espaces des transformations, H. HOPF, W. HUREWICZ) qui, en général, sont non-compacts, ont un nombre infini de dimensions et qui rentrent dans le domaine de la topologie ensembliste.

A l'heure actuelle les deux topologies, ensembliste et combinatoire, se confondent de plus en plus. Une délimitation rigoureuse entre elles ne paraît plus applicable et d'autres critères commencent à intervenir dans la classification des méthodes topologiques (par ex. homologie, homotopie, groupe des transformations en circonférence, etc.). En particulier, la théorie de la connexité locale, qui constitue le sujet de cette conférence, est un chapitre de la topologie unifiée, où l'ancienne distinction ne semble plus possible.

1. — *Connexité en Topologie ensembliste.* — La notion de connexité est une des notions fondamentales de la Topologie ensembliste. Rappelons sa définition: un ensemble est dit connexe s'il ne se décompose pas en deux ensembles fermés dans lui (non vides) et sans point commun. La notion de connexité étant intrinsèque, on peut considérer au lieu d'« ensemble connexe » l'« espace connexe ». Soit, en effet,  $E$  un espace métrique donné<sup>2</sup>, c'est-à-dire espace où la distance  $|a - b|$  de chaque couple de points  $a$  et  $b$  est définie; l'espace  $E$  est dit connexe lorsqu'il ne se décompose pas en deux ensembles fermés sans point commun. Si cet espace est, en outre, compact (c'est-à-dire que chaque ensemble infini admet un point d'accumulation), il est dit un *continu*. Telles sont, en particulier, les lignes et les surfaces bornées considérées en géométrie.

<sup>1</sup> Cf. la conférence très intéressante de M. WILDER sur la Topologie unifiée publiée dans le *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1932.

<sup>2</sup> Par espace nous entendons ici toujours un espace métrique séparable (c'est-à-dire admettant un ensemble dense dénombrable).

La localisation de la définition précédente conduit à la connexité locale: un espace est dit *localement connexe au point*  $p$  lorsqu'il existe un entourage connexe de  $p$  aussi petit qu'on le veut. Tel est, par exemple, le plan euclidien, le cercle de centre  $p$  et de rayon  $\varepsilon$  étant connexe. Il en est encore de même des polyèdres ou polytopes, mais il n'en est pas ainsi de la courbe  $y = \sin 1/x$ ,  $0 < x \leq 1$ , augmentée de l'intervalle  $-1, +1$  de l'axe des  $y$ ; aux points de cet intervalle la courbe n'est pas localement connexe.

La notion de connexité locale, introduite indépendamment par HAHN et par M. MAZURKIEWICZ, a servi, à côté de la connexité même (qui remonte à C. JORDAN), de point de départ de nombreuses recherches topologiques et a permis d'approfondir l'étude de la structure d'ensembles de points (pour ne citer que la théorie des courbes <sup>1</sup>).

Parmi les nombreux théorèmes de la théorie de la connexité locale, citons les deux suivants: la condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu soit localement connexe, est qu'il soit une image continue d'un intervalle <sup>2</sup>. Ainsi, la propriété du carré d'admettre une représentation paramétrique continue sur l'intervalle, propriété découverte par PEANO et qui paraissait tellement paradoxale, s'est montrée une propriété caractéristique des continus localement connexes (continus nommés à présent « péaniens »).

La deuxième propriété est la *connexité par arcs* intégrale et locale des continus péaniens: à savoir, chaque couple de points d'un continu péanien se laisse unir dans ce continu par un arc (c'est-à-dire par un ensemble homéomorphe à l'intervalle); de plus, si les deux points en question sont suffisamment voisins, l'arc peut être supposé aussi petit qu'on le veut <sup>3</sup>.

La notion de continu péanien définit dans la variété de tous les ensembles de points une famille d'ensembles qui se distinguent par certaines régularités (elles se manifestent, par exemple, dans les deux théorèmes précités). Cette régularité est surtout

<sup>1</sup> Voir K. MENGER, « Kurventheorie », Leipzig-Berlin, 1932.

<sup>2</sup> Cf. W. SIERPINSKI, *Fund. Math.*, I (1920), p. 44 et S. MAZURKIEWICZ, *ibid.*, p. 166.

<sup>3</sup> S. MAZURKIEWICZ, *ibid.*, p. 201 et R. L. MOORE, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 23 (1917), p. 233.

visible lorsqu'il s'agit des propriétés intrinsèques des ensembles considérés. En ce qui concerne leurs propriétés extérieures, c'est-à-dire lorsqu'on suppose le continu péanien immergé dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions, le cas  $n = 2$  diffère complètement du cas  $n > 2$ . Ainsi, par exemple<sup>1</sup>, si  $\bar{C}$  est un continu péanien situé sur le plan, la frontière de chaque domaine complémentaire de  $C$  est un continu péanien et chaque point de cette frontière est accessible du domaine considéré; si, en particulier,  $C$  est la frontière de deux domaines complémentaires, elle est une courbe simple fermée. Aucune de ces propriétés ne se laisse étendre à l'espace euclidien à 3 dimensions; en passant du plan à l'espace à 3 dimensions, l'hypothèse de la connexité locale est devenue bien moins efficace pour l'étude des propriétés extrinsèques<sup>2</sup>. De ce point de vue on trouvera avantageux de se servir de la notion de connexité locale *en dimension*  $n$ , dont nous nous occuperons à présent.

2. — *Connexité locale en dimension*  $n$ . — Désignons par  $S_n$  la sphère à  $n$  dimensions, à savoir l'ensemble des points de l'espace euclidien à  $n + 1$  dimensions tels que  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ . En remplaçant dans la définition précédente le signe  $=$  par  $\leq$ , on définit le sphéroïde (massif) à  $n + 1$  dimensions, que nous désignons par  $Q_{n+1}$ .

Disons, pour l'instant, qu'un espace  $Y$  est *connexe en dimension*  $n$  lorsque chaque transformation continue  $f$  de la sphère  $S_n$  en sous-ensemble de  $Y$  se laisse étendre en une transformation continue  $f^*$  du sphéroïde  $Q_{n+1}$  tout entier (en sous-ensemble de  $Y$ ). On voit aussitôt que la connexité en dimension 0 n'est autre chose que la connexité par arcs, considérée auparavant (puisque  $Q_1$  désigne un intervalle et  $S_0$  le couple de ses extrémités). Pour avoir un exemple d'un ensemble qui n'est pas connexe en dimension 1, considérons la circonférence  $S_1$  du cercle  $Q_2$ : en admettant pour  $f$  l'identité, on constate facilement

<sup>1</sup> Cf. SCHÖNFLIESS, « Bericht über die Entwicklung der Mengenlehre, II », Leipzig, 1908, p. 199 et ss., B. V. KERÉKJÁRTÓ, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, IV (1925), p. 164, H. HAHN, M. TORHORST, *Math. Zft.*, 9 (1921) et ma note des *Fund. Math.*, 16 (1930), p. 180.

<sup>2</sup> Cela tient, entre autres, au fait que *chaque* ensemble compact devient péanien par l'adjonction d'une suite infinie d'arcs simples (qui n'altère pas en général les propriétés extérieures de l'ensemble donné, dans l'espace à  $n > 2$  dimensions).

qu'il n'existe aucune transformation du cercle en circonférence qui soit une identité sur cette circonférence. D'une façon générale  $S_n$  est connexe en dimensions  $k < n$  mais n'est pas connexe en dimension  $n$ .

La définition précédente peut être aussi formulée en termes de l'*homotopie*. L'espace  $Y$  est connexe en dimension  $n$  lorsque chaque transformation  $f$  de la sphère  $S_n$  en sous-ensemble de  $Y$  est homotope à 0, c'est-à-dire se laisse réduire à une constante par une déformation continue; plus précisément, lorsqu'il existe une fonction continue  $\varphi$  de deux variables:  $x$  parcourant  $S_n$  et  $t$  parcourant l'intervalle  $01$ , telle que la fonction  $\varphi(x, 0)$  coïncide avec  $f(x)$  et que la fonction  $\varphi(x, 1)$  soit une constante<sup>1</sup>.

La localisation de la définition précédente conduit à la définition de la *connexité locale en dimension  $n$  au point  $p$* <sup>2</sup>. Cette propriété appartient à l'espace  $Y$  lorsqu'à chaque  $\varepsilon > 0$  correspond un  $\eta > 0$  tel que, chaque transformation continue  $f$  de  $S_n$  en sous-ensemble de  $Y$  assujettie à l'inégalité  $|f(x) - p| < \eta$ , admette une extension  $f^*$  telle que  $|f^*(x) - p| < \varepsilon$  où  $x$  parcourt  $Q_{n+1}$  (ce qui revient à dire que l'homotopie de la fonction  $f$  à la constante  $p$  se laisse effectuer sur un chemin très petit).

On constate, comme auparavant, que la connexité locale en dimension 0 coïncide avec la connexité locale par arcs. En particulier, les espaces compacts connexes et localement connexes en dimension 0 coïncident avec les espaces péaniens. Cela donne lieu à la dénomination suivante: un espace est dit *péanien en dimension  $n$*  lorsqu'il est connexe et localement connexe en dimension  $n$ .

A chaque espace  $Y$  on peut faire correspondre un coefficient entier  $c(Y)$  (ou  $c_l(Y)$ ), à savoir la plus grande dimension  $n$  jusqu'à laquelle  $Y$  est péanien (ou localement connexe). Dans le cas où l'espace  $Y$  est péanien en chaque dimension, le coeffi-

<sup>1</sup> Pour s'en convaincre on pose  $f^*[x.(1-t)] = \varphi(x, t)$ .

<sup>2</sup> Cette notion est due à M. LEFSCHETZ. Voir « Topology », New-York, 1930, p. 91. A côté de cette définition on peut considérer la connexité locale « au sens de l'homologie », en entendant par cela que chaque petit cycle  $n$ -dimensionnel est homologue à 0 dans un petit voisinage du point  $p$ . Cette notion est due à M. ALEXANDER et à M. ALEXANDROFF (voir « Gestalt u. Lage », *Annals of Math.*, 30, 1928, p. 81). Tout récemment elle fut étudiée par M. ALEXANDROFF dans *Annals of Math.*, 36 (1935), p. 1 et par M. CECH dans *Compos. Math.*, 2 (1935), p. 1.

Cf. aussi WHYBURN, *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 408.

cient  $c(Y)$  est infini. Comme on verra, deux genres d'infinités peuvent se présenter.

3<sup>1</sup>. — *Extensions des fonctions continues.* — Afin d'abrégier l'écriture, nous allons nous servir du symbole  $Y^X$  pour désigner la famille de toutes les transformations continues de l'espace  $X$  en sous-ensembles de  $Y$ . Comme nous avons vu, la connexité en toutes les dimensions  $\leq n$  s'exprime par l'hypothèse, qu'à chaque fonction  $f$  appartenant à  $Y^{S_k}$  correspond une extension  $f^*$  appartenant à  $Y^{Q_{k+1}}$ , quel que soit  $k \leq n$ . Or, si l'on remplace dans cette condition  $Q_{k+1}$  par un espace métrique séparable  $X$  tout-à-fait arbitraire et  $S_k$  par un sous-ensemble fermé  $A$  de  $X$  tel que  $\dim(X - A) \leq n + 1$ <sup>2</sup>, on parvient à une condition qui caractérise les espaces péaniens en dimensions  $k \leq n$  (condition qui ne fait intervenir aucun élément étranger à la topologie ensembliste). En d'autres termes, l'inégalité  $c(Y) \geq n$  équivaut à l'hypothèse suivante:  $A$  étant un sous-ensemble fermé d'un espace métrique séparable  $X$  assujetti à la condition  $\dim(X - A) \leq n + 1$ , à chaque fonction  $f$  dans  $Y^A$  correspond une extension  $f^*$  dans  $Y^X$ . Si cette extension est toujours possible, sans que l'on fasse l'hypothèse sur la dimension de  $X - A$ , nous posons  $c(Y) = \aleph_0$ ; si ceci a lieu pour chaque  $n$  fini, nous posons  $c(Y) = \omega$ .

Les deux cas infinis peuvent se présenter effectivement: d'après un théorème connu de M. TIETZE, chaque fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique se laisse étendre sur l'espace métrique tout entier; donc  $Y$  désignant la droite,  $c(Y) = \aleph_0$ . D'autre part, pour avoir un espace  $Y$  tel que  $c(Y) = \omega$ , considérons — avec M. BORSUK — dans l'espace de Hilbert à une infinité de dimensions une suite infinie de sphères  $S_0, S_1, \dots$  placées de manière que chaque sphère n'ait qu'un seul point commun avec la suivante et que la suite converge vers un point  $p$  situé en dehors de cette suite. Soit  $q$  le point  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ , l'abscisse de chaque

<sup>1</sup> Pour les énoncés des nos 3-7, voir ma note des *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 269, où l'on trouvera les renvois bibliographiques nécessaires.

<sup>2</sup> Le symbole  $\dim X$  désigne la dimension de l'ensemble  $X$  dans le sens de MENGER-URYSOHN.

$S_n$  étant supposée nulle. L'ensemble  $Y$  se compose de tous les segments unissant  $q$  aux points des sphères  $S_n$ , ainsi que du segment  $qp$ . Ici  $c(Y) = \omega$ .

En ce qui concerne la connexité locale, on montre que l'inégalité  $c_l(Y) \geq n$  équivaut à l'hypothèse que,  $A$ ,  $X$  et  $f$  ayant le même sens qu'auparavant, il existe dans  $X$  un entourage  $E$  de  $A$  et une extension  $f^*$  de  $f$  qui appartient à  $Y^E$ . Tout comme auparavant on doit distinguer entre  $c_l(Y) = \omega$  et  $c_l(Y) = \aleph_0$ . Un problème non-résolu, fort intéressant, qui s'y rattache, est le suivant: l'égalité  $c_l(Y) = \aleph_0$ , est-elle une conséquence de la connexité locale *uniforme* en toutes les dimensions  $n$ ?<sup>1</sup> (nous entendons par cela qu'à chaque  $\varepsilon > 0$  correspond un  $\eta > 0$  tel qu'à chaque fonction  $f$  dans  $Y^{S_n}$  satisfaisant<sup>2</sup> à  $\delta[f(S_n)] < \eta$  correspond une fonction  $f^*$  telle que  $\delta[f^*(Q_{n+1})] < \varepsilon$ ).

4. — *Rétraction des ensembles.* — Un autre critère des ensembles péaniens en dimension  $n$  (ou bien localement connexes) se laisse énoncer à l'aide de la notion très utile de « rétraction », due à M. BORSUK<sup>3</sup>. Rappelons la définition: un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  en est un rétracte lorsque  $X$  se laisse transformer en  $Y$  à l'aide d'une fonction continue  $f$  telle que  $f(x) = x$  pour chaque  $x$  appartenant à  $Y$ . Par exemple, le cercle est un rétracte du plan qui le contient; tandis que la circonférence n'est pas un rétracte du cercle<sup>4</sup>.

Or, on démontre que l'inégalité  $c(Y) \geq n$  équivaut à l'hypothèse que  $Y$  est un rétracte de chaque espace  $X$  qui le contient, dans lequel  $Y$  est fermé et pour lequel on a  $\dim(X - Y) \leq n + 1$ . En particulier, l'égalité  $c(Y) = \aleph_0$  équivaut à l'hypothèse que  $Y$  est un rétracte de *chaque* sur-espace dans lequel  $Y$  est fermé ( $Y$  est nommé dans ce cas, selon M. BORSUK, un rétracte « absolu »).

<sup>1</sup> Ce problème est traité par M. LEFSCHETZ dans *Annals of Math.*, 35 (1934), p. 118.

<sup>2</sup>  $\delta(X)$  désigne le diamètre de l'ensemble  $X$ , c'est-à-dire la borne supérieure des distances entre ses éléments.

<sup>3</sup> *Fund. Math.*, 17 (1931), p. 153.

<sup>4</sup> D'une façon générale, pour qu'un sous-ensemble fermé  $Y$  d'un espace compact  $X$  en soit un rétracte, il faut et il suffit que l'espace  $X$  se laisse métriser (sans altérer sa topologie) de façon qu'à chaque point  $x$  de  $X$  corresponde un et un seul point  $f(x)$  de  $Y$  qui soit le plus rapproché parmi les points de  $Y$ . Voir ma Note qui paraîtra dans les *C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie* (1936).

On parvient à une condition qui équivaut à l'inégalité  $c_l(Y) \geq n$  en supposant que  $Y$  est un rétracte, non de l'espace  $X$  tout entier mais d'un de ses entourages (dans  $X$ ). L'égalité  $c_l(Y) = \aleph_0$  signifie que dans chaque sur-espace  $X$  dans lequel  $Y$  est fermé il existe un entourage de  $Y$  dont  $Y$  est un rétracte (c'est donc un rétracte « absolu de voisinage »).

5. — *Opérations.* — Nous allons tâcher de répondre à présent aux problèmes suivants: étant donnés les coefficients  $c$  des ensembles  $A$  et  $B$ , calculer les coefficients  $c(A + B)$ ,  $c(A \times B)$ ,  $c(A^B)$  etc. De même pour  $c_l$ .

Dans cet ordre d'idées on a d'abord le théorème suivant: *A et B étant deux ensembles fermés dans leur somme  $A + B$ , les inégalités  $c(A) \geq n$ ,  $c(B) \geq n$ ,  $c(AB) \geq n - 1$ , entraînent  $c(A + B) \geq n$ .*

Le théorème reste valable lorsqu'on substitue  $\aleph_0$  à  $n$ <sup>1</sup>. On peut aussi remplacer le coefficient  $c$  par  $c_l$ .

Ainsi, par exemple, en décomposant la sphère  $S_n$  par l'« équateur »  $S_{n-1}$  en deux hémisphères, on conclut du théorème précédent par induction que  $c(S_n) \geq n - 1$ . Le fait, qui intervient dans cette démonstration, que le coefficient  $c$  pour l'hémisphère est  $\geq n - 1$ , même plus encore, qu'il est égal à  $\aleph_0$ , est une conséquence de la propriété de  $Q_n$  (qui est homéomorphe à l'hémisphère considérée) d'être un rétract absolu. L'égalité  $c(Q_n) = \aleph_0$  résulte aussi du théorème suivant.

Avant de l'énoncer, remarquons encore que  $c(S_n) < n$ , donc que  $c(S_n) = n - 1$ . En effet, si  $c(S_n)$  était  $\geq n$ ,  $S_n$  serait un rétracte de  $Q_{n+1}$ . Mais alors, la rétraction et la transformation antipodique de  $S_n$  donneraient une transformation continue de  $Q_{n+1}$  en  $S_n$  sans point invariant, — ce qui, d'après un théorème classique de M. BROUWER, est impossible.

Passons, à présent, à l'opération du *produit cartésien*. Le produit cartésien de deux espaces métriques  $X$  et  $Y$  est l'espace des couples  $(x, y)$  métrisé par la formule adoptée en géométrie analytique. Une généralisation convenable de cette formule permet d'étendre la notion de produit cartésien à un nombre fini

<sup>1</sup> Cf. N. ARONSZAJN et K. BORSUK, *Fund. Math.*, 18 (1932), p. 194.

arbitraire ou même à une suite infinie de facteurs. Or, on démontre que

$$c(Y_1 \times Y_2 \times \dots) = \min c(Y_i) \quad \text{et} \quad c_l(Y_1 \times Y_2) = \min [c_l(Y_1), c_l(Y_2)].$$

La deuxième formule ne se généralise pas à une suite infinie de facteurs, comme le montre l'exemple de l'ensemble non-dense de Cantor qui peut être regardé comme la « puissance  $\aleph_0$ -ème » d'un ensemble composé de deux éléments (donc ayant le coefficient  $c_l = \aleph_0$ ).

La puissance  $Y^X$  désigne, comme nous l'avons déjà dit, l'espace des transformations continues de l'espace  $X$  en sous-ensembles de  $Y$ . L'espace  $X$  étant supposé compact, la distance entre deux fonctions-éléments de  $Y^X$  est donnée par la formule  $|f - g| = \max |f(x) - g(x)|$ <sup>1</sup>. Or, on a la formule remarquable suivante

$$c(Y^X) \leq c(Y) \leq c(Y^X) + \dim X.$$

La formule reste valable en remplaçant le coefficient  $c$  par  $c_l$ . Dans le cas où  $c(Y) = \aleph_0$ , on a  $c(Y^X) = \aleph_0$ ; si  $c_l(Y) = \aleph_0$ , on a  $c_l(Y^X) = \aleph_0$ . Ainsi, par exemple, l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle (ou sur un espace compact arbitraire) est un rétracte absolu. L'espace des transformations d'un espace compact arbitraire en sous-ensembles d'un polytope est un rétracte absolu de voisinage ( $c_l = \aleph_0$ ).

Remarquons enfin que la connexité en dimension  $n$  de l'espace  $Y$  se ramène à la connexité par arcs des espaces fonctionnels  $Y^{S_0}, \dots, Y^{S_n}$ . En effet, la connexité locale par arcs de tous ces espaces est une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait  $c_l(Y) \geq n$ ; en admettant en outre la connexité intégrale par arcs, on obtient une condition équivalente à l'inégalité  $c(Y) \geq n$ .

6. — *Rapport avec l'homologie.* — On démontre facilement que,  $Y$  étant un espace compact arbitraire, l'inégalité  $c(Y) \geq n$

<sup>1</sup> Les formules suivantes justifient l'emploi de la notation  $Y^X$ :

$$Y^X \times Z^X \simeq (Y \times Z)^X, \quad (Y^X)^Z \simeq Y^{X \times Z}, \quad Y^A \times Y^B \simeq Y^{A+B},$$

où  $A$  et  $B$  sont fermés et disjoints et où  $\simeq$  désigne l'homéomorphie.

implique que tous les groupes d'homologie d'ordres  $\leq n$  s'annulent. La réciproque n'est pas vraie: le polytope bien connu de POINCARÉ dont les nombres de Betti de dimension 0 et 1 s'annulent et dont le groupe fondamental ne s'annule pas n'est pas péanien en dimension 1 (bien qu'il le soit « dans le sens de l'homologie »). Dans cet ordre d'idées un résultat fort remarquable a été trouvé tout récemment par M. HUREWICZ <sup>1</sup>: dans l'hypothèse que  $c(Y) \geq 1$ , le fait que tous les groupes d'homologie d'ordres  $\leq n$  s'annulent implique (est donc équivalent à) l'inégalité  $c(Y) \geq n$ .

Des rapports analogues ont lieu entre le coefficient  $c_l$  et la connexité locale au sens de l'homologie. Ajoutons que l'inégalité  $c_l(Y) \geq n$  implique que les nombres de Betti de dimensions  $\leq n$  de  $Y$  sont finis <sup>2</sup>.

7. — *Rapport avec l'homotopie des ensembles.* — Un ensemble est dit homotope à un point dans un espace donné lorsqu'il se laisse réduire dans cet espace au point considéré par une déformation continue. Si chaque ensemble fermé de dimension  $n$  est homotope à un point, l'espace est dit contractile en dimension  $n$ . L'homotopie d'un ensemble étant un cas particulier de l'homotopie des fonctions (cas où la fonction est une identité), l'inégalité  $c(Y) \geq n$  entraîne la contractilité (intégrale et locale) de l'espace  $Y$  en dimensions  $\leq n$ . La réciproque n'est pas vraie: l'exemple suivant dû à M. BORSUK <sup>3</sup>, est un espace compact  $E$  à 3 dimensions, contractile localement (on a même  $c_l(E) = \aleph_0$ ), contractile intégralement en dimensions  $\leq 2$  et, cependant, non péanien en dimension 2; plus encore, le deuxième nombre de Betti de  $E$  est égal à 1. Pour obtenir l'ensemble  $E$ , on transforme d'abord un arc  $L$  situé sur la surface sphérique  $S_2$  en  $Q_3$  par une transformation continue  $f$  et on identifie ensuite, pour chaque point  $y$  de  $Q_3$ , tous les  $x$  tels que  $f(x) = y$  (plus précisément,  $E$  est l'espace de la décomposition de  $S_2$  en points individuels de

<sup>1</sup> A paraître dans le volume jubilaire des *Fund. Math.* (25).

<sup>2</sup> Plus encore: leurs groupes de Betti sont des images homéomorphes des groupes correspondants d'un polytope à  $n$  dimensions. Voir K. BORSUK, *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 311.

<sup>3</sup> *Ibid.*, p. 257.

l'ensemble  $S_2 - L$  et en ensembles  $f^{-1}(y)$  où  $y$  parcourt l'ensemble  $Q_3$ .

On voit ainsi combien la condition d'homotopie de fonctions est plus restrictive que celle d'homotopie d'ensembles. Reste à remarquer que dans le cas particulier où l'espace compact  $Y$  (supposé de dimension finie) est localement contractile en toute dimension, on a  $c_l(Y) = \aleph_0$ ; et, s'il en est, en outre, ainsi de la contractilité intégrale, il vient  $c(Y) = \aleph_0$ . Le problème — si l'hypothèse de dimension finie de  $Y$  peut être omise dans le dernier énoncé — reste ouvert; il se rattache à celui de la connexité locale uniforme (du n° 3).

8. — *Propriétés extérieures des ensembles localement connexes plongés dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions.* — Ces propriétés n'ont été étudiées jusqu'à présent que dans le cas où l'ensemble fermé considéré  $F$  est localement connexe en toute dimension  $\leq n - 1$  (donc où il est un rétracte absolu de voisinage). On démontre<sup>1</sup> dans ce cas que  $F$  coupe l'espace en un nombre fini ( $\geq 1$ ) de domaines (cela est d'ailleurs une conséquence du fait que le  $n$ -ième nombre de Betti de  $F$  est fini). En outre, si  $p$  est un point de  $F$  appartenant à la frontière d'un de ces domaines,  $p$  en est accessible. Puis, la frontière de  $F$  est localement connexe (en dimension 0).

9. — *Problèmes quantitatifs. Groupes d'homotopie.* — Si l'espace n'est pas connexe en dimension  $n$ , le problème s'impose de calculer le degré de non-connexité. Dans le cas  $n = 0$ , c'est bien le nombre des composantes de l'espace (c'est-à-dire des ensembles connexes saturés) qui donne la réponse à ce problème. Pour  $n$  arbitraire la réponse, au point de vue de l'homologie, est donnée par le  $n$ -ième nombre de Betti (et d'une façon plus précise: par le  $n$ -ième groupe de Betti). Au point de vue de l'homotopie, on n'était renseigné sur ce problème jusqu'à présent que dans le cas  $n = 1$ , notamment, par le groupe fondamental de Poincaré (que l'on pourrait nommer le premier groupe

<sup>1</sup> K. BORSUK, *ibid.*, t. 19 (1932), p. 230-234.

d'homotopie). Une étude systématique du  $n$ -ème groupe d'homotopie n'a été entreprise que tout récemment par M. HUREWICZ<sup>1</sup>.

Voici la définition du  $n$ -ème groupe d'homotopie. Soit  $Y$  un espace connexe et localement contractile; soient  $b$  un point fixe de  $Y$  et  $a$  un point fixe de  $S_{n-1}$  (par exemple le point  $1, 0, 0, \dots, 0$ ). Considérons, dans l'espace  $Y^{S_{n-1}}$ , le sous-ensemble  $F_n$  composé de fonctions  $f$  telles que  $f(a) = b$ . Le  $n$ -ème groupe d'homotopie de  $Y$  est par définition le groupe fondamental de l'ensemble  $F_n$ . On constate facilement que ce groupe ne dépend pas du choix des points  $a$  et  $b$  et que pour  $n = 1$  il coïncide avec le groupe de Poincaré.

Bien entendu, si  $c(Y) = n$ , c'est-à-dire si l'espace est péanien jusqu'à la dimension  $n$ , tous les groupes d'homotopie jusqu'à  $n$ -ième s'annulent. Si cette égalité n'a pas lieu, les groupes d'homotopie permettent d'approfondir l'étude de la structure de l'espace  $Y$  au point de vue de la connexité, bien que cet espace ne soit pas connexe en certaines dimensions.

Un nouveau chapitre de la théorie générale de la connexité se trouve ainsi inauguré.

---

<sup>1</sup> *Proceed. Akad. Amsterdam*, 38 (1935), p. 112. Pour la définition, cf. aussi E. CECH, *C. R. Congrès Int. Math. Zurich*, 1932, vol. 2, p. 194.

# LA MESURE INVARIANTE DANS LES ESPACES DE GROUPES ET LES ESPACES HOMOGÈNES <sup>1</sup>

PAR

A. WEIL (Strasbourg).

---

HAAR a démontré l'existence d'une mesure invariante à gauche dans tout groupe topologique satisfaisant à des conditions très larges; J. v. NEUMANN a démontré l'unicité de cette mesure dans les groupes compacts. Mais ces résultats n'ont pas encore tout le degré de généralité voulue. Par quelques modifications apportées à la méthode de Haar, on peut d'abord montrer que la mesure invariante à gauche existe dans tout groupe topologique *localement bicompat*, et que cette mesure est *unique*. De l'unicité résultent les règles de calcul relatives à la mesure de Haar, qui n'avaient pas été démontrées encore jusqu'à présent; en particulier, la mesure est *relativement invariante* à droite, c'est-à-dire que par multiplication à droite par un élément du groupe elle se multiplie par un facteur numérique.

De là on peut tirer aussi les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une mesure invariante ou relativement invariante dans un espace homogène défini par un groupe localement bicompat et un sous-groupe fermé de celui-ci; une telle mesure n'existe pas toujours, mais il y a toujours un espace, étroitement lié à celui qu'on étudie, où elle existe (par exemple il n'existe pas de mesure invariante dans l'espace projectif, mais dans l'espace affine à une dimension de plus il existe une mesure relativement invariante).

Un exposé détaillé de ces résultats et de leur démonstration paraîtra dans un fascicule du *Mémorial des Sciences Mathématiques* (Gauthier-Villars), sous le titre « Méthodes intégrales en Théorie des groupes ».

---

<sup>1</sup> Résumé de la conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

# QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS DE LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS <sup>1</sup>

PAR

W. THRELFALL (Dresde).

---

Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à  $n$  dimensions, posé par POINCARÉ, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie. Il est intéressant en soi, car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classique. Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique. Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tâche du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumérer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. De plus, les variétés qui ont trait au problème d'homéomorphie, se présentent comme variétés de solutions de systèmes d'équations différentielles et sont de ce fait importantes pour les questions de stabilité. Elles sont encore plus importantes pour la géométrie algébrique.

Malheureusement le problème n'est complètement résolu que pour deux dimensions. Je vais vous exposer maintenant les recherches qui ont été faites récemment et qui ont pour but la solution du problème pour trois dimensions et plus. Pour simplifier ma tâche, je vais toutefois me borner à des variétés closes

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*. — Traduction revue par M. M. RUEFF (Zurich).

et homogènes; ce sont des variétés qu'il est possible de construire au moyen d'un nombre fini de simplexes à  $n$  dimensions et dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la sphère massive à  $n$  dimensions.

Comme les variétés de points à  $n$  dimensions ne nous sont pas accessibles dans toute leur généralité, nous nous demanderons où elles se présentent dans la nature, et s'il ne nous serait pas possible de connaître à fond certaines classes plus restreintes qu'on entrevoit dans les applications. Nous restreindrons donc la notion trop générale, sinon dans son étendue, du moins dans son contenu. Nous nous bornerons à des variétés qui possèdent une métrique de RIEMANN, ou bien sont homéomorphes à des variétés algébriques. Ainsi, par exemple, en partant des espaces métriques, nous ferons apparaître des variétés à  $n$  dimensions comme domaines de discontinuité de groupes de mouvements. On les obtient aussi comme espaces des phases de systèmes mécaniques, en particulier comme espaces dont les points sont des éléments d'arcs, de surfaces ou d'autres espaces bien connus; dans ce cas les variétés sont fibrées. Les « fibres » sont composées des éléments d'arcs passant par un même point. Ou encore, on considère des espaces dont les points représentent des mouvements rigides de la sphère à  $n$  dimensions. On peut aussi étudier des hypersurfaces algébriques, ou encore des variétés groupes, qu'on généralise ensuite et dont les points représentent les transformations d'un groupe de Lie. Ou bien, finalement, on recherche les conditions nécessaires pour qu'une variété à  $n$  dimensions puisse être immergée dans un espace euclidien à  $n$  dimensions.

Voyons d'abord les *variétés* à 3 dimensions. Au premier coup d'œil on pourrait espérer les obtenir toutes en étudiant, pour la sphère, l'espace euclidien et l'espace hyperbolique, les domaines de discontinuité des groupes de mouvements sans points fixes. Pour deux dimensions, toute surface close peut être obtenue comme domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes, ou de la sphère, ou du plan euclidien, ou du plan hyperbolique. En d'autres termes, on peut imposer à toute surface close une métrique de courbure constante égale à 1,0 ou  $-1$ .

On pourrait donc espérer retrouver les mêmes propriétés pour les espaces à 3 dimensions. Malheureusement il n'en est rien. Le plus simple exemple du contraire est le produit topologique de la sphère et du cercle qui ne se trouve pas parmi les domaines de discontinuité. Ceci parce que sa variété de recouvrement universelle possède deux extrémités à l'infini. Donc le nombre de Betti à 2 dimensions du recouvrement universel est  $p^2 = 1$ <sup>1</sup>. Or, rappelons le théorème important suivant: *Le groupe fondamental d'un domaine de discontinuité est le groupe facteur du groupe de mouvements, engendrant ce domaine de discontinuité, par rapport au plus petit sous-groupe contenant tous les mouvements à points fixes.*

Donc, si le produit topologique cité plus haut était le domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes, le groupe de mouvements serait son groupe fondamental. Le recouvrement universel serait par conséquent ou la sphère à 3 dimensions ou l'espace euclidien ou l'espace hyperbolique. Mais ces trois espaces ont un nombre de Betti  $p^2 = 0$  et ne peuvent donc être homéomorphes au recouvrement universel de notre produit topologique. Par contre, ce produit topologique est, pour l'espace euclidien, domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements à points fixes qui peut être engendré par les trois transformations suivantes, exprimées en coordonnées cartésiennes:

$$\text{I. } x' = -y + 1, \quad y' = x, \quad z' = z.$$

$$\text{II. } x' = -y - 1, \quad y' = x, \quad z' = z.$$

$$\text{III. } x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 1.$$

L'étude de tous les domaines de discontinuité des groupes de mouvements sans points fixes ne nous fournira pas tous les espaces à trois dimensions. Mais, contrairement au cas de deux dimensions, déjà l'étude des domaines de discontinuité de la sphère nous donne des espaces intéressants. On sait que l'existence de points fixes, dans un mouvement de la sphère à  $n$  dimensions  $S^n$  sur elle-même, conservant

---

<sup>1</sup> Les indices supérieurs indiquent toujours la dimension et ne sont pas à confondre avec des exposants.

l'orientation, est liée à la parité de  $n$ . Tout mouvement sera à points fixes si  $n$  est pair. Dans ce cas le groupe facteur, du groupe des mouvements par rapport au plus petit sous-groupe contenant tous les mouvements à points fixes, sera formé d'un seul élément. Et en vertu du théorème énoncé plus haut, le groupe fondamental du domaine de discontinuité n'est également composé que de l'élément unité. Mais pour deux dimensions, seule la sphère parmi les surfaces closes possède ce groupe fondamental. Par conséquent, pour deux dimensions, les domaines de discontinuité des groupes de mouvement conservant l'orientation ne sont rien de neuf; ils sont tous homéomorphes à la sphère à deux dimensions. Le seul groupe de transformations métriques de la sphère à deux dimensions, sans points fixes, est d'ordre 2, et son seul élément différent de l'élément unité est la permutation des points diamétraux. C'est une transformation inversant l'orientation. Son domaine de discontinuité est donc une surface non-orientable, à savoir le plan projectif. Pour 3 dimensions les représentations de la sphère sur elle-même, inversant l'orientation, possèdent des points fixes. Par conséquent on n'obtiendra aucun nouveau domaine de discontinuité clos et *non-orientable* de l'espace sphérique. On sait d'une part que les groupes discontinus de mouvements de la sphère à 3 dimensions sont finis, et d'autre part que les espaces non-orientables à 3 dimensions ont des groupes fondamentaux infinis. On voit donc que les espaces non-orientables à 3 dimensions ne peuvent apparaître comme domaines de discontinuité de la sphère à 3 dimensions. D'ailleurs, les domaines de discontinuité des groupes de transformations de  $S^3$  inversant l'orientation ne sont pas même des variétés homogènes.

Il existe par contre des mouvements sans points fixes de  $S^3$  sur elle-même qui conservent l'orientation. Imaginons notre sphère comme sphère à 3 dimensions et de rayon 1, immergée dans l'espace euclidien  $R^4$ . Exprimée en coordonnées cartésiennes son équation aura la forme:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 .$$

Un mouvement sans points fixes sera donné, par exemple, par la transformation :

$$x'_1 = x_1 \cos 2\pi q/p - x_2 \sin 2\pi q/p$$

$$x'_2 = x_1 \sin 2\pi q/p + x_2 \cos 2\pi q/p$$

$$x'_3 = x_3 \cos 2\pi/p - x_4 \sin 2\pi/p$$

$$x'_4 = x_3 \sin 2\pi/p + x_4 \cos 2\pi/p .$$

Elle fait tourner le plan  $x_1 x_2$  de l'angle  $2\pi q/p$  et le plan  $x_3 x_4$  de l'angle  $\frac{2\pi}{p}$ . Nous supposons  $p$  et  $q$  entiers, premiers entre eux et satisfaisant à :  $0 \leq q < p$ . La transformation envisagée engendre un groupe cyclique de mouvements, groupe dont l'ordre est  $p$ . Tous ces mouvements sont sans points fixes, l'identité exceptée.

On peut se faire une idée du domaine de discontinuité en projetant la sphère stéréographiquement sur un hyperplan  $x_4 = 0$  avec le point  $(x_1 x_2 x_3 x_4) = (0 0 0 1)$  comme centre de projection. Ce plan  $x_4 = 0$  est un espace euclidien à 3 dimensions, dans lequel nous introduirons des coordonnées cartésiennes  $xyz$  de telle sorte que les axes  $xyz$  coïncident respectivement avec les axes  $x_1 x_2 x_3$ . Par la projection stéréographique nous imposons artificiellement à ce plan la métrique sphérique que la sphère avait reçue de l'espace à 4 dimensions dans lequel elle fut immergée. Au groupe des mouvements rigides de la sphère  $S^3$  sur elle-même correspond alors dans le plan  $x_4 = 0$  un groupe de « représentations sphériques » de cet espace<sup>1</sup>.

Les intersections de la sphère unité  $S^3$  avec les hyperplans, passant par l'origine de  $R^4$ , c'est-à-dire les grands « hyper-cercles » de la sphère unité, sont représentés sur des sphères diamétrales de la sphère unité. Ces sphères diamétrales sont les sphères qui coupent la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  suivant un grand cercle. Le groupe des représentations sphériques mentionné est caractérisé par le fait que l'application d'un de ses éléments ne fait que permuter les sphères diamétrales de la sphère unité.

L'intersection de la sphère unité avec le plan  $x_1 x_2$  est repré-

<sup>1</sup> Voir par ex. J. HADAMARD, Géométrie anallagmatique. *Nouv. Ann.* (6), 2, p. 257-270.

sentée sur le cercle unité du plan des  $xy$ , celle avec les plans des  $x_3 x_4$  est représentée sur l'axe des  $z$  qui possède dans la métrique sphérique la longueur  $2\pi$ . Un mouvement rigide de la sphère unité  $S^3$ , tel que seul le plan des  $x_1 x_2$  soit tourné d'angle  $\varphi$ , est donc représenté sur une rotation rigide du cercle unité du plan des  $xy$ . Cette rotation est une rotation rigide autour de l'axe des  $z$ . Considérons maintenant le mouvement de la sphère unité qui ne fait que tourner le plan des  $x_3 x_4$  d'un angle  $\varphi$ . Ce mouvement est représenté par la transformation qui n'a pour effet que de faire glisser l'axe des  $z$  sur lui-même de  $\varphi$ , grandeur mesurée sphériquement. Le cercle unité du plan des  $xy$  et l'axe des  $z$  ne se distinguent, sphériquement parlant, en aucune façon. Par une transformation sphérique du type considéré on peut même les transformer l'un dans l'autre. Un mouvement rigide de la sphère unité, faisant tourner simultanément les plans des  $x_1 x_2$  et des  $x_3 x_4$  d'un angle  $\varphi$ , est représenté par un « mouvement hélicoïdal sphérique » qui fait tourner le cercle unité sur lui-même et glisser l'axe des  $z$  d'une même grandeur  $\varphi$ . On peut donc choisir dans l'espace  $xyz$  comme domaine de discontinuité de notre groupe cyclique une lentille massive, limitée par deux calottes passant par le cercle unité du plan des  $xy$ , situées symétriquement par rapport à ce plan et formant entre elles l'angle  $\frac{2\pi}{p}$ . Le mouvement hélicoïdal dont nous avons parlé, ordonne deux à deux les points des deux calottes et ceci de la façon suivante: deux points correspondants s'obtiennent par une rotation de  $\frac{2\pi q}{p}$  autour de l'axe des  $z$  suivie d'une symétrie par rapport au plan équatorial de la lentille, le plan des  $xy$ . Si nous identifions deux points équivalents, la lentille devient le domaine de discontinuité clos qu'est l'espace lenticulaire  $(p, q)$ <sup>1</sup>. Deux points de l'arête de la lentille séparés par un arc de longueur  $\frac{2\pi}{p}$ , sont équivalents. Un tel arc représente donc dans l'espace lenticulaire clos une courbe fermée, qui pour la première fois sera un bord lorsqu'on l'aura parcourue  $p$  fois, à savoir le bord de la calotte.

<sup>1</sup> M. G. de Rham nomme « espaces cycliques » ce que j'appelle « espaces lenticulaires ».

Pour  $p = 1$  et  $p = 2$  on obtient deux espaces à trois dimensions bien connus, l'espace sphérique (sphère à 3 dimensions) et l'espace projectif. Dans ce dernier cas l'arête de la lentille est une droite projective parcourue deux fois et sur la lentille qui est une sphère on a à identifier les points diamétraux. On obtient ces deux espaces en fermant l'espace euclidien respectivement par un point infini et un plan infini. C'est par ce fait qu'ils revêtent toute leur importance, car dans ces espaces fermés les transformations conformes, ou projectives, sont biunivoques.

Pour un  $p$  quelconque on obtient un espace clos à 3 dimensions, dont le groupe fondamental est cyclique d'ordre  $p$ . Comme les groupes fondamentaux sont des invariants topologiques, deux espaces lenticulaires issus de  $p$  différents, sont différents. C'est un problème des plus difficiles que de dire quand deux espaces de même  $p$  mais de  $q$  différents sont homéomorphes ou non. Ce problème vient d'être résolu par M. Reidemeister à l'aide de nouveaux invariants; nous y reviendrons.

Donnons encore deux exemples de domaines de discontinuité à 3 dimensions. Prenons un dodécaèdre massif, qui est un espace à 3 dimensions bordé. On en fait une variété close par l'identification suivante: On identifie deux pentagones parallèles par un mouvement hélicoïdal le long de la droite joignant leurs centres. La rotation de ce mouvement est de  $\frac{\pi}{5}$  et son orientation la même pour toutes les paires de pentagones. On obtient une variété homogène, l'espace dodécaédrique sphérique. Il apparaît aussi comme domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes de l'espace sphérique à 3 dimensions. Le calcul de ses coefficients de torsion montre que c'est un espace de Poincaré et qu'il a par conséquent les mêmes groupes d'homologie que la sphère à 3 dimensions. Le groupe de mouvements, dont il est le domaine de discontinuité, est aussi son groupe fondamental, puisqu'il n'y a pas de points fixes. C'est le groupe icosaédrique binaire d'ordre 120. On obtient un domaine de discontinuité de l'espace hyperbolique, l'espace dodécaédrique hyperbolique, par le procédé d'identification déjà employé, où l'on remplace

la rotation de  $\frac{\pi}{5}$  par une rotation de  $\frac{3\pi}{5}$ . Son groupe fondamental est infini comme celui de tout domaine de discontinuité d'un groupe de mouvements sans points fixes de l'espace hyperbolique. Il n'a pas de nombre de Betti, mais trois coefficients de torsion égaux de valeur 5.

L'instrument le plus puissant pour caractériser, du point de vue topologique, les domaines de discontinuité à 3 dimensions de l'espace sphérique, est la théorie des *espaces fibrés*. La raison est qu'il existe pour tout groupe discontinu  $\mathfrak{H}$  de mouvements rigides de l'espace sphérique, un groupe continu  $\mathfrak{K}$  à un seul paramètre et qui est permutable avec chaque élément  $h$  de  $\mathfrak{H}$ :

$$h \mathfrak{K} h^{-1} = \mathfrak{K} .$$

Les mouvements rigides du groupe  $\mathfrak{H}$  conservent l'ensemble des trajectoires de  $\mathfrak{K}$  et ne font que les échanger entre elles. Il s'en suit que le domaine de discontinuité de  $\mathfrak{H}$  est fibré par les trajectoires de  $\mathfrak{K}$ .

Je vais m'occuper maintenant des espaces fibrés et donner d'abord un exemple montrant l'importance des variétés fibrées.

Prenons une courbe de l'espace euclidien fermée et possédant deux dérivées continues. En un point de cette courbe les extrémités des normales unitaires forment un cercle. Si nous choisissons l'unité de longueur suffisamment petite, l'ensemble de ces cercles engendre une sorte de tore. Cette surface est fibrée par les cercles; nous l'appellerons la *variété-voisinage* de la courbe gauche. Il est clair que nous avons le produit de la courbe gauche et du cercle.

Passons à un espace dont la dimension est plus grande d'une unité. Considérons une surface possédant deux dérivées continues et immergée dans  $R^4$ . Elevons encore les normales unitaires en un point quelconque. Leurs extrémités formeront de nouveau un cercle. Mais cette fois les cercles engendrent une variété-voisinage à 3 dimensions, qui est un espace à 3 dimensions fibré par les cercles. On peut démontrer que cet espace fibré est ici encore le produit topologique de notre surface et du cercle. Une conséquence de cet état de choses est que toute surface de l'espace à 4 dimensions possédant deux dérivées continues,

peut être transformée en une surface algébrique par une déformation arbitrairement petite. Il existe dans les espaces de dimensions supérieures à 4 des exemples, où la variété-voisinage n'est plus le produit topologique de la variété immergée et d'une sphère, qui dans le cas général est à plus de une dimension. Ici il n'est donc plus possible de conclure à la déformabilité en variété algébrique. Par exemple le plan projectif complexe, variété à 4 dimensions, ne peut être immergé dans aucun espace euclidien, de telle sorte que la variété-voisinage soit ce produit topologique<sup>1</sup>.

Que sait-on des espaces fibrés en général et comment peut-on les construire ? F i b r e r l ' e s p a c e euclidien à  $n$  dimensions par des hyperplans parallèles de dimension  $f$ , c'est le remplir simplement et sans lacunes par les hyperplans. Ceci posé, une variété à  $n$  dimensions et close sera dite *fibrée- $f$*  quand elle remplira les conditions suivantes :

1° Les points de la variété se répartissent sur des variétés de dimension  $f$ , les *fibres*, de telle sorte que par chaque point passe une et une seule fibre ;

2° Chaque point possède un voisinage qu'on peut représenter topologiquement et en conservant les fibres sur un voisinage d'un point de l'espace euclidien à  $n$  dimensions fibré- $f$ . (Cette condition peut être appelée la « fibrabilité » locale).

Cette notion est, il est vrai, bien trop générale pour en tirer des résultats.

Nous exigerons donc :

3° Les fibres sont des s p h è r e s à  $f$  dimensions, et (au lieu de 2) nous exigerons la fibrabilité globale ;

4° Toute fibre possède un voisinage de fibres, qu'on peut représenter topologiquement en conservant les fibres sur le produit topologique fibré d'une sphère à  $f$  dimensions et d'un élément à  $(n - f)$  dimensions. Nous poserons  $n - f = d$ .

Dans ce cas les fibres elles-mêmes forment, sous certaines conditions, une variété à  $d$  dimensions. C'est la « *variété de décomposition* » de la fibration.

Nous avons maintenant devant nous un problème de géométrie abordable et qui peut se poser comme suit : *Construire tous les*

<sup>1</sup> Cet exemple a été traité par M. E. STIEFEL.

espaces fibrés à  $n$  dimensions, dont on connaît la variété de décomposition de dimension  $d$ .

Le problème peut être résolu complètement pour les cas suivants: 1<sup>o</sup> La variété de décomposition est à une, deux ou trois dimensions et la fibre une sphère de dimension quelconque. 2<sup>o</sup> La variété de décomposition est de dimension arbitraire et la fibre à une dimension. Dans le cas  $d = 2$ ,  $f = 1$ , donc  $n = 3$ , on obtient pour toute surface close un nombre infini d'espaces fibrés de dimension 3, espaces complètement caractérisés par la surface de décomposition et un nombre entier non négatif  $b$ . Pour  $b = 0$  on a le produit topologique de la surface de décomposition et du cercle. Pour  $b > 0$  on a un espace possédant un coefficient de torsion égal à  $b$ . Si la surface de décomposition est la sphère, on obtient certains espaces lenticulaires qui sont fibrés (sans fibre singulière) et dont le groupe fondamental est cyclique d'ordre  $b$ .<sup>1</sup>

Le problème des espaces fibrés s'énonce dans toute sa généralité: Déterminer tous les espaces fibrés qu'on ne peut pas représenter topologiquement l'un sur l'autre en conservant les fibres.

Sous cette forme le problème est comparable au problème d'homéomorphie, mais il est plus facilement abordable. Il est vrai que la solution du problème énoncée, n'apporterait pas la solution du problème d'homéomorphie. Ceci parce qu'il arrive que des espaces topologiquement équivalents ne peuvent être représentés l'un sur l'autre en conservant les fibres. De plus il existe des espaces qu'on ne peut même pas recouvrir de fibres. La théorie des espaces fibrés a cependant fait progresser la topologie des variétés de points à trois dimensions.

Il est vrai qu'on opère alors avec une généralisation de la notion d'espace fibré, notion qu'il n'est pas aisé d'étendre à plus de 3 dimensions. On doit permettre l'existence de *fibres singulières* autour desquelles les fibres voisines s'enroulent plusieurs fois. Plus exactement, un espace fibré est une variété close à 3 dimensions dont les points se groupent en courbes fermées, les fibres. Par chaque point passe une et une seule fibre.

<sup>1</sup> Voir aussi: H. WHITNEY, Sphere-Spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 21 (1935), p. 464-468.

Toute fibre possède un voisinage de fibres, c'est-à-dire un sous-ensemble de fibres qu'on peut représenter topologiquement et en conservant les fibres sur un tore massif fibré. On obtient un tore massif fibré de la manière suivante: On part d'un cylindre circulaire massif, dont les fibres sont les segments parallèles à l'axe. On identifie alors les deux bases après les avoir fait tourner de  $2\pi \frac{\nu}{\mu}$  l'une par rapport à l'autre.  $\mu$  et  $\nu$  sont deux nombres entiers premiers entre eux satisfaisant à  $0 \leq \nu < \mu$ . Si  $\nu = 0$ , la fibre axiale est dite régulière, sinon elle est singulière, avec les nombres caractéristiques  $\mu$  et  $\nu$ . Parmi les espaces fibrés définis de cette façon, se trouvent plusieurs espaces importants, déjà connus par ailleurs.

Pour les espaces fibrés il est possible d'établir complètement le système des invariants des transformations topologiques conservant les fibres. On pourra donc dire, quand deux de ces espaces donnés peuvent être représentés l'un sur l'autre en conservant les fibres. S'il est possible de le faire pour deux espaces donnés, ceux-ci seront, à plus forte raison, homéomorphes. On peut aussi montrer que si des espaces de Poincaré, la sphère  $S^3$  exceptée, sont susceptibles d'être fibrés, ils ne le sont que d'une seule manière. Il s'en suit que les espaces de Poincaré fibrés sont univoquement caractérisés par leurs invariants de fibration. Par exemple l'espace dodécaédrique sphérique et le premier espace de Poincaré, découvert par Poincaré lui-même, peuvent être fibrés. Puisque les invariants de fibration, dont nous avons parlé plus haut, sont les mêmes pour les deux espaces, ceux-ci sont homéomorphes. Il est peu probable qu'on eût atteint ce résultat sans la théorie des espaces fibrés. On peut démontrer de plus que l'espace dodécaédrique sphérique est le seul espace de Poincaré à groupe fondamental fini, et que la sphère à 3 dimensions est le seul espace susceptible d'être fibré et dont le groupe fondamental ne contienne que l'élément unité. La sphère à 3 dimensions est donc le seul espace simplement connexe susceptible d'être fibré.

On a étudié récemment des espaces fibrés à 3 dimensions qui outre les fibres possèdent encore des *lignes de tourbillons*<sup>1</sup>. On

<sup>1</sup> W. HANTZSCHE u. H. WENDT. Dreidim. wirbelgefasserte Räume. *Math. Zeitschr.* 40 (1936).

les obtient à partir des espaces fibrés ordinaires en enlevant les fibres d'un tore massif fibré. On engendre ainsi une variété dont le bord est un tore fibré. Prenons maintenant un cylindre massif fibré possédant une ligne de tourbillons; c'est un cylindre fibré par les trajectoires du groupe des rotations autour de son axe. C'est son axe qui est la ligne de tourbillons. Nous obtenons par l'identification des deux bases un tore massif fibré à l'intérieur duquel se trouve une ligne de tourbillons fermée. Sa surface est un tore fibré, qu'on peut représenter topologiquement et en conservant les fibres sur le bord de la variété décrite plus haut. En identifiant les points correspondants on obtient encore un espace clos fibré et possédant une ligne de tourbillons. Si l'on recherche le système complet des invariants de tous les espaces fibrés possédant une ligne de tourbillons, on arrive à un résultat des plus étonnants. Les espaces fibrés sans ligne de tourbillons nous avaient conduits à une foule d'exemplaires intéressants: les domaines de discontinuité sphériques, beaucoup d'espaces dérivés des nœuds et une infinité d'espaces de Poincaré. La présence d'une ligne de tourbillons rend triviale la structure topologique des espaces. On a alors la somme topologique d'espaces lenticulaires et de deux autres espaces de structure également fort simple, désignés par anse à 3 dimensions orientable et non-orientable.

Le diagramme de HEEGAARD est un autre procédé pour construire des espaces à 3 dimensions. Mais le problème de trouver tous les diagrammes de Heegaard tracés sur une surface donnée n'est résolu à l'heure actuelle que pour le tore. Dans ce cas on retombe sur les espaces lenticulaires et sur le produit topologique de la sphère et du cercle. Pour une surface de genre  $h = 2$  on ne connaît que des exemples de diagrammes de Heegaard. Parmi ceux-ci se trouve un diagramme, trouvé par Poincaré, de l'espace dodécaédrique sphérique.

Pour nous rapprocher de la solution du problème d'homéomorphie, nous n'avons envisagé jusqu'à maintenant que quelques procédés de construction et nous nous sommes bornés à des classes restreintes de variétés. Pour terminer, j'aimerais indiquer une autre voie qui consiste à chercher des invariants, calculables pour une variété quelconque.

Je laisse de côté le groupe fondamental et les groupes d'homologie, ainsi que les invariants d'enlacement que M. Seifert a déjà employés lors de sa conférence. Je me borne aux invariants nouveaux de M. Reidemeister qui résolvent le problème d'homéomorphie des espaces lenticulaires. Pour exposer cette méthode, considérons un espace clos à 3 dimensions, subdivisé en cellules orientées. Les cellules seront :

$$a_{\mu}^k$$

$k$  indique la dimension et prend les valeurs 0 1 2 3;  $\mu$  est l'indice du simplexe et varie de 1 à  $\alpha^k$ , où  $\alpha^k$  est le nombre de simplexes de dimension  $k$ . Formons, comme en homologie, des chaînes de cellules

$$u^k = \sum_{\mu} \lambda_{\mu} a_{\mu}^k,$$

où les  $\lambda_{\mu}$  sont entiers. Les chaînes forment un groupe abélien libre qui est engendré par autant d'éléments qu'il y a de cellules à  $k$  dimensions dans la variété.

Passons maintenant à la variété de recouvrement universelle et calquons sur elle la subdivision en cellules données.

Soient  $f_1 f_2, \dots$ , les éléments du groupe fondamental et en même temps les mouvements de superposition de la variété de recouvrement universelle. Choisissons un domaine de discontinuité et désignons ses cellules par les mêmes symboles  $a_{\mu}^k$ . Les chaînes du recouvrement universel peuvent s'écrire sous la forme

$$\sum_{\mu v} \lambda_{\mu v} f_v a_{\mu}^k.$$

Les coefficients  $\lambda_{\mu v}$  sont des entiers et les coefficients de  $a_{\mu}^k$ , à savoir  $\gamma_{\mu} = \sum \lambda_{\mu v} f_v$ , forment ce qu'on appelle un *groupe-anneau* (Gruppenring), et ils se composent en respectant les règles de multiplication du groupe fondamental.

On peut considérer le groupe des chaînes à  $k$  dimensions de la variété de recouvrement universelle comme un groupe avec opérateurs. Ce groupe est engendré par les  $a_{\mu}^k$  et le domaine des opérateurs est le groupe-anneau.

A chaque chaîne correspond une frontière et les frontières sont entièrement données dans la variété fondamentale par les

relations d'incidence

$$\text{Rd } a_{\mu}^k = \sum_v \varepsilon_{\mu v}^{k-1} a_v^{k-1} ;$$

où  $\varepsilon_{\mu v}^{k-1}$  prend les valeurs 0, + 1 ou - 1. Ces relations d'incidence se calquent également sur la variété de recouvrement et elles y prennent la même forme; cependant  $\varepsilon_{\mu v}^{k-1}$  représente maintenant un élément du groupe-anneau.

Du point de vue purement algébrique, les relations d'incidence fournissent une représentation homéomorphe du groupe des chaînes à  $k$  dimensions sur le groupe des chaînes à  $k - 1$  dimensions: à chaque chaîne de dimension  $k$  il faut faire correspondre sa chaîne frontière à  $k - 1$  dimensions. L'ensemble de ces quatre groupes de chaînes à  $k$  dimensions ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) avec les relations d'incidence est appelé: *anneau d'homotopie*.

On peut dès lors entrevoir comment l'anneau d'homotopie se transforme lorsqu'on subdivise les cellules. L'ensemble de tous les anneaux d'homotopie qu'on obtient par subdivision ou par l'opération inverse de l'espace donné est évidemment un invariant de l'espace considéré.

Jusqu'ici nous n'avons fait que définir cet invariant. Mais définir un invariant sans donner le moyen de le calculer, c'est émettre des billets sans couverture. Pourtant, dans le cas d'un groupe fondamental cyclique on réussit à en tirer des invariants numériques calculables et qui permettent de distinguer les espaces lenticulaires.

\* \* \*

Au cours de la discussion M. G. de RHAM a donné une méthode de calcul qui est valable pour les espaces lenticulaires à  $n$  dimensions. Elle est intéressante par le fait qu'elle applique des théorèmes modernes d'algèbre. La place me manque pour en donner un exposé ici. Je dois me borner à renvoyer le lecteur à une conférence de M. de Rham au Congrès de topologie de Moscou et à une publication du même auteur qui paraîtra sous peu.

On trouvera la *bibliographie* des questions traitées ci-dessus dans les cours de topologie de SEIFERT-THRELFALL (Leipzig, 1934) et de ALEXANDROFF-HOPF (Berlin, 1936).

# INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SÉRIES D'ÉQUIVALENCE SUR UNE SURFACE ALGÈBRIQUE <sup>1</sup>

PAR

E. G. TOGLIATTI (Gênes).

---

1. — La Géométrie algébrique, c'est-à-dire la Géométrie des variétés algébriques au point de vue des transformations birationnelles des variétés mêmes, s'est enrichie récemment d'un nouveau chapitre dont l'importance est bien remarquable. Il s'agit d'une manière nouvelle de construire sur les surfaces algébriques (et, plus généralement, sur les variétés algébriques à plus de deux dimensions) une théorie analogue à celle des séries linéaires de groupes de points sur les courbes algébriques: la théorie des séries d'équivalence de groupes de points.

Le premier travail dans cet ordre d'idées est un Mémoire de M. F. SEVERI, publié en 1932 dans les *Comm. Math. Helv.* à l'occasion du dernier Congrès international des Mathématiciens; l'école géométrique italienne, et surtout M. Severi, ont ensuite développé la nouvelle théorie, dont l'intérêt ne fait qu'augmenter, soit à cause des résultats qu'on en a déjà tirés dans le domaine de la géométrie, soit à cause des points de contact, nombreux et suggestifs, qu'elle présente avec d'autres théories de la géométrie et de l'analyse. Dans cette introduction je me propose de vous présenter, le plus rapidement possible, la définition géométrique des séries d'équivalence sur une surface algébrique, et de vous exposer quelques-unes des liaisons entre la théorie dont il est question et la Topologie des surfaces algébriques, en laissant toujours de côté les détails des démonstrations.

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

2. — Soit  $C$  une courbe algébrique irréductible dans un espace linéaire  $S_r$  à  $r$  dimensions ( $r \geq 2$ ); nous indiquerons par  $x_0 x_1 \dots x_r$  les coordonnées homogènes d'un point dans cet espace. On appelle *série linéaire* sur  $C$  l'ensemble des groupes de points qui sont découpés sur  $C$  par les hypersurfaces d'un système linéaire:

$$\lambda_0 f_0(x_i) + \lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_s f_s(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r); \quad (1)$$

on peut dire aussi: l'ensemble des groupes de niveau constant d'une fonction rationnelle sur la courbe  $C$ :

$$\varphi(x_i) = \lambda_1 \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} + \dots + \lambda_s \frac{f_s(x_i)}{f_0(x_i)} \quad (i = 0, 1, \dots, r). \quad (2)$$

Si l'on prend une surface algébrique  $F$  au lieu d'une courbe  $C$ , on voit aussitôt deux généralisations possibles de cette notion. Avant tout, on peut considérer sur  $F$ , que nous supposons encore appartenant à  $S_r$  ( $r \geq 3$ ), les courbes d'intersection avec les hypersurfaces d'un système linéaire (1), c'est-à-dire les courbes de niveau constant d'une fonction rationnelle  $\varphi$  sur  $F$ ; elles forment un *système linéaire de courbes* sur  $F$ . Ou bien l'on peut, soit prendre les points d'intersection de  $F$  avec des variétés algébriques  $V_{r-2}$  à  $r - 2$  dimensions (donc avec des courbes, en général gauches, lorsque  $F$  est une surface de l'espace ordinaire à trois dimensions), soit considérer en même temps sur  $F$  deux fonctions rationnelles indépendantes  $\varphi, \psi$  avec leurs groupes de niveaux constants simultanés; tant par l'une que par l'autre de ces deux constructions, on obtient sur  $F$  des ensembles de groupes de points, dont nous allons préciser la définition, qui sont analogues aux séries linéaires sur une courbe, et qui ont reçu le nom de *séries d'équivalence* de groupes de points sur  $F$ . Systèmes linéaires de courbes et séries d'équivalence de groupes de points sont sans doute deux idées bien différentes, car elles sont liées respectivement à une seule ou bien à deux fonctions rationnelles sur  $F$ . En passant des courbes aux surfaces elles se présentent l'une et l'autre assez naturellement; mais tandis que la première, la théorie des systèmes linéaires de courbes, est depuis longtemps une théorie organique, moyen puissant de recherche dans la

géométrie des variétés algébriques à deux dimensions, la deuxième, qui se présente du premier abord comme bien plus difficile, a été étudiée seulement dans ces dernières années.

La définition même d'une série d'équivalence de groupes de points sur une surface n'est pas immédiate à énoncer. Elle a traversé, dès le commencement de la théorie, plusieurs modifications dont il ne peut pas être question ici; et cela est assez naturel: les développements ultérieurs possibles de la théorie étant imprévisibles, on ne pouvait choisir *a priori* avec certitude, parmi les propriétés caractéristiques des séries linéaires sur une courbe, la plus convenable à imiter. La définition que je vais exposer, et qui semble désormais définitive, est la plus commode pour organiser d'une façon simple la théorie; elle est intrinsèque à la surface que l'on considère, et rend en même temps évident que ce que l'on définit est invariant par rapport aux transformations birationnelles de la surface. On commence par définir certaines *séries élémentaires*, à partir desquelles on obtient les séries les plus générales à l'aide des opérations de somme et de différence; de la manière suivante.

On appelle *série d'équivalence élémentaire sur F* l'ensemble des groupes de niveaux constants simultanés de deux fonctions rationnelles indépendantes  $\varphi$ ,  $\psi$ , à considérer sur F. Ces groupes de points sont les intersections d'une courbe de niveau de  $\varphi$  et d'une courbe de niveau de  $\psi$ , de toutes les manières possibles; et puisque les courbes de niveau constant de  $\varphi$ ,  $\psi$  forment deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$ , on peut dire aussi, d'une façon plus géométrique, mais encore intrinsèque et invariante, qu'une *série élémentaire se compose des groupes des points d'intersection de deux courbes qui varient sur F appartenant à deux systèmes linéaires donnés*; d'où le nom de *séries d'intersection complète* qu'on avait donné aussi aux séries élémentaires.

Si les deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$  ont des points-base en commun, ceux-ci appartiennent à tous les groupes de la série élémentaire; on peut les négliger.

On peut faire rentrer dans la définition qui vient d'être donnée les cas particuliers suivants. Si  $|C_1|$  et  $|C_2|$  se réduisent à deux courbes fixes  $C_1$  et  $C_2$ , la série élémentaire se compose d'un seul groupe de points fixes de F. Si  $|C_1|$  se réduit à une courbe

fixe  $C_1$ , tous les groupes de la série appartiennent à  $C_1$ ; la série s'appelle alors une *série d'équivalence curviligne*, en opposition aux *séries superficielles* dont les groupes recouvrent  $F$  toute entière; on dit aussi que les groupes de la série sont *semifixes* sur  $C_1$ ; si  $C_1$  est irréductible, la série considérée est une série linéaire, découpée sur  $C_1$  par le système  $|C_2|$ ; et toute série linéaire sur une  $C_1$  irréductible est une série élémentaire particulière sur  $F$ . Enfin, si toutes les courbes de  $|C_1|$ , par exemple, contiennent une composante fixe  $\gamma_1$ , *irréductible* ou *non*, les groupes de la série élémentaire contiennent tous un certain nombre de points semifixes sur  $\gamma_1$ .

3. — Ces dernières remarques montrent la nécessité de construire une théorie des séries de groupes de points sur les courbes algébriques *réductibles* avant de commencer une théorie quelconque des séries d'équivalence sur une surface; en effet, comme un groupe de points qui varie sur une courbe peut contenir des points fixes, il est bien évident, même *a priori*, qu'un groupe de points variables sur une surface peut contenir soit des points fixes soit des points qui peuvent varier seulement sur une courbe. Cette théorie, tentée par M. NOETHER en 1886, a été développée par M. SEVERI en 1932. Il a défini une série d'équivalence sur une courbe réductible  $C$  comme l'ensemble des groupes des points qui sont découpés sur  $C$  par les hypersurfaces d'un système linéaire; et parmi les choses fondamentales il a trouvé qu'une telle série peut être découpée sur  $C$  par un système linéaire d'hypersurfaces dont les éléments correspondent birationnellement aux groupes de la série; et qu'une série d'équivalence *complète* sur une courbe composée  $C_1 + C_2 + \dots + C_h$  s'obtient toujours en prenant des séries linéaires complètes  $g_{n_1}, g_{n_2}, \dots$  sur les courbes composantes (ou sur quelques-unes seulement de ces courbes), et en réunissant, de toutes les manières possibles, un groupe de  $g_{n_1}$  avec un groupe de  $g_{n_2}$ , etc.

On comprend aussi qu'en passant des courbes irréductibles aux courbes réductibles et aux surfaces, on doit abandonner le nom de série *linéaire*, car les groupes, par exemple, d'une série complète sur une courbe réductible ne peuvent plus être mis en correspondance birationnelle *sans aucune exception* avec les

points d'un espace linéaire, comme dans le cas d'une courbe irréductible.

Mais il faut ajouter que les groupes d'une série élémentaire  $\sigma$ , qui ne se compose pas d'un seul groupe de points fixes, forment toujours une variété rationnelle. En effet, si  $\sigma$  n'est pas une série curviligne, il y a une correspondance birationnelle entre les groupes de  $\sigma$  et les couples d'éléments de deux variétés linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$ ; tandis que, lorsque  $\sigma$  est une série curviligne, ses groupes correspondent birationnellement, nous l'avons dit tout à l'heure, aux courbes d'un système linéaire convenable.

4. — Si l'on dispose d'un modèle projectif de  $F$  dans l'espace ordinaire, on peut donner pour une série élémentaire la construction suivante. Les deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$  qui définissent la série sont découpés sur  $F$ , en excluant certaines courbes fixes éventuelles, par deux systèmes linéaires de surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ ; l'intersection d'une surface de  $\Sigma_1$  avec une surface de  $\Sigma_2$  est alors une courbe, en général gauche, qui varie dans un système continu  $S$  de courbes, et qui rencontre  $F$  en les points d'un groupe de la série donnée (et peut-être encore dans des points fixes que l'on peut négliger). La construction s'applique encore dans tous les cas particuliers que la série peut présenter; si  $\Sigma_1$ , par exemple, admet une courbe-base appartenant à  $F$ , tous les groupes de la série contiennent une partie semifixe.

5. — Soient maintenant  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  deux séries élémentaires; on peut alors parler de la série *somme*  $\sigma_1 + \sigma_2$ . Si  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  sont découpées sur  $F$  par des systèmes continus  $S_1$  et  $S_2$  de courbes, la série  $\sigma_1 + \sigma_2$  sera découpée sur  $F$  par le système  $S_1 + S_2$ .

S'il y a dans  $\sigma_1$  des groupes chacun contenant un groupe de  $\sigma_2$ , les groupes résidus forment une série  $\sigma$  qu'on appelle la *différence*  $\sigma_1 - \sigma_2$ . La série ainsi obtenue peut être découpée sur  $F$  elle aussi à l'aide de courbes convenables <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> En effet, soient  $S_1$ ,  $S_2$  les deux systèmes de courbes qui découpent sur  $F$  les séries données  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , en dehors de certains groupes de points fixes  $A_1$ ,  $A_2$ ; et soit  $G$  un groupe variable de  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Il y aura alors une courbe  $C_1$  de  $S_1$  qui découpe sur  $F$  les points de  $G$ , ceux de  $A_1$  et ceux d'un groupe  $G_2$  de  $\sigma_2$ ; et il y aura aussi une courbe  $C_2$  de  $S_2$

Si, par exemple,  $\sigma_1$  est une série élémentaire dont les groupes contiennent une partie semifixe qui varie dans une série élémentaire (curviligne)  $\sigma_2$ , alors  $\sigma_1 - \sigma_2$  s'obtient de  $\sigma_1$  en négligeant dans tous ses groupes la partie semifixe; on l'appelle une *série d'intersection partielle*.

De tout ce qui précède on déduit que, lorsqu'on connaît sur  $F$  des séries élémentaires  $\sigma_1 \sigma_2 \dots, \sigma'_1 \sigma'_2 \dots$ , on peut considérer aussi une série du type  $\Sigma\sigma_i - \Sigma\sigma'_i$ , pourvu qu'il existe des groupes de  $\Sigma\sigma_i$  qui contiennent chacun un groupe de  $\Sigma\sigma'_i$ . Voilà les séries d'équivalence les plus générales: *Une série d'équivalence sur une surface algébrique  $F$  est donc un ensemble de groupes de points qu'on peut obtenir à l'aide des opérations de somme et de différence en partant d'un nombre fini de séries élémentaires.*

6. — On peut démontrer encore que tout système continu  $S$  de courbes découpe sur  $F$  une série d'équivalence, même lorsque la courbe générale  $C$  de  $S$  n'est pas l'intersection complète de deux surfaces comme au n° 4. La démonstration, bien simple, s'appuie sur la représentation monoïdale des courbes gauches et de la manière suivante. La courbe  $C$  est l'intersection partielle du cône, qu'on obtient en la projetant d'un point  $O$  de l'espace, avec une surface monoïdale  $\Sigma_1$  bien déterminée, de sommet  $O$ , dont l'ordre ne change pas lorsque  $C$  décrit  $S$ . La partie restante de l'intersection  $(\Sigma\Sigma_1)$  est à son tour l'intersection complète du même cône  $\Sigma$  avec une surface convenable  $\Sigma_2$ . La série découpée sur  $F$  par les courbes  $C$  de  $S$  est donc la différence des deux séries découpées sur  $F$  par les deux courbes variables d'intersection complète  $(\Sigma\Sigma_1)$  et  $(\Sigma\Sigma_2)$ .

Toutes ces constructions peuvent s'étendre sans aucune difficulté aux surfaces d'un espace  $S_r$  à  $r > 3$  dimensions; on parlera alors de variétés  $V_{r-2}$  à  $r - 2$  dimensions au lieu de parler de courbes de  $S_3$ . En conclusion: *Les séries d'équivalence*

---

découpant  $F$  en  $G_2$  et  $A_2$ ; c'est-à-dire:

$$(C_1, F) = G + A_1 + G_2, \quad (C_2, F) = G_2 + A_2;$$

on en déduit:

$$(C_1 - C_2, F) = G + (A_1 - A_2).$$

Donc  $G$  est découpé sur  $F$  par la courbe  $C_1 - C_2$ , en dehors du groupe fixe  $A_1 - A_2$ . Il est bien possible que tout cela doive être entendu au sens *virtuel*, comme il arrive bien souvent dans la théorie des opérations sur les séries et les systèmes linéaires.

sur une surface  $F$  peuvent s'obtenir en découpant  $F$  par les  $V_{r-2}$  d'une famille continue, ou bien comme différence de deux séries ainsi construites.

Un résultat annoncé très récemment par M. SEVERI a précisé davantage la construction d'une série d'équivalence, dans le sens que les groupes d'une telle série sont toujours les intersections de  $F$  avec une  $V_{r-2}$ , variable d'une manière continue, en dehors, peut-être, d'un groupe de points fixes et d'un groupe semifixe sur une courbe irréductible de  $F$ .

La définition et la construction des séries d'équivalence sur une surface deviennent ainsi complètes et parfaites.

7. — Laissons de côté maintenant l'aspect algébrico-géométrique de la théorie pour traiter des liaisons entre les séries d'équivalence que nous venons de définir et les propriétés topologiques de la surface  $F$ . Le problème fondamental qui se présente ici est de caractériser une série d'équivalence  $\sigma$  donnée sur  $F$  au moyen de propriétés topologiques; à cet effet il faut considérer sur la Riemannienne, à quatre dimensions, de  $F$  les cycles formés par des groupes de  $\sigma$ , c'est-à-dire les cycles qu'on peut obtenir en faisant varier sur  $F$  un groupe de  $\sigma$ . On voit mieux la chose au travers d'une variété  $V$  qui représente birationnellement les groupes de  $\sigma$ ;  $V$  aura la même dimension (complexe)  $r$  de  $\sigma$ ; on peut l'obtenir bien simplement comme une variété contenue dans une image birationnelle de tous les groupes de  $n$  points de  $F$ . On aura alors entre  $V_r$  et  $F$  une certaine correspondance algébrique, par laquelle à tout point  $P'$  de  $V_r$  correspondent sur  $F$  les  $n$  points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  d'un groupe de  $\sigma$ , tandis qu'à un point  $P$  de  $F$  correspondent sur  $V_r$  tous les points  $P'$  qui sont les images des groupes de  $\sigma$  contenant  $P$ . Lorsque  $P'$  décrit sur  $V_r$  un cycle  $\Delta'$ , on peut démontrer que les points correspondants sur  $F$  décriront eux aussi un cycle  $\Delta$ , ayant la même dimension que  $\Delta'$ . On peut se borner aux cycles à une ou à deux dimensions, soit à cause de la dualité topologique qui fait correspondre les cycles à une et ceux à trois dimensions sur la Riemannienne de  $F$ , soit parce qu'un cycle  $\Delta'$  de dimension plus grande que trois donne lieu sur  $F$  à des cycles sans intérêt<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> L'affirmation précédente est facile à établir. Lorsque  $\Delta'$  est un cycle linéaire,  $\Delta$  aussi est évidemment un cycle linéaire. Supposons alors que  $\Delta'$  soit un cycle à deux

On voit aussi tout de suite que si  $\Delta'$  est nul,  $\Delta$  aussi est nul; et que, à cause du caractère algébrique de la correspondance entre  $V_r$  et  $F$ , si  $\Delta'$  est algébrique  $\Delta$  l'est aussi.

Choisissons alors sur  $F$  une base pour les cycles à une et à deux dimensions; la première se compose de  $2q$  cycles  $\Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \dots, \Gamma_1^{2q}$ , où  $q = p_g - p_a$  est l'irrégularité de  $F$ ; la deuxième comprend, en général,  $\rho$  cycles algébriques non nuls  $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^\rho$ ,  $\rho_0$  cycles qui ne sont pas algébriques et qui sont homologiquement indépendants des cycles algébriques  $\Gamma_2^{\rho+1}, \Gamma_2^{\rho+2}, \dots, \Gamma_2^{\rho+\rho'}$  et enfin  $\tau - 1$  cycles diviseurs de zéro  $\Gamma_2^{\rho+\rho_0+1}, \dots, \Gamma_2^{\rho+\rho_0+\tau-1}$ ; on sait que  $\rho$  est le nombre-base de MM. PICARD et SEVERI pour la totalité des courbes algébriques existant sur  $F$ ,  $\rho_0$  est le nombre des intégrales doubles de la deuxième espèce appartenant à  $F$ ; au point de vue topologique  $\rho + \rho_0$  est l'ordre de connexion superficielle de  $F$ , tandis que  $\sigma$  est lié à la torsion superficielle de  $F$ .

Soient encore  $\Delta_1^h$  et  $\Delta_2^k$  deux bases pour les cycles à une et à deux dimensions de  $V_r$ .

Si  $\Delta_1^h$  et  $\Delta_2^k$  sont les cycles de  $F$  qui correspondent à  $\Delta_1^h$  et à  $\Delta_2^k$ , on pourra écrire les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_1^h &\sim \sum_{i=1}^{2q} \lambda_{hi} \Gamma_1^i ; \\ \Delta_2^k &\sim \sum_{i=1}^{\rho} \mu_{ki} \Gamma_2^i + \sum_{i=1}^{\rho_0} \bar{\mu}_{ki} \Gamma_2^{\rho+i} + \sum_{i=1}^{\tau-1} \nu_{ki} \Gamma_2^{\rho+\rho_0+i} . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

On pourrait écrire ces formules pour toute série algébrique de groupes de points sur  $F$ ; mais dans notre cas il s'agit d'une série

dimensions. La variété  $V_r$  contient une variété dirimante  $\Phi$ , qui est lieu des points de  $V_r$  qui représentent les groupes de  $n$  points de  $\sigma$  contenant des points confondus; si l'on suppose qu'un groupe de  $\sigma$  se compose en général de  $n$  points différents, la variété  $\Phi$  aura au plus  $2r - 2$  dimensions réelles; et le cycle  $\Delta'$ , ou bien un cycle homologue très voisin, aura un nombre fini de points communs avec  $\Phi$ ; entourons tous ces points de  $\Delta'$  par des petites cellules à deux dimensions qui les contiennent à leur intérieur;  $\Delta'$  deviendra une surface ouverte  $\Delta'_0$ , qu'on peut recouvrir par un complexe  $k'$ ; à chaque cellule à deux dimensions de  $k'$  correspondent, sur  $F$ ,  $n$  cellules analogues toutes différentes et qui ne présentent pas de points communs; à  $k'$  correspond donc un complexe  $k$  à deux dimensions qui recouvre la surface  $\Delta_0$  correspondante à  $\Delta'_0$ ; au contour de  $k'$  correspond le contour de  $k$ ; en passant à la limite, lorsque  $\Delta'_0$  tend vers  $\Delta'$ ,  $\Delta_0$  se fermera en même temps que  $\Delta'_0$  et tendra vers  $\Delta$  qui sera donc un cycle à deux dimensions. Selon donc que  $\Delta'$  est linéaire ou à deux dimensions,  $\Delta$  est aussi linéaire ou à deux dimensions.

d'équivalence. Quelles particularités présentent alors les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\nu$  ? On comprend bien, en effet, que ces coefficients doivent jouer un rôle très important dans notre théorie.

Supposons en premier lieu que  $\sigma$  soit une série élémentaire, qui ne se réduise pas à un seul groupe de points fixes.  $V_r$  est dans ce cas une variété rationnelle. On en déduit que tout cycle linéaire  $\Delta'$  de  $V_r$  est nul; le cycle correspondant  $\Delta$  sur  $F$  sera nul aussi, et les coefficients  $\lambda$  seront tous nuls. Tout cycle à deux dimensions de  $V_r$  peut être transporté sur une surface rationnelle contenue dans  $V_r$ ; il est donc algébrique et il n'est pas un diviseur de zéro; le cycle correspondant sur  $F$  aura les mêmes propriétés; donc tous les coefficients  $\bar{\mu}$  et  $\nu$  seront nuls.

A ce point il convient de donner quelques définitions. On dira qu'une série algébrique de groupes de points sur  $F$  est:

a) à *circulation linéaire nulle*, lorsque les coefficients  $\lambda$  des formules (3) sont tous nuls, c'est-à-dire lorsque à tout cycle linéaire de l'image  $V_r$  de la série correspond sur  $F$  un cycle linéaire nul;

b) à *circulation superficielle algébrique*, lorsque les coefficients  $\bar{\mu}$  sont tous nuls, c'est-à-dire lorsque à tout cycle à deux dimensions de  $V_r$  correspond sur  $F$  un cycle algébrique;

c) à *cycle-torsion nulle* lorsque les coefficients  $\nu$  sont tous nuls, de sorte qu'à tout diviseur de zéro à deux dimensions de  $V$  correspond sur  $F$  un cycle nul. On emploie le terme « cycle-torsion », sans dire simplement « torsion », parce que  $V$  peut bien avoir une torsion superficielle.

Une série élémentaire est donc en même temps à circulation linéaire nulle, à circulation superficielle algébrique et à cycle-torsion nulle. Il faut remarquer que, même pour une série élémentaire, les coefficients  $\mu$  ne seront pas en général tous nuls; en effet, si la série est l'intersection des deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$ , une courbe de  $|C_1|$  donne lieu sur  $F$  à un cycle à deux dimensions, lieu de groupes de la série, et qui n'est pas en général nul; donc, si l'on cherche une définition topologique des séries d'équivalence, il ne faut pas exiger la condition que la circulation superficielle soit complètement nulle.

Les mêmes propriétés sont évidemment vraies aussi pour la somme de deux séries élémentaires.

Pour passer à la différence  $\sigma_1 - \sigma_2$  de deux séries élémentaires, il faut dire d'avance que si une série  $\sigma$  a la propriété *a*) ou *b*) ou *c*), et si  $\sigma'$  est une série contenue dans  $\sigma$ , elle aura aussi la propriété *a*) ou *b*) ou *c*); la chose est presque évidente, et vient de ce que l'image  $V'$  de  $\sigma'$  est contenue dans l'image  $V$  de  $\sigma$ . Soit donc  $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ ; à tout groupe  $G$  de  $\sigma$  on pourra associer un groupe  $G_2$  de  $\sigma_2$  et un groupe  $G_1$  de  $\sigma_1$  de manière que  $G = G_1 - G_2$ ; lorsque  $G$  varie dans  $\sigma$ , les lieux de  $G_1$  et de  $G_2$  seront deux séries  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$ , qui pourront être différentes de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , mais qui seront certainement contenues dans  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Si la correspondance entre les groupes  $G, G_1, G_2$  est univoque, on pourra représenter  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  sur la même variété  $V_r$  qui représente déjà  $\sigma$ ; et alors un cycle  $\Delta'$  de  $V_r$  donnera lieu à trois cycles  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  de  $F$ , lieux de groupes de  $\sigma, \sigma'_1, \sigma'_2$ , et l'on aura  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ . Donc, si  $\Delta'$  est linéaire,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et donc  $\Delta$  aussi, seront nuls car  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  sont contenues dans  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ; de même, si  $\Delta'$  a deux dimensions,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et donc  $\Delta$  aussi, seront algébriques et ne seront pas des diviseurs de zéro. Il faut procéder avec un peu plus d'attention lorsque à tout groupe  $G_1$  (ou  $G_2$ ) correspondent plusieurs groupes  $G$ ; dans ce cas  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  ne peuvent plus être représentées birationnellement sur  $V_r$ , mais seulement sur des involutions ou sur des systèmes de variétés contenues dans  $V_r$ ; mais ces involutions ou systèmes seront en tous cas des nouvelles variétés algébriques  $V'_{(1)}$  et  $V'_{(2)}$ ; de sorte qu'on passera du cycle  $\Delta'$  aux cycles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  à travers deux cycles sur ces variétés nouvelles.

En conclusion: *Toute série d'équivalence est à circulation linéaire nulle, à circulation superficielle algébrique et à cycle-torsion nulle.*

La propriété inverse est-elle vraie? Il y a des raisons pour le supposer; les séries d'équivalence seraient alors complètement caractérisées au point de vue topologique. Mais la démonstration de la propriété inverse n'existe pas encore; l'avenir dira si les suppositions en sa faveur sont justifiées ou non.

8. — Les questions nouvelles qui se présentent ici, et dont les solutions ne sont pas encore toutes connues, sont vraiment nombreuses et importantes.

En premier lieu, les considérations topologiques que nous avons rapidement développées suggèrent tout naturellement

une question qui n'a pas d'analogue dans la théorie des courbes algébriques. Sur une telle courbe les groupes  $G$  d'une série continue sont équivalents entre eux s'il existe un nombre  $k > 1$  tel que les groupes  $kG$  soient équivalents; sur une surface les groupes  $kG$  peuvent bien appartenir à une série d'équivalence sans que les groupes  $G$  appartiennent à une série d'équivalence. Cela dépend de la circonstance que les surfaces algébriques peuvent avoir une torsion topologique. Il faut donc introduire aussi des *séries de pseudoéquivalence*, qui sont définies par la propriété qu'on vient de dire. Pour ces autres séries il est possible de donner une définition topologique complète: elles sont les seules séries dont la circulation superficielle est algébrique, et dont la circulation linéaire est *pseudonulle*; cette dernière condition se traduit sur les coefficients  $\lambda$  des formules (3), et signifie que tout cycle linéaire de  $F$  rempli par des groupes de la série est un diviseur de zéro. Les séries d'équivalence sont des cas particuliers des séries de pseudoéquivalence.

On a cherché aussi à établir quelles sont les surfaces dont les points sont deux à deux pseudoéquivalents; les surfaces en question sont les surfaces régulières dont le genre géométrique est nul. Si l'on veut, en particulier, des surfaces dont les points soient deux à deux équivalents, il faut ajouter la condition que sur la surface que l'on considère la division des courbes soit univoque; les trois conditions sont vérifiées en même temps par les surfaces rationnelles, mais l'on ne sait pas encore si elles entraînent nécessairement la rationalité de la surface.

Une autre question fondamentale est celle des séries d'équivalence *complètes*. Il y a ici une grande différence entre la théorie des courbes et celle des surfaces; en effet, si les groupes de points  $A, B, C$  d'une surface sont deux à deux équivalents, on ne peut dire que les trois séries d'équivalence complètes et irréductibles définies par  $A, B; B, C; C, A$  représentent toujours une seule et même série.

Je rappelle enfin l'application qu'on a faite de la notion des séries d'équivalence à la théorie générale des correspondances algébriques entre deux surfaces algébriques. Cette théorie, qui a été abordée par M. G. ALBANESE en partant des propriétés des systèmes continus complets de courbes existant sur une surface

algébrique, a été développée par M. SEVERI comme application de la théorie des séries d'équivalence, d'une manière qui montre lumineusement quels sont les traits essentiels de la question, et qui permet d'arriver à un principe général de correspondance pour les surfaces algébriques; le principe que M. ZEUTHEN avait donné en 1906 y rentre comme un cas particulier.

Et je voudrais vous parler encore des invariants nouveaux d'une surface algébrique qu'on peut déjà entrevoir à l'aide de la théorie des séries d'équivalence.

Mais j'ai déjà trop abusé de votre patience ! J'espère que le peu que j'ai dit suffira pour vous montrer que la géométrie des variétés algébriques, loin d'être épuisée, a trouvé un terrain encore inconnu dont on ne peut pas encore prévoir toute l'importance et toutes les ressources. Et quant aux rapports entre la géométrie algébrique et la topologie, j'espère que la géométrie algébrique donnera encore une fois aux spécialistes de la topologie des exemples précieux, des idées fécondes.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. F. SEVERI. La série canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica. *Comm. Math. Helv.*, 4, 1932, pp. 268-326.
2. ID. Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. *Mem. Accad. d'Italia*, 3, 1932, n° 5, pp. 5-52.
3. F. ENRIQUES. Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica. *Rend. Accad. Lincei* (6), 16, 1932, pp. 533-540.
4. A. COMESSATTI. Sulla serie canonica d'una superficie algebrica. *Rend. Accad. Lincei* (6), 16, 1932, pp. 555-560.
5. L. CAMPEDELLI. Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 37-40.
6. F. SEVERI. Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle superficie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche. *Mem. Accad. d'Italia*, 4, 1933, n° 6, pp. 71-129.
7. ID. La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: invarianza del concetto fondamentale. Nota I. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 419-425.
8. ID. La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: operazioni sulle serie. Nota II. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 491-497.

9. F. SEVERI. La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: i punti di vista topologico e trascendente. Nota III. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 597-600.
  10. ID. La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: le corrispondenze a valenza in senso invariante. Nota I. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 681-685.
  11. ID. La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: il principio di corrispondenza. Nota II. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 759-764.
  12. ID. La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: il principio di corrispondenza. Nota III. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 869-876.
  13. ID. Significato funzionale del gruppo virtuale dei punti uniti nelle corrispondenze a valenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 876-881.
  14. B. SEGRE. Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche. *Mem. Accad. d'Italia*, 5, 1934, n° 10, pp. 479-576.
  15. F. SEVERI. Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie di equivalenza: proprietà preliminari. Nota I. *Rend. Accad. Lincei* (6), 19, 1934, pp. 750-754.
  16. ID. Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie di equivalenza: i loro gruppi Jacobiani virtuali. Nota II. *Rend. Accad. Lincei* (6), 19, 1934, pp. 831-836.
  17. ID. Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 20, 1934, pp. 287-293.
  18. ID. Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 20, 1934, pp. 395-397.
  19. ID. Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 21, 1935, pp. 3-5.
-

# TOPOLOGIE DES TRANSFORMATIONS DES SURFACES <sup>1</sup>

PAR

Jakob NIELSEN (Copenhague).

1. — On ne connaît pas, jusqu'à présent, un système complet d'invariants pour les classes de représentations des surfaces. Cependant, les recherches faites dans cet ordre d'idées permettent d'introduire une série de notions et d'établir une suite de théorèmes formant la première étape de la solution de ce problème général. Dans cette communication je me borne à traiter les transformations topologiques (c'est-à-dire biunivoques et continues) à indicatrice invariante d'une surface fermée et bilatère de genre  $p > 1$  en elle-même. Pour ce cas restreint on trouve tous les détails et les démonstrations des théorèmes énoncés dans trois mémoires insérés dans les *Acta mathematica* <sup>2</sup>.

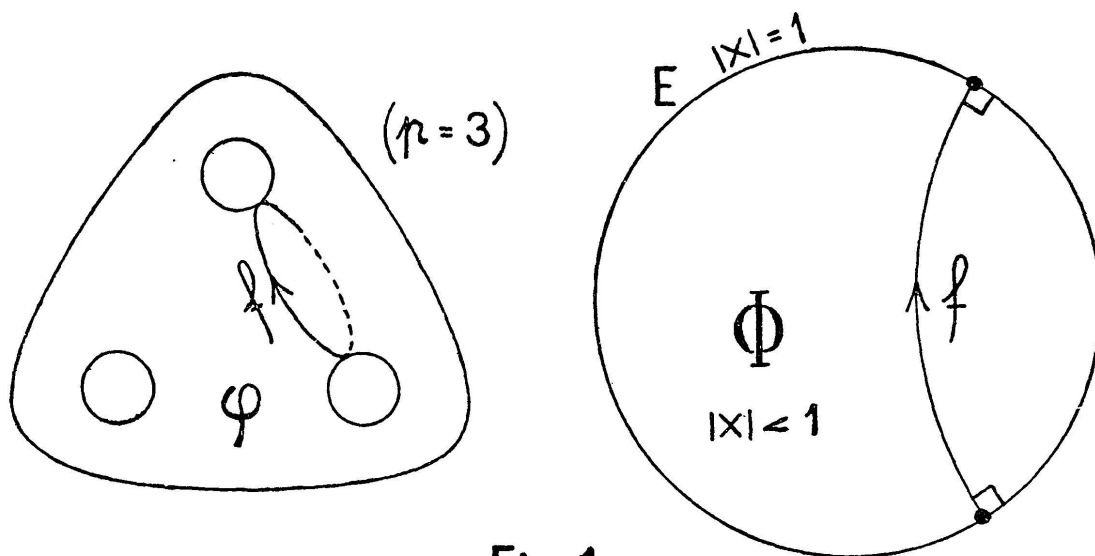


Fig. 1

<sup>1</sup> Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

<sup>2</sup> J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I, II, III. *Acta mathematica*, t. 50, 53, 58.

2. — Soit  $\varphi$  une surface bilatère fermée de genre  $p > 1$ . Soit  $E$  le cercle d'unité dans le plan de la variable complexe  $x$ . On sait qu'on peut représenter la surface de recouvrement universel de  $\varphi$  sur l'intérieur  $\Phi$  de  $E$  de sorte que les opérations du groupe fondamental (groupe de H. POINCARÉ)  $F$  de  $\varphi$  soient représentées par des substitutions homographiques de  $x$  du type hyperbolique. Soit  $f$  une opération de  $F$ ; la substitution homographique  $f(x)$  laisse invariants deux points de  $E$ , qui seront appelés *les points fondamentaux* de  $f$ . Empruntons les notions de la géométrie non-euclidienne:  $f$  est une translation du plan hyperbolique  $\Phi$  le long d'une droite de ce plan. Celle-ci se représente par un arc de cercle orthogonal à  $E$  et joignant les points fondamentaux de  $f$ ; cette droite sera appelée *l'axe* de  $f$ . Transportant à  $\varphi$  la mesure non-euclidienne de  $\Phi$ , les arcs de cercle orthogonaux à  $E$  correspondent aux lignes géodésiques de  $\varphi$ , et, en particulier, les axes de  $F$  aux lignes géodésiques fermées sur  $\varphi$ .

Les points fondamentaux de  $F$  forment un ensemble dénombrable et partout dense sur  $E$ . Au surplus, étant donnés deux intervalles quelconques sur  $E$ , il y a dans  $F$  un axe aboutissant à ces deux intervalles.

3. — Désignons par  $\tau\varphi$  une transformation topologique de la surface  $\varphi$  en elle-même. Une transformation topologique  $t\Phi$  du disque circulaire  $\Phi$  en lui-même correspond à  $\tau\varphi$ , si chaque système complet de points de  $\Phi$ , équivalents par  $F$  et correspondant au point  $a$  de  $\varphi$ , est transformé par  $t$  en un système de points équivalents correspondant au point  $\tau a$  de  $\varphi$ . Donc la fonction  $t(x)$ , qui décrit cette transformation de  $\Phi$ , doit satisfaire à une équation fonctionnelle

$$t(f(x)) = f'(t(x))$$

pour chaque élément  $f$  de  $F$ , la fonction  $f'$  désignant aussi un certain élément de  $F$ . La correspondance  $f \rightarrow f'$  est un automorphisme  $J$  du groupe  $F$ . Si  $f_j$  désigne l'élément de  $F$  correspondant à  $f$  par l'automorphisme  $J$ , l'équation fonctionnelle ci-dessus prend la forme

$$tf = f_j t$$

ou bien

$$tft^{-1} = f_j .$$

On détermine complètement ce système d'équations fonctionnelles pour la fonction  $t$  en substituant pour  $f$  un système de générateurs du groupe  $F$ .

La transformation  $t\Phi$  n'est pas la seule transformation topologique de  $\Phi$  correspondant à la transformation  $\tau\varphi$ . La suite  $f_0 = 1, f_1, f_2, \dots$  étant une énumération des éléments de  $F$ , il est manifeste que les fonctions  $f_1 t\Phi, f_2 t\Phi, \dots$  fournissent aussi  $\tau\varphi$ . Évidemment la fonction  $f_1 t$  satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f_1 tft^{-1} f_1^{-1} = f_1 f_j f_1^{-1} .$$

Donc l'automorphisme de  $F$  correspondant à  $f_1 t$  est  $f \rightarrow f_1 f_j f_1^{-1}$ .

L'ensemble des automorphismes provenant des fonctions  $f_j t\Phi$  s'appelle une *famille d'automorphismes*; deux membres d'une famille diffèrent par un automorphisme cogrédient.

En déformant d'une manière continue la transformation  $\tau\varphi$  on conserve la validité des équations fonctionnelles. La famille d'automorphismes de  $F$  correspond donc à la *classe* de la transformation  $\tau$ .

4. — Voici une conséquence des équations fonctionnelles: La transformation  $t\Phi$  détermine par continuité une transformation topologique  $tE$  de la circonférence  $E$  (conservant le sens de  $E$ ) de sorte qu'on obtienne une transformation topologique  $t(\Phi + E)$  du disque fermé  $\Phi + E$ . Les points fondamentaux de  $f$  correspondent aux points fondamentaux de  $f_j$  et, puisque les points fondamentaux de  $F$  sont partout denses sur  $E$ , cette correspondance suffit pour déterminer  $tE$ . Soit inversement  $J$  un automorphisme  $f \rightarrow f_j$  de  $F$ ; la correspondance entre les points fondamentaux de  $f$  et de  $f_j$  fournie par  $J$  conserve l'ordre cyclique des points fondamentaux sur  $E$ , donc on obtient une transformation topologique  $tE$ , et celle-ci fait partie d'une transformation topologique  $t(\Phi + E)$  correspondant à une transformation  $\tau\varphi$ . Il y a donc une correspondance *biunivoque*

entre les familles d'automorphismes de  $F$  et les classes de transformations de  $\varphi$ .

5. — Déformons la transformation  $\tau\varphi$  d'une manière continue: l'automorphisme  $J$  étant conservé, la correspondance des points fondamentaux sur  $E$  ne change pas, donc la transformation  $tE$  n'est pas changée, bien que la transformation  $t\Phi$  subisse une déformation. Cela reste vrai même si la déformation de  $\tau$  ne conserve pas le caractère topologique de cette transformation. On a donc le résultat suivant: *Le système de transformations topologiques*

$$tE, f_1 tE, f_2 tE, \dots$$

*de la circonférence  $E$  est un invariant de la classe de transformations continues de degré  $+1$  de la surface  $\varphi$ .* En cherchant des invariants de classe on se trouve donc porté à regarder des représentations topologiques à une dimension au lieu des représentations continues à deux dimensions.

6. — Nous allons étudier la transformation  $tE$ . Soit  $M$  l'ensemble des points, qui sont invariants par cette transformation. D'abord les points fondamentaux de tous les éléments  $h$  de  $F$ , qui sont invariants par l'automorphisme  $J$ , font partie de  $M$ . Soit  $H$  le sous-groupe de  $F$  formé par ces éléments invariants. Soit  $S$  la fermeture de l'ensemble des points fondamentaux de  $H$ . Alors  $S$  est un sous-ensemble de  $M$ , qui sera appelé *l'ensemble singulier*. Tout autre point de  $E$  sera appelé *régulier*. Les points réguliers forment un ensemble ouvert sur  $E$  consistant *d'intervalles de régularité*. Pour un point régulier il existe un voisinage, qui ne contient aucune paire de points équivalents par  $H$ . Chaque voisinage d'un point de  $S$ , au contraire, contient deux points, qui se correspondent par un élément de  $H$ . Les cas suivants peuvent alors de présenter:

I.  $H = F$  (cas où  $\tau\varphi$  appartient à la classe de l'identité). Tous les points fondamentaux de  $F$  sont invariants par  $t$ , donc  $S$  est identique à  $E$  et il n'y a pas de points réguliers.

II.  $H = 1$ . Tous les éléments de  $F$  autres que l'identité sont

changés par l'automorphisme  $J$ . Tous les points de  $E$  sont réguliers,  $S$  est vide.

III.  $H$  est un groupe cyclique infini. Tous les éléments de  $H$  appartiennent au même axe, donc ils sont les puissances de la plus courte translation dans  $F$  appartenant à cet axe.  $S$  est composé de deux points, il y a deux intervalles de régularité.

IV. Les éléments de  $H$  appartiennent à plusieurs axes sans que  $H$  soit identique à  $F$ . Dans ce cas le groupe  $H$  est un groupe libre, dont le nombre  $\nu$  de générateurs est inférieur à  $2p$ . Il y a dans  $H$  une infinité d'axes. L'ensemble  $S$  est parfait et partout non dense; c'est-à-dire que les intervalles de régularité forment un ensemble partout dense sur  $E$  et que deux intervalles de régularité n'aboutissent jamais au même point singulier. Traçons la droite (arc de cercle orthogonal à  $E$ ) joignant les extrémités d'un intervalle de régularité et enlevons de  $\Phi$  le demi-plan limité par cette droite et par l'intervalle en question. Faisons de même pour tous ces intervalles. Il nous reste un domaine  $\Delta$ , convexe au sens de la géométrie non-euclidienne et limité sur  $E$  par l'ensemble  $S$ . Ce domaine  $\Delta$  qui sera appelé *domaine central*,

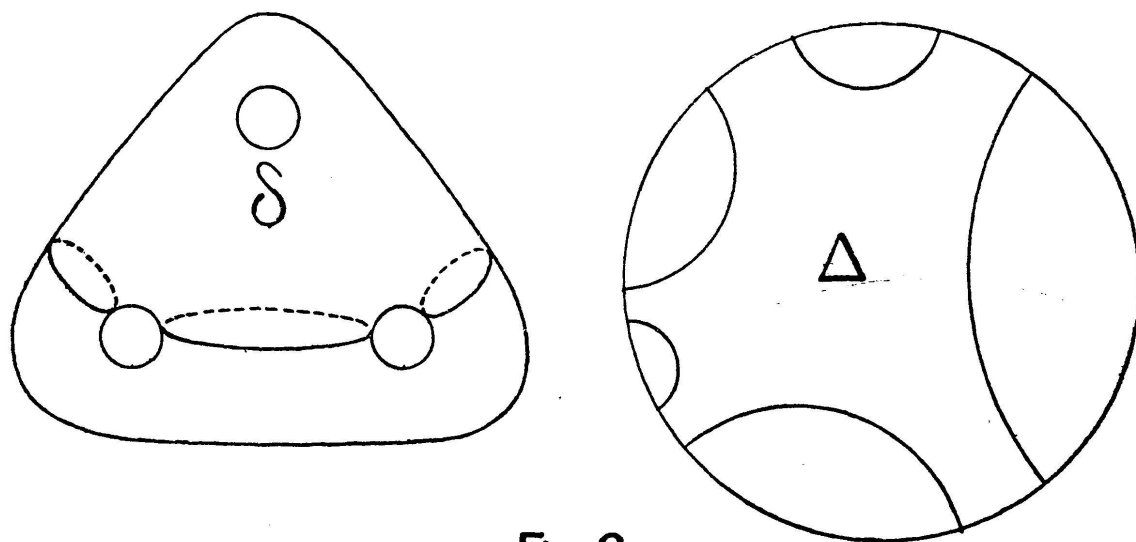


Fig.2

est doué des propriétés suivantes:  $\Delta$  contient tous les axes de  $H$ , et tout axe entièrement contenu dans  $\Delta$  est un axe de  $H$ . Les droites limitant  $\Delta$  sont, elles aussi, des axes de  $H$ , et les lignes géodésiques fermées sur  $\varphi$ , qui leur correspondent, n'ont pas de points doubles et ne se coupent pas deux à deux. Le nombre de

ces géodésiques sur  $\varphi$  est fini (le genre de  $\varphi$  étant fini), donc parmi les côtés de  $\Delta$  (en nombre infini) il n'y a qu'un nombre fini de non-équivalents par  $F$ , et même par  $H$ . Les opérations de  $H$  transforment  $\Delta$  en lui-même, les autres opérations de  $F$  transforment  $\Delta$  en un domaine hors de  $\Delta$ . Au domaine  $\Delta$  de  $\Phi$  correspond sur  $\varphi$  un domaine  $\delta$  limité par un nombre fini de géodésiques fermées simples.  $H$  est le groupe fondamental de  $\delta$ , et  $\Delta$  est la surface de recouvrement universel de  $\delta$ . De là il résulte que  $H$  est libre avec le nombre de générateurs

$$\nu = 2q + r - 1$$

$q$  étant le genre et  $r$  le nombre des contours du domaine  $\delta$ .

Remarquons que, dans le cas III,  $H$  est un groupe libre avec un générateur. Pour unifier le langage nous appellerons (dans le cas II) un groupe, qui ne consiste que de l'identité, « un groupe libre avec le nombre nul de générateurs ».

7. — L'ensemble  $M - S$  consiste de points de  $E$ , réguliers, invariants par  $t$ . On trouve: Les points d'accumulation de  $M - S$  sont des points de  $S$ . Or, si  $M$  n'est pas vide, les points de  $E - M$  forment des intervalles, les points d'un tel intervalle étant transportés par  $t$  dans une direction bien déterminée. On peut donc, par rapport à  $t$ , distinguer les extrémités d'un tel

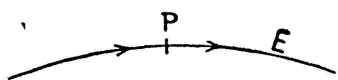


Fig. 3

intervalle comme *point attractif* et *point répulsif*. Nous avons dit qu'un point de  $M - S$  est isolé. Il est donc extrémité de deux intervalles. On trouve qu'il est attractif pour les deux intervalles ou répulsif pour les deux intervalles. Le cas indiqué pour  $P$  par la figure 3 ne peut donc pas se présenter pour un point régulier de  $M$ .

Envisageons maintenant un intervalle de régularité, limité par l'axe d'un certain élément  $h$  de  $H$ , et contenant des points de  $M$ , donc de  $M - S$ . Le groupe  $H$  transformant l'ensemble  $M$  en lui-même et des points attractifs en des points attractifs (en vertu de l'équation fonctionnelle), il suffit de regarder dans cet intervalle un segment, dont les extrémités se correspondent

par l'opération  $h$ , tel que le segment  $(P, hP)$  de la figure 4. Sur ce segment il n'y a qu'un nombre fini de points de  $M$  ( $S_1$  et  $S_2$  étant les seuls points d'accumulation pour les points de  $M$  dans  $S_1 S_2$ ) et puisque les points attractifs doivent alterner avec des points répulsifs, ce nombre est pair. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles de régularité non équivalents, on trouve, en somme, que le nombre de points non équivalents dans  $M - S$  est un nombre fini et pair, soit  $2\mu$ .

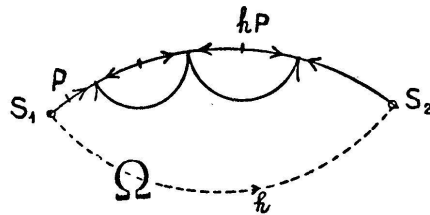


Fig.4

8. — Soit  $M^*$  le sous-ensemble de  $M$ , qu'on obtient en supprimant dans  $M$  tous les points isolés et répulsifs. Faisons jouer à  $M^*$  le rôle attribué plus haut à  $S$  à l'occasion de la définition du domaine  $\Delta$ : En enlevant les demi-plans limités par les intervalles de  $E - M^*$  on obtient un domaine convexe  $\Omega$ , qui sera appelé *domaine principal* (Voir la figure 4.).  $S$  étant un sous-ensemble de  $M^*$ , le domaine central  $\Delta$  est renfermé par le domaine principal  $\Omega$ . Les éléments du groupe  $H$  transforment  $\Omega$  en lui-même. L'axe d'un élément  $f$  de  $F$ , qui ne fait pas partie de  $H$ , est dirigé vers un point d'un intervalle de  $E - M^*$ , et l'opération  $f$  transforme  $\Omega$  en un domaine entièrement contenu dans le demi-plan limité par cet intervalle, donc situé hors de  $\Omega$ . Il en résulte que les côtés de  $\Omega$ , qui ne sont pas en même temps des côtés de  $\Delta$ , correspondent sur  $\varphi$  à des géodésiques ouvertes sans points doubles et ne se coupant pas deux à deux ni avec les contours de  $\delta$ . Donc on obtient sur  $\varphi$  un domaine  $\omega$  (renfermant  $\delta$ ), dont  $\Omega$  est la surface de recouvrement universel et dont  $H$  est le groupe fondamental.

9. — Envisageons le cas II du n° 6.  $S$  étant vide,  $M$  ne contient qu'un nombre fini  $2\mu$  de points. Prenant comme unité d'aire non-euclidienne l'aire d'un triangle, dont tous les angles sont nuls; on a pour la surface  $\varphi$  une aire égale à  $4(p - 1)$ . Le domaine principal  $\Omega$ , étant un polygone de  $\mu$  côtés avec tous les angles nuls, a l'aire  $\mu - 2$ . Or,  $\Omega$  ne contient aucune paire de points équivalents, puisque tout élément de  $F$  ( $H$  étant 1),

transforme  $\Omega$  en un domaine hors de  $\Omega$ . Donc  $\omega$  a l'aire  $\mu - 2$ , et celle-ci ne peut pas dépasser l'aire de  $\varphi$ . On a donc

$$\mu \leq 4p - 2.$$

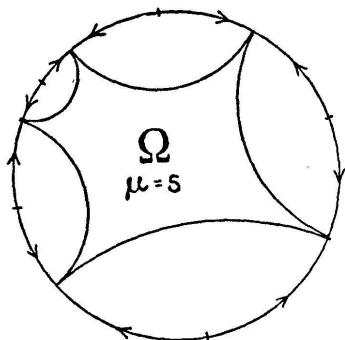


Fig. 5

Dans le cas d'un automorphisme sans élément invariant la transformation  $tE$  ne peut donc pas avoir plus de  $8p - 4$  points invariants.

Dans les cas III et IV du n° 6 on peut appliquer un raisonnement semblable. Exception faite du cas I, où  $H = F$ , on résume le résultat dans le théorème suivant:

Dans le cas d'un automorphisme non-identique, le nombre  $\nu$  des générateurs du groupe libre  $H$ , dont les éléments ne sont pas changés par l'automorphisme, et le nombre  $2\mu$  des points de  $E$ , invariants par  $t$ , réguliers et non équivalents, satisfont à la relation

$$0 \leq 2\nu + \mu \leq 4p - 2.$$

Cette inégalité ne peut pas être améliorée: On connaît des exemples pour chacun des signes d'égalité.

Puisque les nombres entiers  $\nu$  et  $\mu$  sont non-négatifs, on a obtenu ainsi une *classification des transformations  $t$  en un nombre fini de types* caractérisés par les valeurs de  $\nu$  et  $\mu$  selon l'inégalité citée.

10. — Soit  $a$  un point de  $\varphi$  invariant par la transformation  $\tau$  et  $A$  un point de  $\Phi$  correspondant à  $a$ . On doit avoir  $tA = fA$ ,  $f$  étant un certain élément de  $F$ . Alors  $A$  est invariant par la transformation  $f^{-1}t$ , équivalente à  $t$ , c'est-à-dire correspondant à la même transformation  $\tau\varphi$ . On introduit la notion de *classe de points invariants* de  $\tau\varphi$  en réunissant dans une classe tous ceux qui correspondent aux points invariants par une des transformations

$$t\Phi, f_1 t\Phi, f_2 t\Phi, \dots$$

Trois remarques alors se présentent:

1° Le groupe H transforme l'ensemble des points invariants de  $t\Phi$  en lui-même. La classe de points invariants réalisée par  $t\Phi$  se trouve donc représentée uniquement dans un domaine fondamental du groupe H dans  $\Phi$ .

2° Les points invariants de la transformation  $ftf^{-1}\Phi$  sont les transformés par  $f$  des points invariants de  $t\Phi$ . Ils représentent donc la même classe de points invariants de  $\tau\varphi$ . D'autre part, d'après l'équation fonctionnelle, on a

$$ftf^{-1} = ff^{-1}t.$$

Cette fonction, qui est un cas spécial d'une fonction équivalente à  $t$ , sera dite *congrue* à  $t$ . Dans la suite de toutes les fonctions équivalentes à  $t$  on n'a donc qu'à prendre une sous-suite, dont les membres ne sont pas congrus entre eux. Cette sous-suite est encore infinie, mais on trouve:

3° Il n'y a qu'un nombre fini de transformations équivalentes à  $t$  et non-congrues entre elles, qui possèdent des points invariants dans  $\Phi$ . Donc la transformation  $\tau\varphi$  n'a qu'un *nombre fini* de classes de points invariants.

11. — Soit  $x$  un point de  $\Phi + E$  non-invariant par  $t$ . La demi-droite non-euclidienne issue de  $x$  et dirigée vers  $tx$  rencontre E

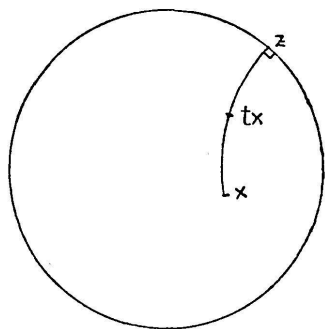


Fig. 6

dans un point  $z$ . (Pour  $|x| = 1$  le point  $z$  coïncide avec  $tx$ ). Faisons parcourir à  $x$  dans  $\Phi + E$  un chemin fermé évitant les points invariants par  $t$  et formant le contour d'un domaine fondamental de H. Le point  $z$  va faire sur la circonférence E un certain nombre  $j$  de tours complets, revenant finalement à sa position initiale. Pour ce nombre  $j$ , qui sera appelé *indice de la classe de points invariants* de  $\tau\varphi$  représentée par  $t\Phi$ , on calcule la valeur

$$j = 1 - \nu - \mu.$$

Dans le cas I du n° 6, pour lequel on n'a pas défini les nombres  $\nu$  et  $\mu$ , le calcul pour un domaine fondamental de F donne pour  $j$

la valeur  $2 - 2p$  conformément à la formule de M. BIRKHOFF<sup>1</sup>. Des bornes trouvées dans le n° 9 pour les nombres  $\nu$  et  $\mu$  on dérive pour  $j$  l'inégalité

$$-(4p - 3) \leq j \leq 1.$$

Dans le cas  $j \neq 0$  la transformation  $t\Phi$  a nécessairement des points invariants; la classe correspondante de  $\tau\varphi$  n'est pas vide. Nous dirons qu'une classe, dont l'indice  $j$  est différent de zéro, est une *classe essentielle*. Au contraire, si dans un cas  $j = 0$  la transformation  $t\Phi$  a des points invariants, nous appellerons la classe correspondante de  $\tau\varphi$  une *classe non-essentielle*. Dans le cas  $j = 0$  on a ou bien  $\nu = 1, \mu = 0$  ou bien  $\nu = 0, \mu = 1$ , donc toujours deux points invariants sur E.

Les nombres  $\nu$  et  $\mu$  étant dérivés de la transformation  $tE$ , qui est un invariant de la classe de transformations à laquelle appartient  $\tau\varphi$ , il est de même pour l'indice de la classe correspondante de points invariants. On pourra dire qu'on a résolu le problème des points invariants pour les classes de transformations de  $\Phi$  telles que  $t\Phi$ .

12. — Quant au problème analogue pour les classes de transformations de la surface fermée, on sait que les indices des classes essentielles de points invariants, soit

$$j_1, j_2, \dots, j_z$$

forment un système d'invariants pour la classe de  $\tau$ . Le problème, qui n'a pas été résolu complètement jusqu'à présent, est de déterminer ce système fini de nombres entiers non-nuls, étant donné un automorphisme de F déterminant la classe de  $\tau$ . On connaît cependant un invariant dû à M. ALEXANDER et dépendant du système des  $j$ , à savoir la somme

$$\Xi = j_1 + j_2 + \dots + j_z.$$

Pour calculer  $\Xi$ , on n'a qu'à choisir un système  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$

<sup>1</sup> G. D. BIRKHOFF, Dynamical systems with two degrees of freedom. *Transact. Amer. Math. Soc.*, vol. 18, p. 286 et sq.

de générateurs de  $F$ , formant en même temps une base pour le groupe d'homologie. Soient

$$a_{xJ} \sim \sum_{\lambda=1}^{2p} \gamma_{x\lambda} a_{\lambda} \quad x = 1, 2, \dots, 2p$$

les formules décrivant la transformation du groupe d'homologie, correspondant à l'automorphisme  $J$  donné; soit  $\Gamma$  la matrice formée par les  $\gamma_{x\lambda}$  et

$$s(\Gamma) = \sum_{\lambda=1}^{2p} \gamma_{\lambda\lambda} .$$

Alors on a d'après le théorème de M. ALEXANDER <sup>1</sup>

$$\Xi = 2 - s(\Gamma) .$$

Comment peut-on profiter, pour le problème général, de la connaissance de  $\Xi$  ?

D'abord, puisque  $j \leq 1$ , on a pour le nombre  $Z$  des classes essentielles l'inégalité

$$Z \geq \Xi$$

laquelle fournit, dans le cas  $\Xi > 0$ , une borne inférieure pour le nombre des classes essentielles, donc aussi une borne inférieure pour le *nombre minimum des points invariants* dans la classe envisagée de transformations. Pour obtenir une telle borne inférieure dans le cas  $\Xi < 0$ , on recourt aux domaines principaux  $\omega_1, \omega_2, \dots$  sur  $\varphi$ , qui correspondent à celles parmi les fonctions équivalentes à  $t$  qui fournissent un indice  $j < 0$ . Une analyse détaillée montre que ces domaines  $\omega_1, \omega_2, \dots$  ne se couvrent pas mutuellement sur  $\varphi$ , donc la somme de leurs aires ne peut pas surpasser l'aire de  $\varphi$ . Le calcul donne la formule

$$Z \geq -\Xi - 4(p - 1)$$

de sorte qu'on ait obtenu une borne inférieure dans le cas  $\Xi < -4(p - 1)$ . Dans le cas  $\Xi = 0$  on ne trouve rien par ces

<sup>1</sup> J. W. ALEXANDER, Invariant points of a surface transformation of given class. *Transact. Amer. Math. Soc.*, vol. 25.

moyens, et dans le cas  $-4(p-1) \leq \Xi \leq -1$  on ne conclut que  $Z \geq 1$ .

13. — Parmi les divers types de fonctions  $t$  donnant un indice  $j < 0$ , celui caractérisé par  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$  a un intérêt spécial. L'ensemble  $M^*$  se réduisant à deux points, le « domaine » principal se réduit à un arc de cercle orthogonal à  $E$ , donc  $\omega$  est une

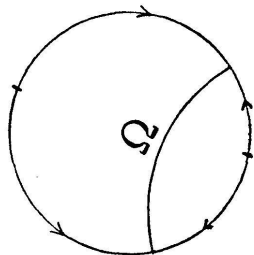


Fig. 7

géodésique ouverte sur  $\varphi$ . C'est le seul cas où le domaine principal occupe une aire de *mesure nulle* sur  $\varphi$ ; pour tous les autres types donnant  $j < 0$  l'aire de  $\omega$  est un entier positif. L'aire de  $\varphi$  étant connue, cela donne pour  $\Xi$  négatif et de grande valeur absolue le résultat suivant : Pour  $\Xi < -8(p-1)$  au moins  $|\Xi| - 8(p-1)$  des classes d'indice négatif sont issues d'un type  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$ , donc  $j = -1$ . Il peut se présenter que les domaines  $\omega$  d'aire positive ont la somme de leurs aires égale à l'aire de  $\varphi$ . Les géodésiques ouvertes représentant le  $\omega$  des types  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$  sont donc placées dans un certain ensemble de mesure nulle.

14. — Nous pouvons encore nous servir d'une méthode très efficace pour la topologie des transformations de surfaces, celle de l'itération de la transformation donnée  $\tau\varphi$ . Or,  $t\Phi$  correspondant à  $\tau\varphi$ , les transformations  $t^2\Phi$ ,  $t^3\Phi$ , ... correspondent à  $\tau^2\varphi$ ,  $\tau^3\varphi$ , .... Soit d'abord  $t\Phi$  d'un type  $\nu + \mu > 0$ , donc  $j \leq 0$ . Dans ce cas il y a sur  $E$  des points, qui sont invariants par  $t$ ; alors précisément les mêmes points sont invariants par  $t^2$ ,  $t^3$ , .... En d'autres termes, si  $M(t)$  n'est pas vide,  $M(t^2)$ ,  $M(t^3)$ , ... sont identiques à  $M(t)$  et, par conséquent, les nombres  $j(t^2)$ ,  $j(t^3)$ , ... sont égaux à  $j(t)$ . Donc *les classes de points invariants d'indice non-positif ont un caractère stable* relatif à l'itération de la transformation  $\tau\varphi$ . Au contraire, *les classes d'indice positif ont un caractère instable*. Pour une telle classe la transformation  $tE$  est sans point invariant. On montre, par une application répétée de l'équation fonctionnelle, que les transformations  $t^2E$ ,  $t^3E$ , ... finissent par avoir des points invariants. Il y a donc un certain exposant minimum caractéristique  $n$  tel que  $t^n$  a des points



Grâce à l'équation fonctionnelle on voit que cette totalité forme un groupe  $T$ , ayant le groupe  $F$  comme sous-groupe invariant. Cela est vrai, qu'on regarde  $T$  comme un groupe de transformations soit de  $\Phi + E$ , soit de  $E$  seul. Dans le dernier cas *le groupe  $T$  est un invariant de la classe de transformations de  $\varphi$* ; on a donc la chance de dériver de la structure de ce groupe  $T$  des nombres qui ont une signification invariante pour la classe de  $\tau$ . La distinction mentionnée importe pour la détermination du groupe complémentaire  $T/F$  de  $F$  par rapport à  $T$ . Dans le cas considéré par nous où l'on prend  $T$  comme un groupe de transformations de  $E$  seul, le groupe  $T/F$  est d'ordre infini, si la transformation identique de  $E$  n'est représentée dans le tableau ci-dessus que par l'élément désigné par 1. Si au contraire on retrouve la transformation identique de  $E$  la première fois parmi une des fonctions  $t^n, f_1 t^n, f_2 t^n, \dots$ , le groupe  $T/F$  est cyclique d'ordre  $n$ . Dans ce cas nous dirons que la classe de  $\tau$  est une *classe d'ordre  $n$  de transformations*; cela veut dire que  $\tau^n$  appartient à la classe de l'identité.

16. — Regardons de près une classe d'ordre fini, soit  $n$ . La transformation  $t^n$  est (sur  $E$ ) un élément de  $F$ . Deux cas sont à distinguer:

1° Si  $t^n = f \neq 1$ , l'élément  $f$  est un élément invariant par l'automorphisme  $J$  correspondant à  $t$ . Donc  $M(t)$  n'est pas vide, et on a  $M(t) = M(t^n)$ . Mais  $t^n$ , étant sur  $E$  la substitution hyperbolique  $f$ , n'a sur  $E$  comme points invariants que les points fondamentaux de  $f$ . Il en est donc de même pour  $t$ , et l'on a  $\nu = 1, \mu = 0$ , donc  $j = 0$ .

2° Si  $t^n = 1$ , on doit avoir  $M(t)$  vide, donc  $\nu = \mu = 0$  et  $j = 1$ .

On voit que, pour les classes d'ordre fini de transformations, il n'y a pas d'autres classes essentielles de points invariants que les classes de l'indice positif  $j = 1$ . On a donc  $\Xi = Z$  et cela nous donne une idée de la portée des moyens algébriques dans ce cas.

Une classe de points invariants d'indice positif de  $\tau$  reste une classe d'indice positif pour  $\tau^2, \tau^3, \dots, \tau^{n-1}$ , puisque  $t^2 E, t^3 E, \dots, t^{n-1} E$  restent sans points invariants. Outre ces classes, pour

un diviseur  $m$  de  $n$  on peut avoir une classe d'indice positif pour les transformations  $\tau^m, \tau^{2m}, \dots, \tau^{\left(\frac{n}{m}-1\right)m}$ . Mais les points invariants de  $\tau^m\varphi$ , formant une telle classe, sont transformés par  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{m-1}$  en d'autres classes de  $\tau^m$ , de sorte que les classes de  $\tau^m$  qui ne sont pas issues des puissances inférieures, se répartissent sur des systèmes de  $m$  classes conjuguées, dont les points forment des ensembles homéomorphes échangés par  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{m-1}$ . Soit  $A_m$  le nombre des systèmes de telles classes, conjuguées  $m$  à  $m$ , de  $\tau^m$  pour tout diviseur  $m$  de  $n$ , y compris le cas  $m = 1$ .

17. — Calculons la somme des valeurs de  $\Xi$  pour  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$  en appliquant la formule de M. ALEXANDER.  $s(\Gamma)$  est la somme des racines du *polynôme caractéristique*

$$|\Gamma - \lambda E_{2p}| = \lambda^{2p} + \dots + |\Gamma| = \gamma(\lambda),$$

$E_{2p}$  désignant la matrice unité. Soit  $\varepsilon$  la multiplicité de la racine  $+1$ .  $\varepsilon$  est un nombre pair. La matrice  $\Gamma$  correspondant à  $\tau$ , la matrice  $\Gamma^r$  correspond à  $\tau^r$ , et on a  $\Gamma^n = E_{2p}$ . On trouve donc  $s(\Gamma^r)$  égale à la somme des puissances d'ordre  $r$  des racines de  $\gamma(\lambda)$ . Des calculs bien connus donnent alors

$$\begin{aligned} \Xi(\tau) + \Xi(\tau^2) + \dots + \Xi(\tau^{n-1}) &= \sum_{m|n} A_m m \left( \frac{n}{m} - 1 \right) = \\ &= 2p - 2 - n(\varepsilon - 2). \end{aligned}$$

Si aucune des transformations  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$  n'a des classes essentielles de points invariants, tous les  $\Xi$  ou tous les  $A_m$  s'annulent; dans ce cas  $p - 1$  est divisible par  $\frac{\varepsilon}{2} - 1$ , le quotient étant  $n$ .

On se procure un exemple d'une classe d'ordre fini  $n$  de transformations en partant d'une transformation  $\tau\varphi$  d'ordre fini  $n$ , c'est-à-dire telle que  $\tau^n\varphi$  soit la transformation identique de la surface  $\varphi$ . Ce cas des transformations périodiques a été étudié par M. BROUWER<sup>1</sup>, qui a montré par sa notion de surface modulaire qu'on peut réaliser une telle transformation d'ordre fini  $n$  par

<sup>1</sup> L. E. J. BROUWER, Ueber topologische Involutionen. *Amsterdam Proceedings*, vol. XXI.

la permutation cyclique des  $n$  feuillets d'une surface de Riemann régulière de genre  $p$  étendue sur une autre surface homéomorphe à la surface modulaire. Dans ce cas la formule ci-dessus est la formule de HURWITZ<sup>1</sup>, les nombres  $\frac{n}{m} - 1$  désignant l'ordre de ramification des divers points invariants par les puissances de  $\tau$  et  $\varepsilon$  étant le double du genre de la surface modulaire.

Cela étant, la question s'impose, si une classe d'ordre  $n$  de transformations contient toujours une transformation d'ordre  $n$ . Si la réponse est affirmative — ce que je n'ai pu démontrer que dans plusieurs cas spéciaux — cela expliquerait la grande portée des méthodes algébriques pour le cas des classes d'ordre fini de transformations. Quelle que soit la réponse à cette question, on a obtenu une généralisation topologique de la formule de Hurwitz par des méthodes de la Théorie des groupes et on en peut déduire des conclusions pour les classes d'ordre fini comme celle-ci:

Dans le cas où  $n$  est un nombre premier, on trouve les bornes supérieures  $n \leq 2p + 1$  et  $Z \leq 2 + \frac{2p}{n-1}$  et la congruence  $Z \equiv 2 - 2p \pmod{n}$ ; pour  $n = 2$  on a même  $Z \equiv 2 - 2p \pmod{4}$ .

18. — Dans la recherche d'une transformation périodique dans une classe donnée d'ordre  $n$ , la théorie abstraite des groupes discontinus intervient d'une manière remarquable. Partons du fait qu'on connaît une représentation abstraite du groupe  $T$  en prenant comme générateurs de  $T$  un système  $a_1, a_2, \dots$  de générateurs de  $F$  et l'opération  $t$ , et en écrivant un système complet de relations de  $T$  composé

- 1° Des relations entre  $a_1, a_2, \dots$  définissant  $F$ ,
- 2° De la relation  $t^n = f$  (élément de  $F$ ),
- 3° Des relations  $ta_\alpha t^{-1} = a_{\alpha J}$ , qui expriment l'automorphisme  $J$  correspondant à  $t$ .

Dans des cas convenables on peut modifier cette forme abstraite du groupe  $T$  de sorte qu'on puisse construire d'après un

<sup>1</sup> A. HURWITZ, Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Math. Ann.*, t. 41, p. 404.

procédé de M. DEHN un graphe régulier dans le plan hyperbolique représentant  $T$  (« Gruppenbild » au sens de M. DEHN<sup>1</sup>). Le groupe de transformations de ce graphe en lui-même est alors un groupe  $T$  de substitutions homographiques de  $x$  dans  $\Phi + E$  ayant  $F$  comme sous-groupe invariant, ce qui donne immédiatement la surface de Riemann correspondant à la classe donnée d'ordre  $n$ .

19. — Reprenons le cas d'une classe  $\tau\varphi$  d'ordre infini. Soit  $t$  une transformation de  $\Phi$  ayant l'indice  $j = 1$ , et  $n$  l'exposant caractéristique. Supposons que le groupe  $H (t^n)$  ait un nombre  $\nu \geq 1$  de générateurs libres. A  $t$  correspond non seulement un automorphisme  $J$  de  $F$ , mais aussi un automorphisme  $J_H$  de  $H$ . On peut donc former un groupe  $T_H$  en ajoutant le générateur  $t$  à  $H$ ; alors le groupe complémentaire  $T_H/H$  sera d'ordre fini  $n$ . Les résultats trouvés dans le cas où  $T/H$  est d'ordre fini, ont donc leur analogue. De cette manière on pourra se servir des méthodes algébriques aussi dans le cas général.

Pour donner à ces considérations un aspect géométrique, on peut imaginer une transformation  $\tau\delta$  du domaine central  $\delta$  correspondant à  $t^n$ , telle que  $\tau\delta$  fasse partie d'une transformation  $\tau\varphi$  de la classe en question et que  $\tau^n\delta$  appartienne à la classe identique de  $\delta$  ou soit même la transformation identique de  $\delta$ . La transformation effectuée sur l'ensemble  $S$  limitant  $\Delta$  sur  $E$  par  $tE, t^2E, \dots, t^nE$  est compatible avec une telle transformation de  $\Delta$ . Un contour de  $\delta$  transformé par  $\tau\delta$  en un autre contour joue le rôle d'un point non-invariant. Au contraire, un contour de  $\delta$  transformé en soi-même, c'est-à-dire un côté de  $\Delta$  transformé par  $t\Delta$  en un côté équivalent, joue le rôle d'un point invariant. On a donc une situation analogue à une classe d'ordre fini de transformations d'une surface fermée. Ainsi on peut appliquer les résultats concernant les valeurs possibles de  $n$  et les nombres de classes de points invariants.

La classe d'indice  $j = 1$  représentée par  $t$  est associée au domaine central  $\delta$  de  $t^n$ . On obtient par les relations algébriques exposées plus haut *une borne supérieure pour le nombre de classes*

<sup>1</sup> M. DEHN, Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, vol. 69.

d'indice 1 associées au même domaine  $\delta$  (ou au même domaine principal  $\omega$ , ce qui revient au même; dans le cas  $H(t^n) = 1$  il n'y a qu'une seule classe associée à  $\omega$ ). Cette borne ne dépend que du genre  $g$  de  $\delta$  et du nombre  $r$  de ses contours. Pour tous les domaines  $\omega$  ayant une aire positive, on obtient ainsi une borne supérieure pour le nombre total de classes d'indice 1 associées à tous ces domaines  $\omega$ . D'autre part, on construit sans difficulté des transformations  $\tau\varphi$  ayant pour  $\Xi$  une valeur positive aussi grande qu'on veut. Donc, dans un tel cas, presque toutes les classes d'indice 1 doivent être associées à des domaines  $\omega$  d'aire nulle (dont le nombre n'est pas borné) c'est-à-dire répondant au cas  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$ , donc  $n = 2$ . (Voir la figure 7). Toutes ces classes ont donc le *maximum d'instabilité*, puisqu'elles s'évanouissent déjà pour le carré de  $\tau\varphi$ .

20. — Pour terminer, je voudrais attirer l'attention sur le problème général de la topologie des transformations des surfaces énoncé dans le n° 1: Trouver un système *complet* d'invariants pour les classes de transformations topologiques. La lettre  $\tau$  désignant à présent les *classes* de transformations, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait une équivalence topologique

$$\tau_1 = \tau_3 \tau_2 \tau_3^{-1}$$

serait que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  soient d'accord quant à ce système d'invariants. Dans bien des cas de classes d'ordre fini de transformations on trouve que le polynôme  $\gamma(\lambda)$  du n° 17 forme, lui seul, un tel invariant. Par exemple, toutes les classes d'ordre 2 d'une surface fermée de genre  $p$  correspondant au polynôme  $\gamma(\lambda) = (\lambda + 1)^{2p}$  sont équivalentes.

On peut caractériser un autre cas, dans lequel le problème se trouve résolu, de la manière suivante: Soit  $\tau$  une classe d'ordre infini telle que pour toute transformation  $t(\Phi + E)$  correspondant à  $\tau$  le domaine principal  $\Omega$  soit identique au domaine central  $\Delta$  de sorte qu'on ait  $\mu = 0$  quand on a  $\nu > 0$ ; et que les domaines  $\delta$  sur  $\varphi$  remplissent la surface entière. Soit  $g$  une géodésique fermée limitant sur  $\varphi$  le domaine  $\delta_1$  d'un côté et le domaine  $\delta_2$  de l'autre. Soit  $t$  une transformation de  $\Phi + E$

ayant le domaine central  $\Delta_1$  correspondant à  $\delta_1$  et  $G$  un côté de  $\Delta_1$  correspondant à  $g$ . Soit  $h$  la plus courte translation dans  $F$  ayant  $G$  comme axe. Il y a alors un entier  $m$ , et un seul, tel que  $h^m t$  ait un domaine central  $\Delta_2$  correspondant à  $\delta_2$  et ayant  $G$  comme un de ses côtés. Au système fini  $g_1, g_2, \dots, g_\rho$  des géodésiques sur  $\varphi$  formant les contours de tous les  $\delta$  se trouve donc associé un système  $m_1, m_2, \dots, m_\rho$  de nombres entiers. Soit maintenant  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux surfaces fermées du même genre  $p$  (qui peuvent se confondre) et  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux classes de transformations du type caractérisé tout à l'heure. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une représentation  $\tau$  de  $\varphi_1$  sur  $\varphi_2$ , telle que  $\tau_2 = \tau \tau_1 \tau^{-1}$ , est que la configuration des  $g$  sur  $\varphi_2$  soit homéomorphe à la configuration des  $g$  sur  $\varphi_1$  et que le nombre  $m$  soit le même pour chaque paire de deux géodésiques correspondantes.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

Emile MEYERSON. — **Essais.** Préface de Louis de Broglie. Avertissement de Lucien Lévy-Bruhl. — Un volume in-8° de xvi-273 pages. Prix: 32 francs. Joseph Vrin, Paris, 1936.

Ces *Essais* s'offrent comme un assemblage posthume de publications qui restèrent séparées du vivant de M. Emile Meyerson. Combien il est heureux et remarquable de les avoir maintenant réunies en un seul livre. La Préface de M. Louis de Broglie reproduit celle déjà écrite pour le fascicule 68 des *Actualités*, fascicule intitulé *Réel et Déterminisme dans la Physique quantique* (voir *L'Ens. math.*, **32**, 1933, p. 106). Rappelons, à ce propos, la belle assertion de M. Paul Valéry: L'esprit humain est absurde parce qu'il cherche; il est grand par ce qu'il trouve. Et M. Louis de Broglie fait bien ressortir, en effet, que, si nos tentatives d'explication pouvaient complètement réussir, c'est que l'Univers s'accommoderait d'un anthropomorphisme justement impropre à soutenir les prétentions de plus en plus élevées et sans cesse renaissantes de la Pensée humaine. Ne nous plaignons donc pas de constater que la Nature n'a pas notre rationalisme.

Voici les titres des publications assemblées:

1. Le sens commun vise-t-il la connaissance ?
2. Le sens commun et la quantité.
3. Hegel, Hamilton, Hamelin et le concept de cause.