Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES

Autor: SCHAUDER, J.

Kapitel: II.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27308

le voisinage U de chaque point P situé à l'intérieur [1] de H la fonction u possède des dérivées du second ordre « Hölderiennes » En outre l'inégalité

$$\| u \|_{\alpha,2}^{\mathrm{U}} \leq \mathrm{C}\left(\| \varphi \|_{\alpha,2}^{\mathrm{V}} + \operatorname*{Max}_{\mathrm{G}} | u |\right) \tag{8}$$

subsiste [2].

Cette généralisation du théorème concernant l'équation de Laplace qui consiste à supposer la régularité des valeurs aux limites sur une *portion* seulement de la frontière et non pas sur la frontière entière, est une des bases de notre procédé.

II.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer et les évaluations correspondantes s'étendent facilement aux équations homogènes ou non homogènes du type elliptique dont les coefficients $\overset{0}{a}_{ik}$ sont *constants ;*

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^0 u &= \sum_{i,k=1}^{n} \overset{0}{a}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \ , \quad (\overset{0}{a}_{ik} = \overset{0}{a}_{ki}) \\ \mathrm{L}^0 u &= \sum_{i,k=1}^{n} \overset{0}{a}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = f \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Il suffit de remarquer que $\mathrm{L}^0 u$ se transforme en Δu par une substitution linéaire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En supposant le déterminant des $\overset{0}{a}_{ik} = 1$ et

$$| \overset{0}{a}_{ik} | \leq m \ , \tag{10}$$

(ce qui ne diminue pas la généralité) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\| u \|_{\alpha,2}^{\mathrm{K}} \leq \mathrm{C}(m) \, \| f \|_{\alpha}^{\mathrm{K}} \quad \text{pour l'équation } \mathrm{L}^0 u = f \ , \\ &\| u \|_{\alpha,2}^{\mathrm{U}} \leq \mathrm{C}(m) \left(\| \varphi \|_{\alpha,2}^{\mathrm{V}} + \operatorname*{Max}_{\mathrm{G}} | u |\right) \quad \text{pour } \mathrm{L}^0 u = 0 \ . \end{aligned} \tag{11}$$

---

[1] U est le produit d'une sphère à n dimensions et de l'ensemble G + S.

[2] $\| \varphi \|_{\alpha,2}^{\mathrm{H}}$ est aussi calculée par rapport aux paramètres locaux sur H.

Cette évaluation diffère de la précédente seulement par le fait que, maintenant, la constante C dépend de m. On peut d'ailleurs trouver aisément la forme exacte de la fonction $C(m)$.

III.

Passons maintenant à l'équation générale

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = f\,. \tag{12}$$

Nous supposons $|a_{ik}| \leq m$, les constantes de Hölder des a_{ik} $\leq M$, le déterminant des $a_{ik} = 1$ et nous considérons d'abord la solution de (12) à l'*intérieur*[1] du domaine borné G, le second membre f étant Hölderien ($\|f\|_{\alpha}^{G} < \infty$). Nous supposons en plus qu'une limitation de u est connue dans tout le domaine G et que u ainsi que ses dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur de G (mais pas nécessairement sur la frontière S). Cherchons une limitation de $D_1 u$, $D_2 u$ et des constantes de Hölder pour $D_2 u$ à l'intérieur de G. Soulignons, que nous *ne sommes pas* en train de construire une solution; la solution u de (12) est donnée, ses dérivées sont régulières et notre but est d'établir quelques inégalités. Notre procédé est le suivant: Soit P un point intérieur à G, $d(P)$ sa distance de la frontière du domaine G et λ un nombre (arbitraire) de l'intervalle $<01>$: $0 \leq \lambda \leq 1$. Construisons un cube $W(P, \lambda)$ à n dimensions, de centre P et de côtés parallèles aux axes; la longueur des côtés est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}} \lambda d(P)$. Nous nous proposons de trouver la borne supérieure de la fonction

$$\left[d(P)\right]^{\alpha+2} \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P, \lambda)} \overset{df}{=} h(P, \lambda)$$

pour λ constant. Désignons cette borne, qui d'ailleurs est finie, par $N(\lambda)$. Soit P_0 un point intérieur à G tel que

$$\left[d(P_0)\right]^{2+\alpha} \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \geq \frac{N(\lambda)}{2}\,. \tag{13}$$

[1] A la fin de ce paragraphe nous donnerons une évaluation analogue sur la frontière et dans son voisinage.