

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES  
**Autor:** SCHAUDER, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27308>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES <sup>1</sup>

PAR

J. SCHAUDER (Lwów).

---

Nous nous occuperons ici des problèmes aux limites posés pour des équations aux dérivées partielles linéaires du type elliptique. Deux méthodes permettent actuellement de les résoudre; les progrès les plus essentiels de la première ont été obtenus par deux savants français, MM. GEVREY et GIRAUD, la seconde a été établie par moi.

La première de ces méthodes opère comme suit: on construit la solution élémentaire de l'équation donnée et on généralise les notions de potentiels de volume, de simple et de double couche. La théorie des équations intégrales linéaires de Fredholm ainsi que ses nombreux perfectionnements y jouent un rôle fondamental; on l'emploie même pour la construction de la solution élémentaire. E. E. LEVI a été le premier à appliquer ces idées aux équations générales elliptiques d'ordre  $2p$  et durant ces dernières années MM. Gevrey et Giraud les ont développées d'une manière très nouvelle et très originale en les appliquant aux équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique. En particulier, la méthode en question est employée avec des perfectionnements considérables dans les travaux récents de M. Giraud (voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1932; *Bull. de la Soc. Math.*, juillet 1933, etc.).

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 19 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève, série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

En 1932 j'ai employé pour la première fois le second procédé qui me semble assez simple et bref (voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1932, janvier 1933; *Math. Zeitschrift*, Bd. 38, janvier 1934; *Studia Math.*, Bd. 5, 1934). Je pars de quelques théorèmes bien connus de la théorie du potentiel (théorèmes relatifs aux équations de Laplace et de Poisson) et je les étends *directement* et assez vite à l'équation générale linéaire du type elliptique. J'obtiens ainsi les limitations précises, essentielles pour les recherches ultérieures. On ne se sert plus ici des solutions élémentaires, des fonctions de Green ni des potentiels généralisés. C'est ce dernier procédé que je vais exposer dans cette conférence.

Considérons une équation générale du second ordre et du type elliptique

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f. \quad (1)$$

On impose maintenant très peu de restrictions aux coefficients  $a_{ik}$ ; il suffit, par exemple, qu'ils satisfassent à une condition de Hölder. Les méthodes antérieures, celles de LICHTENSTEIN, de STERNBERG exigeaient que les  $a_{ik}$  soient deux fois dérivables. Mais la diminution du nombre d'hypothèses imposées aux coefficients est loin d'être seulement un effort de nature sportive! Si vous vous êtes occupés une seule fois, Messieurs, d'équations aux dérivées partielles non linéaires, vous savez bien que cette théorie exige de la théorie des équations linéaires les résultats les plus précis et les plus subtils.

## I.

Le point de départ de la méthode directe dont nous voulons maintenant donner une esquisse, consiste en quelques limitations des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad (2)$$

et de l'équation de Poisson

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

M. A. KORN s'occupa le premier, en 1907, de telles évaluations; elles furent ensuite traitées par beaucoup d'auteurs.

Introduisons ici quelques notations. Nous appelons norme de la fonction  $f$  dans le domaine  $G$  l'expression

$$\|f\|_{\alpha}^G = \text{Max}_G |f| + \text{la plus petite constante de Hölder.} \quad (4)$$

c'est-à-dire la plus petite constante  $C$  satisfaisant à l'inégalité

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq Cr_{12}^{\alpha}, \quad 1 > \alpha > 0, \quad (5)$$

$P_1, P_2$  étant des points du domaine  $G$  et  $r_{12}$  leur distance. Pareillement,  $f$  étant une fonction dérivable  $m$  fois dans  $G$  et dont les dérivées d'ordre  $m$  satisfont à la condition de Hölder, nous appelons  $\|f\|_{\alpha, m}^G$ , l'expression

$$\|f\|_{\alpha, m}^G = \text{Max}_G |f| + \Sigma \|D_1 f\|_{\alpha}^G + \dots + \Sigma \|D_m f\|_{\alpha}^G \quad (6)$$

chaque sommation étant ici étendue à toutes les dérivées d'ordre considéré.

Envisageons maintenant l'équation (3), où  $f$  remplit la condition de Hölder, dans une sphère  $K_R$  de rayon  $R$ . On sait (d'après M. A. Korn) que la solution de (3), s'annulant sur la frontière de  $K_R$ , admet dans  $K_R$  fermée les dérivées secondes continues et satisfaisant à la condition de Hölder avec le même exposant  $\alpha$ ; en outre nous avons l'inégalité

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{K_R} \leq C \|f\|_{\alpha}^{K_R} \quad (7)$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $R$ .

D'autre part envisageons l'équation homogène (2) dans un domaine  $G$  borné dont une partie de la frontière entière  $S$  est un hyperplan  $H$ . Supposons  $u$  bornée dans  $G$ . Quant aux valeurs aux limites que nous désignerons par  $\varphi(s)$  ( $s$  étant un point de  $H$  ou de  $S$ ), elles doivent admettre sur  $H$  des dérivées secondes<sup>1</sup>, satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant  $\alpha$ . Alors dans

<sup>1</sup> Bien entendu, les dérivées de  $\varphi$  sont calculées par rapport aux variables paramétriques qui caractérisent la portion donnée de la surface  $H$ .

le voisinage  $U$  de chaque point  $P$  situé à l'intérieur <sup>1</sup> de  $H$  la fonction  $u$  possède des dérivées du second ordre « Hölderiennes » En outre l'inégalité

$$\| u \|_{\alpha, 2}^U \leq C \left( \| \varphi \|_{\alpha, 2}^V + \text{Max}_G | u | \right) \quad (8)$$

subsiste <sup>2</sup>.

Cette généralisation du théorème concernant l'équation de Laplace qui consiste à supposer la régularité des valeurs aux limites sur une *portion* seulement de la frontière et non pas sur la frontière entière, est une des bases de notre procédé.

## II.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer et les évaluations correspondantes s'étendent facilement aux équations homogènes ou non homogènes du type elliptique dont les coefficients  $a_{ik}^0$  sont *constants* ;

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (a_{ik}^0 = a_{ki}^0) \quad (9)$$

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f.$$

Il suffit de remarquer que  $L^0 u$  se transforme en  $\Delta u$  par une substitution linéaire des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En supposant le déterminant des  $a_{ik}^0 = 1$  et

$$| a_{ik}^0 | \leq m, \quad (10)$$

(ce qui ne diminue pas la généralité) nous obtenons

$$\| u \|_{\alpha, 2}^K \leq C(m) \| f \|_{\alpha}^K \text{ pour l'équation } L^0 u = f, \quad (11)$$

$$\| u \|_{\alpha, 2}^U \leq C(m) \left( \| \varphi \|_{\alpha, 2}^V + \text{Max}_G | u | \right) \text{ pour } L^0 u = 0.$$

<sup>1</sup>  $U$  est le produit d'une sphère à  $n$  dimensions et de l'ensemble  $G + S$ .

<sup>2</sup>  $\| \varphi \|_{\alpha, 2}^H$  est aussi calculée par rapport aux paramètres locaux sur  $H$ .

Cette évaluation diffère de la précédente seulement par le fait que, maintenant, la constante C dépend de  $m$ . On peut d'ailleurs trouver aisément la forme exacte de la fonction  $C(m)$ .

### III.

Passons maintenant à l'équation générale

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f. \quad (12)$$

Nous supposons  $|a_{ik}| \leq m$ , les constantes de Hölder des  $a_{ik} \leq M$ , le déterminant des  $a_{ik} = 1$  et nous considérons d'abord la solution de (12) à l'intérieur<sup>1</sup> du domaine borné G, le second membre  $f$  étant Hölderien ( $\|f\|_a^G < \infty$ ). Nous supposons en plus qu'une limitation de  $u$  est connue dans tout le domaine G et que  $u$  ainsi que ses dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur de G (mais pas nécessairement sur la frontière S). Cherchons une limitation de  $D_1 u$ ,  $D_2 u$  et des constantes de Hölder pour  $D_2 u$  à l'intérieur de G. Soulignons, que nous *ne sommes pas* en train de construire une solution; la solution  $u$  de (12) est donnée, ses dérivées sont régulières et notre but est d'établir quelques inégalités. Notre procédé est le suivant: Soit P un point intérieur à G,  $d(P)$  sa distance de la frontière du domaine G et  $\lambda$  un nombre (arbitraire) de l'intervalle  $< 01 >$ :  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Construisons un cube  $W(P, \lambda)$  à  $n$  dimensions, de centre P et de côtés parallèles aux axes; la longueur des côtés est égale à  $\frac{2}{\sqrt{n}} \lambda d(P)$ . Nous nous proposons de trouver la borne supérieure de la fonction

$$\left[ d(P) \right]^{\alpha+2} \left\| u \right\|_{a,2}^{W(P,\lambda)} \stackrel{df}{=} h(P, \lambda)$$

pour  $\lambda$  constant. Désignons cette borne, qui d'ailleurs est finie, par  $N(\lambda)$ . Soit  $P_0$  un point intérieur à G tel que

$$\left[ d(P_0) \right]^{2+\alpha} \left\| u \right\|_{a,2}^{W(P_0,\lambda)} \cong \frac{N(\lambda)}{2}. \quad (13)$$

<sup>1</sup> A la fin de ce paragraphe nous donnerons une évaluation analogue sur la frontière et dans son voisinage.

En écrivant l'équation (12) sous la forme

$$L^0 u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(P_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^n [a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f, \quad (14)$$

nous pouvons appliquer les résultats obtenus plus haut pour l'équation à coefficients constants à

$$L^0 u = \Psi, \quad (15)$$

où

$$\Psi = \Sigma [a_{ik}(P_0) - a_{ik}(P)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f. \quad (16)$$

Nous ne reproduirons pas ici tout le calcul (qui, d'ailleurs, ne dépasse pas l'étendue d'une page et demie <sup>1</sup>); le résultat en est

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq K(m, M) \left\{ \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot \lambda^\alpha (d(P_0))^\alpha + \frac{\text{Max } |u|}{\lambda^{2+\alpha} [d(P_0)]^{2+\alpha}} + \dots \right\} \quad (17)$$

K dépend de M, c'est-à-dire de la constante de Hölder des coefficients  $a_{ik}$ ; on peut trouver facilement la forme exacte de cette dépendance. D étant le diamètre du domaine G, définissons  $\lambda_0$  par la relation

$$K(m, M) \lambda_0^\alpha D^\alpha = \frac{1}{2}; \quad (18)$$

l'inégalité précédente devient alors

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} + K(m, M) \frac{\text{Max } |u|}{\lambda_0^{2+\alpha} [d(P_0)]^{2+\alpha}} + \dots \quad (19)$$

En transportant  $\frac{1}{2} \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}$  dans le premier membre de l'inégalité (19) et en la multipliant ensuite par  $[d(P_0)]^{2+\alpha}$ , nous obtenons

$$\|u\|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)} \cdot [d(P_0)]^{2+\alpha} \leq K_1(m, M) \left[ \|f\|_\alpha^G + \text{Max}_G |u| \right], \quad (20)$$

d'où nous tirons, en vertu de (13), une limitation pour  $N(\lambda)$ .

<sup>1</sup> Voir mes publications indiquées plus haut et particulièrement la *Math. Zeitschrift*.

Ce raisonnement reste valable pour l'équation plus générale

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (21)$$

Passons maintenant à la limitation dans *le voisinage de la frontière*. Il faut alors ajouter à nos hypothèses la supposition suivante:

Dans un voisinage  $U$  d'une portion  $H$  de la frontière<sup>1</sup> les dérivées secondes de  $u$  satisfont à la condition<sup>2</sup> de Hölder;  $\|u\|_{\alpha,2}^U < \infty$ .  $\varphi$  étant les valeurs aux limites, nous prouvons, par un procédé tout à fait semblable au précédent, une limitation pour  $\|u\|_{\alpha,2}^{U'}$  dans chaque domaine  $U'$  intérieur à  $U$ . Il suffit de transformer  $H$  en un hyperplan  $H'$  et d'appliquer les limitations précédentes<sup>3</sup>.

#### IV.

Nous démontrerons maintenant qu'on peut *déduire les théorèmes d'existence des limitations précédentes*. Commençons par l'équation

$$L(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \quad (22)$$

et par des valeurs aux limites ayant des dérivées secondes Hölderiennes (problème de Dirichlet).

Envisageons l'ensemble d'équations du type elliptique dépendant d'un paramètre  $\lambda$

$$\sum a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 u^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_k} = f \quad (23)$$

et telles que l'on ait  $a_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$  (symbole de Kronecker), mais  $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}$ . Pour  $\lambda = 0$  nous obtenons alors l'équation de Poisson

$$\Delta u^{(0)} = f$$

<sup>1</sup> Voir note 1, p. 129.

<sup>2</sup> C'est-à-dire les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder dans l'ensemble envisagé.

<sup>3</sup> Voir l'inégalité (8).

et pour  $\lambda = 1$  l'équation donnée (22). On voit tout de suite que tous les coefficients  $a_{ik}^{(\lambda)}$  satisfont à la même condition de Hölder, c'est-à-dire que leurs normes hölderiennes toutes ensemble sont bornées. Pour  $\lambda = 0$  notre équation est résoluble et en plus  $u^{(0)}$  (c'est-à-dire sa solution pour  $\lambda = 0$ ) satisfait ainsi que ses dérivées premières et secondes à la condition de Hölder:  $\|u^{(0)}\|_{\alpha, 2}^G < \infty$ . La méthode des approximations successives (employée pour ce problème déjà par M. Korn) démontre aisément l'existence de la solution pour  $\lambda$  voisin de 0 et il résulte de la démonstration que  $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^G < \infty$ . D'ailleurs cette démonstration devient vraiment banale si l'on se sert des notations de la théorie des opérations fonctionnelles. L'équation étant résoluble pour  $\lambda_0$  nous pouvons de même établir l'existence des solutions  $u^{(\lambda)}$  pour un  $\lambda$  voisin de  $\lambda_0$  en *restant* toujours dans la classe de fonctions dont les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder. La limitation *uniforme*  $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^G < C$  reste valable pour toutes les solutions  $u^{(\lambda)}$ ; on en déduit la résolubilité de (23) pour  $\lambda = 1$ , c'est-à-dire celle de (22). En plus  $u^{(1)} = u$  appartient à la classe envisagée, ce qui veut dire que ses dérivées secondes satisfont dans  $G + S$  à une condition de Hölder. J'attire votre attention sur la façon extrêmement simple par laquelle notre procédé fournit l'allure de la fonction  $u$ . La transition aux valeurs aux limites continues seulement est maintenant immédiate; on applique les limitations précédentes valables pour les domaines fermés  $\bar{G}$  contenus<sup>1</sup> dans  $G$ .

## V.

Notre procédé est également simple dans le cas de l'équation plus générale

$$K(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (24)$$

<sup>1</sup> C'est la conséquence des limitations fondamentales du paragraphe précédent; il s'agit d'une évaluation qui permet de majorer  $\|u\|_{\alpha, 2}^{\bar{G}}$  seulement par  $\text{Max}_G |u|$  dans chaque domaine fermé  $\bar{G}$  situé à l'intérieur de  $G$ .

L'emploi des équations intégrales n'est plus nécessaire ni la construction de la fonction de Green. Posons

$$L(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \Psi. \quad (25)$$

$u$  est alors une *opération fonctionnelle*  $F(\Psi)$  de  $\Psi$  et l'équation (24) prend la forme

$$\Psi + \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} [F(\Psi)] + cF(\Psi) = f. \quad (26)$$

En introduisant la notation

$$W(\Psi) = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(\Psi) + cF(\Psi), \quad (27)$$

nous avons

$$\Psi + W(\Psi) = f. \quad (28)$$

Nos limitations prouvent que  $W(\Psi)$  est une opération linéaire *complètement continue* à laquelle est alors applicable la théorie développée en 1915 par M. F. RIESZ. On en déduit immédiatement l'alternative suivante: l'équation non homogène (24) est toujours résoluble ou bien l'équation homogène admet une solution non nulle s'annulant sur la frontière.

## VI.

Remarquons encore que ce procédé permet de traiter l'équation (24) pour des coefficients continus seulement et même bornés. J'ai démontré le résultat en question dans une note dans les *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1934. Pour le moment je me borne au cas de dimensions  $n = 2$ . La fonction  $u$  est continue<sup>1</sup>, ses dérivées premières et secondes existent presque partout et l'équation (24) est valable seulement dans ce sens.

---

<sup>1</sup>  $u$  satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant  $\frac{1}{2}$  et ses dérivées premières satisfont à cette condition sur presque chaque droite parallèle à une direction arbitrairement fixée.

J'ai appliqué ces résultats dans une deuxième note dans les *C. R.*<sup>1</sup> à l'équation elliptique quasilineaire

$$\begin{aligned} A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t \\ = D(x, y, z, p, q) \end{aligned} \quad (29)$$

$$AC - B^2 > \Delta > 0$$

à coefficients *continus* et bornés en  $x, y, z, p, q$ . Le problème de Dirichlet est ici toujours résoluble dans le sens que nous venons de préciser<sup>2</sup>. On obtient ce résultat par l'application du théorème du point invariant sous la forme exposée dans mon travail dans les *Studia Math.*, 2, pp. 171-180<sup>3</sup>. C'est en quelque sorte une généralisation de mes résultats antérieurs concernant l'équation de forme normale

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q),$$

où  $f$  est seulement continue.

## VII.

Nous avons montré comment on peut traiter le problème de Dirichlet. Les autres problèmes aux limites, la construction de la fonction de Green etc. ne présentent maintenant — il faut le souligner — plus aucune difficulté. Je voudrais exposer ici encore la construction de la fonction de Green<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> 26. XII. 1934. La 12<sup>me</sup> ligne de la page 1567 de cette note doit être lue: « limites arbitraires suffisamment régulières ».

<sup>2</sup> Remarquons que la méthode développée ici pour limiter une solution est très générale; nous pouvons de chaque évaluation de solutions des équations de Laplace et de Poisson passer à une évaluation analogue pour les équations elliptiques générales. On peut alors faire différentes hypothèses sur les coefficients  $a_{ik}$ .

<sup>3</sup> Je m'appuie ici sur le théorème II du travail cité p. 175. Remarquons à cette occasion que la démonstration du théorème I (p. 173) de ce travail donne le théorème en question du point invariant seulement pour les espaces métriques et linéaires dans lesquels zéro possède des voisinages convexes arbitrairement petits.

<sup>4</sup> Une fois résolu le problème de Dirichlet il est très facile de construire la fonction de Green  $G(X, E)$ . Dans le cas de l'équation de Laplace cette fonction de Green s'obtient en retranchant de la solution  $\frac{1}{r^{n-2}}$  une fonction harmonique qui sur la frontière est égale à cette solution fondamentale. Dans le cas général on opère de la même façon; on définit immédiatement la partie singulière. On doit alors en retrancher la solution d'un problème de Dirichlet posé pour une équation  $L(u) = f$ .

Posons, comme on le fait souvent dans la théorie des équations du type elliptique de second ordre,

$$R(X, E) = \sum_{r,s=1}^n \alpha_{rs}(E) (x_r - e_r) (x_s - e_s), \quad (30)$$

$X, E$  étant des points de l'espace euclidien à  $n$  dimensions de coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $e_1, e_2, \dots, e_n$ ;  $\alpha_{rs}(E)$  sont les éléments de la matrice inverse de la matrice  $a_{ik}(E)$ . Soit  $\Omega^*$  un domaine borné contenant  $\Omega$  et sa fermeture. Je vais me servir d'une remarque bien connue et employée par beaucoup d'auteurs. Soit  $\rho$  une fonction suffisamment régulière (par exemple Hölderienne) et posons

$$u(X) = -\mu \int_{\Omega^*} \dots \int [R(X, E)]^{\frac{2-n}{2}} \rho(E) d\tau_E, \quad (31)$$

où

$$\mu = -2^{-2} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right).$$

En calculant les dérivées secondes de la fonction  $u$  et en formant<sup>1</sup> l'opérateur  $K_X(u)$  on arrive (par un procédé bien connu de la théorie du potentiel) à l'expression

$$K_X(u) = \rho(X) + c \int_{\Omega^*} \dots \int \lambda[X, E] \rho(E) d\tau_E \quad (32)$$

dont le noyau est

$$\lambda(X, E) = K_X[R(X, E)], \quad (33)$$

$c$  dépendant de  $\mu$ . La dérivation est ici effectuée par rapport à  $X$ . Il n'est pas nécessaire de résoudre une équation intégrale correspondante à (32) ni pour des petits ni pour des grands domaines  $\Omega^*$ . Nous ferons seulement deux remarques:

$\alpha$ )  $\rho(E)$  étant bornée, le résultat  $m(X)$  de l'opération fonctionnelle

$$m(X) = \int_{\Omega^*} \dots \int \lambda(X, E) \rho(E) d\tau_E \quad (34)$$

<sup>1</sup> Il s'agit de l'opérateur  $K$  défini par (24); l'indice inférieur  $X$  indique que la dérivation se fait par rapport à  $X$ .

effectuée sur  $\rho$  satisfait à la condition de Hölder (ce qui se prouve à l'aide de méthodes très simples, employées déjà dans la théorie du potentiel).

$\beta$ ) Le noyau  $\lambda(X, E)$  est singulier et d'ordre  $r^{n-\alpha}$ , où  $r$  désigne la distance des deux points  $X, E$ .

Il est une conséquence de la condition  $\beta$ ) que les ordres des noyaux itérés

$$\lambda^{(1)} = \lambda, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots, \lambda^{(i-1)}, \lambda^{(i)}, \dots$$

diminuent successivement et soient bornés à partir d'un indice suffisamment élevé  $i - 1$ . A cause de  $\alpha$ )  $\lambda^{(i)}(X, E)$  satisfait à une condition de Hölder par rapport à la première variable  $X$ .

Envisageons

$$\begin{aligned} R'(X, E) &= [R(X, E)]^{\frac{2-n}{2}} + \mu \int_{\Omega^*} \dots \int R^{\frac{2-n}{2}} \lambda(\bar{E}, E) d\tau_{\bar{E}} + \dots \\ &\dots + \mu^{i-1} \int_{\Omega^*} \dots \int R^{\frac{2-n}{2}} \lambda^{(i-1)}(\bar{E}, E) d\tau_{\bar{E}}. \end{aligned} \quad (35)$$

En vertu de (32) nous avons

$$K_X R'(X, E) = \mu^i \lambda^{(i)}(X, E).$$

Supposons maintenant que le point  $E$ , qui joue le rôle d'un pôle, soit fixe à l'intérieur de  $\Omega$ .  $E$  restant constant, la fonction  $R'(X, E)$  est continue sur la frontière de  $\Omega$ . Considérons dans  $\Omega$  une solution  $u$  de l'équation

$$K_X u = -\mu^i \lambda^{(i)}, \quad E \text{ constant}$$

les valeurs aux limites étant  $-R'(X, E)$ . La fonction  $R' + u = G(X, E)$  est la fonction de Green cherchée s'annulant sur la frontière de  $\Omega$ .

## VIII.

Les évaluations obtenues précédemment qui ont été le point de départ de nos recherches mènent immédiatement à des

limitations importantes de la fonction de Green  $G(X, E)$  et de ses dérivées premières et secondes. Par exemple: dans le domaine  $\Omega_\delta$  à distance  $\delta$  du pôle les limitations

$$\|G\|_{\alpha,2}^{\Omega_\delta} \leq \frac{C_1(M)}{\delta^{n+\alpha}}; \quad \|G\|_{\alpha,1}^{\Omega_\delta} \leq \frac{C_2(M)}{\delta^{n+\alpha-1}}$$

sont valables. Dans les normes  $\| \cdot \|$  la dérivation s'effectue toujours par rapport au premier point  $X$ . On peut d'ailleurs démontrer facilement certaines conditions de Hölder relativement au point  $E$ . (On calcule facilement les valeurs de  $C_1(M)$  et  $C_2(M)$ .) On traite aussi aisément le problème de Neumann et ses généralisations <sup>1</sup>.

## IX.

J'ai tâché de montrer comment on cherchait les solutions des équations linéaires du type elliptique par une voie directe. Il est vraisemblable que cette méthode pourrait aussi rendre service pour des autres types d'équations. Je veux encore indiquer de récents résultats d'autres auteurs, mais seulement des résultats obtenus pendant les derniers mois.

Avant tout, ce sont les nouveaux travaux de M. GIRAUD qui cherche à résoudre l'équation (24), étant donnée sur la frontière la valeur de la dérivée dans une direction arbitraire non tangente et d'ailleurs pouvant varier d'un point à l'autre. On ramène le problème à une équation intégrale, mais l'ordre du noyau  $\lambda(X, E)$  est trop élevé et l'intégrale  $\int \int \lambda(X, E) \rho(E) d\tau_E$  doit être calculée dans le sens de Cauchy. On ne peut pas utiliser directement la théorie de Fredholm. M. Giraud a développé la théorie <sup>2</sup> de ces équations intégrales singulières.

On peut étendre aux équations linéaires du type elliptique général du second ordre les recherches que M. VASILESCO vous a exposées ce matin. Le résultat capital en est le suivant: les

<sup>1</sup> Je ne donne pas ici les calculs en question pour que la conférence ne soit pas trop longue. Ils sont maintenant très simples, car nous pouvons (v. §§ VII et VIII) construire la fonction de Green et limiter ses dérivées d'une façon très brève. Je montrerai cela dans un travail qui paraîtra bientôt.

<sup>2</sup> Voir *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.*, 1935.

points irréguliers sont les mêmes qu'il s'agisse de l'équation de Laplace ou de l'équation générale linéaire <sup>1</sup>.

Pour terminer je voudrais remarquer que, à l'exception d'un travail de E. E. LEVI fait en 1910, je ne connais point de nouvelles recherches sur l'équation du type elliptique d'ordre  $2p$  ( $p > 1$ ) ni sur des systèmes d'équations (évidemment quelques généralisations faciles sont possibles). Je crois alors que les futurs efforts devraient aller dans cette direction-là.

---

## LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES <sup>2</sup>

PAR

Jean LERAY (Paris).

---

### I. — GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON LINÉAIRES.

1. — *Un type particulièrement simple d'espaces abstraits : ceux de M. BANACH.* — Nous envisageons des problèmes dont l'inconnue est un point  $x$  d'un *espace fonctionnel donné*,  $\mathcal{E}$ .

Nous supposons que  $\mathcal{E}$  est un espace abstrait de Banach : on peut combiner linéairement ses points ; une distance est définie ; la distance  $\|x\|$  qui sépare l'origine du point  $x$  est nommée norme de  $x$  ; on a,  $\lambda$  étant une constante réelle,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

$\mathcal{E}$  sera par exemple l'espace des fonctions continues, l'espace de Hilbert, l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant  $\alpha$ , l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes et d'exposant  $\alpha$  ;  $\mathcal{E}$  pourra être éventuellement un espace euclidien.

---

<sup>1</sup> Voir par exemple TAUTZ, *Math. Zeitschr.* Bd. 29, 1935.

<sup>2</sup> Conférence faite le 19 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève ; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*