Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CAS LE PLUS GÉNÉRAL

Autor: Vasilesco, Florin

Kapitel: II. — Le problème de Dirichlet généralisé.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27306

soit que leurs auteurs eussent pour objectif simplement la résolution du problème de Dirichlet classique, soit que les critères de régularité ou d'irrégularité que l'on donnait ne permissent pas de connaître le comportement de la fonction V en tous les points de la frontière, à cause de leur caractère suffisant, une telle fonction V n'a jamais été désignée pour être solution d'un problème de Dirichlet plus étendu que le problème classique, devant remplacer celui-ci dans les cas où il est impossible.

II. — Le problème de Dirichlet généralisé.

C'est M. N. Wiener [1] qui, en 1934, donna un procédé de définition d'une fonction V, indépendamment de l'idée de résoudre le problème de Dirichlet classique. De plus, il caractérisa, au moyen d'un critère nécessaire et suffisant de nature quasi-géométrique [2], les points réguliers et irréguliers de la frontière, pour ce procédé. Il envisagea ainsi un problème plus étendu que le problème de Dirichlet classique qu'il désigna par le nom de Problème de Dirichlet généralisé. Son procédé constitue une extension naturelle du problème classique et cela permet de voir que, lorsque celui-ci est possible, sa solution coïncide avec la fonction V donnée par ce procédé.

Il est, dès lors, naturel que l'on désigne un domaine pour lequel le problème classique est possible, par un nom particulier: convenons, selon un usage déjà répandu, de l'appeler *domaine normal*. Par exemple, un domaine formé par un assemblage de cubes, est un tel domaine: on le voit en utilisant, si l'on veut, le critère de M. Zaremba.

Voici le procédé de M. Wiener.

Soient Ω un domaine, borné ou non — ensemble ouvert — Σ sa frontière, supposée bornée, et $f(p)$ une distribution continue sur elle. Considérons d'une part, une fonction continue dans tout l'espace, F, coïncidant avec f sur Σ [3] et, d'autre part, une suite Ω_k de domaines normaux intérieurs à Ω et tendant vers lui.

---

[1] *J. Math. Phys. Mass. Inst. of Tech.*, 2^me^ série, n° 70, janv. 1924.
[2] *Ibid.*, n° 1, janv. 1925.
[3] C'est M. Lebesgue qui a montré la possibilité de construire une telle fonction dans son mémoire cité du Circolo matematico.

Si V_k est la solution du problème de Dirichlet dans Ω_k pour les valeurs de F sur sa frontière Σ_k, la suite des fonctions V_k tend uniformément vers une fonction harmonique V, dans toute région fermée de Ω. Cette fonction est indépendante du choix des Ω_k et de la fonction F. C'est la solution du problème de Dirichlet généralisé.

M. Wiener applique tout de suite ce procédé au cas d'un ensemble fermé borné E, en considérant le domaine infini qu'il détermine dans l'espace et dont E, ou une partie de E est la frontière. Pour ce domaine, il prend f égale à l'unité. La fonction V ainsi obtenue est appelée, par lui, *potentiel conducteur de l'ensemble* E. C'est la généralisation de la notion classique pour un conducteur. De plus, si $v(P)$ est cette fonction, l'intégrale de Gauss

$$c = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{dv}{dn_i} dS$$

étendue à une surface contenant E à l'intérieur permet à M. Wiener de définir la notion de *capacité de l'ensemble* E, comme dans le cas classique.

Les deux notions précédentes, de potentiel conducteur et de capacité d'un ensemble, se sont révélées fondamentales pour la théorie des fonctions harmoniques. On le verra par la suite.

C'est ainsi que, grâce à elles, M. Wiener a pu donner le critère suivant de régularité d'un point frontière.

Soient p *un point frontière de* Ω, λ *un nombre positif inférieur à l'unité*, γ_n *la capacité de l'ensemble de points non appartenant à* Ω *et tels que leur distance à* p *soit comprise entre* λ^n *et* λ^{n-1}.

Alors, p *est régulier ou irrégulier selon que la série*

$$\frac{\gamma_1}{\lambda} + \frac{\gamma_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{\lambda^n} + \dots$$

est divergente ou convergente[1].

---

1 Dans le cas de l'espace à deux dimensions cette série est remplacée par la suivante: $\gamma_1 + 2\gamma_2 + \dots + 2^m\gamma_m + \dots$; γ_m étant la capacité de l'ensemble des points non appartenant à Ω, dont la distance à p est comprise entre λ^{2m} et γ^{2m+1}.

Les points de la frontière sont ainsi caractérisés d'une manière précise, et le caractère local est évident.

Mais cette précision même impose, dès lors, la recherche suivante: *Etudier la distribution des points réguliers et irréguliers à la frontière d'un domaine.*

On a réussi à faire cette étude complètement, dans ces temps derniers. Comme les recherches que l'on a faites sur le problème de Dirichlet généralisé ont, plus ou moins directement, concouru vers ce but, nous allons en donner un aperçu rapide qui aboutira au résultat général et définitif obtenu dans cette étude.

Fonction de Green (généralisée). Si l'on considère un point fixe Q dans Ω et la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valenrs $\frac{1}{r} = \frac{1}{pQ}$ sur la frontière, soit $\Gamma(P, Q)$, la fonction

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \Gamma(P, Q)$$

sera la fonction de Green du domaine Ω. De même que dans le cas classique, cette fonction est positive et a un pôle en Q; mais *elle ne s'annule plus nécessairement à la frontière du domaine.*

On démontre [1] que: si la fonction de Green tend vers zéro sur une suite de points de Ω tendant vers p, la fonction V tend vers $f(p)$.

On conclut de là ce fait important que

Un point p *de la frontière est régulier ou irrégulier selon que la fonction de Green tend vers zéro ou non.*

Ainsi, l'étude qui nous intéresse se ramène à celle de la fonction de Green du domaine. On a remarqué [2] que l'on peut, avec avantage ramener encore l'étude de cette fonction à celle du potentiel conducteur. Le passage à cette dernière fonction s'opère aisément au moyen de l'énoncé suivant:

Si e est un ensemble fermé borné dont aucun point n'appartient à Ω et $v(P)$ son potentiel conducteur, on a l'inégalité

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1 - v(P)}{1 - M}\right] \geq G(P, Q)$$

[1] BOULIGAND, *Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1925.
KELLOGG, *Proc. of the Nat. Ac. of Sc.*, t. 12, VI, 1926, p. 402.

[2] F. VASILESCO, *Journal de math.*, t. IX, 1930.

en désignant par r le rayon d'une sphère σ de centre Q, tout entière dans Ω et par M le maximum de v sur elle.

On pourra utiliser cette inégalité de la manière suivante. Un point régulier p de Σ restera régulier pour le domaine infini extérieur à la portion Σ_r déterminée sur l'ensemble des points n'appartenant pas à Ω par une sphère (r) de centre p et de rayon r. Si la fonction de Green de ce domaine tend vers zéro en ce point, le potentiel de Σ_r tend vers 1, et réciproquement. C'est de l'étude à la frontière du potentiel que l'on obtiendra facilement des résultats sur les points frontière d'un domaine.

Ensembles impropres. Ensemble réduit. Frontière réduite [1]. On appelle impropre, un ensemble borné ou non, dont chaque partie fermée est de capacité nulle.

Un ensemble est de capacité nulle en un point, lorsqu'il existe une sphère centrée en ce point telle que la partie de l'ensemble qu'elle contient soit de capacité nulle.

On démontre, à l'aide du lemme de MM. Borel-Lebesgue que Un ensemble fermé borné qui est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle est aussi de capacité nulle.

On voit que tout ensemble de capacité nulle en un point est impropre. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Si E est un ensemble fermé borné ou non, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ceux de ses points en lesquels il est de capacité nulle, $\mathcal{E}$ est impropre. On appellera $\mathcal{E}$ la partie impropre de E. Si $E - \mathcal{E}$ existe, il est fermé et n'est de capacité nulle en aucun de ses points. Il n'a donc plus de partie impropre.

Un ensemble sans partie impropre sera dit réduit. Tout ensemble pourra être réduit.

En particulier, si $\mathcal{E}$ est la partie impropre de la frontière Σ d'un domaine, $\Sigma - \mathcal{E}$ est fermé, et l'on démontre qu'aucun point de $\mathcal{E}$ n'est limite de points extérieurs à Ω. Donc $\Omega' = \Omega + \mathcal{E}$ est encore un domaine de frontière réduite $\Sigma - \mathcal{E}$. On appellera frontière extérieure de Ω l'ensemble de points Σ_e' de Σ qui sont limites de points extérieurs à Ω. Les autres points de Σ forment

1 F. Vasilesco (loc. cit.).

la frontière intérieure Σ_i'. On voit que $\Omega'' = \Omega' + \Sigma_i'$ est encore un domaine.

Singularités artificielles des fonctions harmoniques. Résultats définitifs. On connaît le résultat suivant, qui remonte à Schwartz, et qui, pour avoir été retrouvé récemment par M. PICARD [1], a donné lieu à tous les développements que l'on verra:

Il n'y a pas de singularité pour une fonction harmonique, en un point où elle est continue, si elle reste bornée dans le voisinage de ce point.

M. Lebesgue [2] en a donné l'extension suivante:

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique bornée dans un domaine, aux points entièrement intérieurs à ce domaine, où elle n'est pas définie,

1° d'un arc borné de courbe analytique, ou de courbe rectifiable,

2° d'un ensemble réductible de points ou de courbes,

3° d'un ensemble pouvant être enfermé dans un nombre fini de sphères, dont la somme des rayons puisse être prise aussi petite que l'on voudra.

On peut remarquer que tous ces ensembles sont de capacité nulle. Mais cette notion n'était pas née au moment où cet énoncé avait été donné.

M. BOULIGAND [3] a établi l'énoncé plus général suivant:

Il n'y a pas de singularités pour une fonction harmonique aux points d'un ensemble de capacité nulle entièrement intérieur à un domaine où elle reste bornée.

M. KELLOG [4] établit la réciproque de cet énoncé.

Enfin, le raisonnement de Kellogg permet de démontrer le résultat définitif [5] que l'on peut atteindre dans cet ordre d'idées:

Soient T un domaine et B une partie de sa frontière telle que $T' = T + B$ soit encore un domaine; T et B peuvent s'étendre à l'infini. Si B est impropre, toute fonction harmonique bornée

---

[1] *C. R.*, t. 176, 1923, p. 933.
[2] *C. R.*, t. 176, 1923, p. 1097.
[3] Loc. cit.
[4] Loc. cit.
[5] F. VASILESCO, loc. cit.

dans le voisinage de chaque point de B peut être définie sur B, de manière qu'elle soit harmonique sur T', et réciproquement, si cela est possible, B est un ensemble impropre. Le maximum de l'ensemble B est la partie impropre de la frontière de T.

Théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques. Grâce aux notions de capacité, de potentiel conducteur et d'ensemble impropre, on peut établir les théorèmes généraux suivants:

Soient $F(P)$ et $\Phi(P)$ deux fonctions harmoniques bornées dans un domaine Ω, prenant les mêmes valeurs sur une partie $\Sigma - s$ de la frontière, s étant un ensemble fermé de Σ.

Si M est une borne supérieure commune à $|F(P)|$ et à $|\Phi(P)|$ et $v(P)$ le potentiel de s, on a dans Ω

$$2Mv(P) \geqq |F(P) - \Phi(P)| \text{ [1]}$$

Ainsi, le potentiel conducteur de s mesure, en quelque sorte, la différence entre ces deux fonctions harmoniques.

En particulier, si s est de capacité nulle, $F(P)$ et $\Phi(P)$ coïncident.

Cependant, ce cas particulier peut être également considéré comme tel, pour l'énoncé général[2] suivant:

Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées, distinctes, dans un domaine Ω, si leur différence tend vers zéro partout sur sa frontière Σ, sauf sur un ensemble impropre de celle-ci.

Enfin, on a le théorème [3] suivant:

Si une fonction harmonique bornée dans Ω est continue aux points de Σ, sauf aux points d'un ensemble s de capacité nulle de celle-ci, elle admet, dans Ω, le même maximum et le même minimum que sur $\Sigma - s$.

Potentiel d'une distribution de masse. Continuité à travers la masse [4]. Une distribution de masse sera une fonction complète-

---

1 F. Vasilesco, loc. cit.
2 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et aussi *Journ. de math.*, 1935, fasc. 2.
3 *Ibid.*
4 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1173 et *Journ.* (loc. cit.). G. C. Evans, *Transactions of the Am. Math. Soc.*, vol. 37, 1935, p. 226.

ment additive d'ensemble mesurable B. On peut se borner à n'envisager que des distributions positives, toute autre distribution étant la différence de deux telles distributions. On a le théorème suivant:

Soient E un ensemble parfait borné et $\mu(e)$ une distribution positive sur lui. Le potentiel de cette distribution (donné par une intégrale de Stieltjes) est continu en tout point de E où il est continu sur E. L'ensemble des points de E où il est continu sur E est partout dense, sur E.

Etude de la distribution des points réguliers et irréguliers de la frontière d'un domaine. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder cette étude.

Tout d'abord, on démontre que la solution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine Ω est la même que pour le domaine Ω' si les données frontières coïncident sur Σ'. En particulier, la fonction de Green est la même pour ces domaines [1].

En conséquence, pour étudier le comportement à la frontière du potentiel d'un ensemble fermé borné E, il suffit de considérer l'ensemble réduit qui s'en déduit, et de celui-ci, seulement la partie E′ qui constitue la frontière du domaine infini et d'un seul tenant D. Soient E'_e la frontière extérieure de ce domaine et E'_i sa frontière intérieure.

On démontre que le potentiel de E'_e tend vers l'unité aux points d'un ensemble partout dense sur E'_e. De même, un ensemble réduit borné sans domaine intérieur est tel que, en chacun de ses points, son potentiel a comme plus grande limite l'unité. On en déduit, en réunissant ces énoncés, le résultat sur E′ [2].

On peut aller plus loin dans cette voie et démontrer

Le lemme de Kellogg. — Tout ensemble réduit borné a des points réguliers [3].

On en conclut que, sur l'ensemble E′, l'ensemble des points

---

[1] F. VASILESCO, *Journ. de math.*, loc. cit., 1930.
[2] *Ibid.*
[3] EVANS, *Proc. of the Nat. Acad. of Sc.*, 19, 1933, p. 457; VASILESCO, *Journ.*, loc. cit. 1935.

réguliers est partout dense, et que, par conséquent, la fonction de Green du domaine D tend vers zéro sur un ensemble de points partout dense sur E′.

Le passage de cette étude concernant le potentiel conducteur, au cas d'un domaine quelconque, se fait au moyen de l'artifice indiqué précédemment, et l'on peut énoncer le théorème suivant:

L'ensemble des points réguliers est partout dense sur la frontière réduite d'un domaine Ω.

Mais que peut-on dire de l'ensemble des points irréguliers ?

On peut former un exemple montrant que cet ensemble peut, également, être partout dense sur la frontière [1]. Sans entrer dans les détails de la construction, disons simplement que chaque point irrégulier est formé par une épine de M. Lebesgue, et que cet ensemble est dénombrable. Il est donc impropre.

On peut même donner un exemple [2] d'un domaine sur la frontière réduite duquel les points irréguliers forment une infinité de lignes analytiques, ou en général, d'ensembles de capacité nulle, qui sont partout denses. Dans cet exemple, l'ensemble des points irréguliers est encore impropre, mais il n'est plus dénombrable.

La recherche de ces exemples a été provoquée par l'affirmation qui avait été formulée, auparavant, que l'ensemble des points irréguliers serait de capacité nulle [3]. Il n'en est rien, comme on vient de le voir, et comme on le démontrera d'une façon générale.

En effet, grâce au lemme de Kellogg, on démontre que l'ensemble des points de la frontière d'un domaine, où la plus grande limite de la fonction de Green est supérieure ou égale à un nombre donné ε, est de capacité nulle [4].

On en conclut que

L'ensemble des points irréguliers est impropre.

Nous atteignons ainsi le résultat général au sujet de l'étude que nous nous sommes proposée.

Sur la frontière réduite d'un domaine, l'ensemble des points

---

1 F. Vasilesco, *Journ.*, loc. cit., 1930.
2 F. Vasilesco, *C. R.*, t. 187, 1928, p. 1116.
3 O. D. Kellogg, *Bul.*, loc. cit.
4 Vasilesco, *Journ.*, loc. cit., 1930.

irréguliers est partout dense. Il peut en être de même de celui des points irréguliers, mais celui-ci est un ensemble impropre.

Le résultat qui précède, concernant la fonction de Green, permet de formuler l'énoncé suivant, dû à M. Bouligand [1]:

V(P) étant la solution du problème de Dirichlet généralisé, l'ensemble des points frontière où quelque valeur limite de V est extérieure à l'intervalle $[f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon]$ est de capacité nulle.

Cas des surfaces de niveau du potentiel [2]. Considérons un ensemble réduit borné. En chacun de ses points irréguliers le potentiel conducteur a une limite inférieure plus petite que l'unité. Appelons surface de niveau S_λ du potentiel, la frontière du domaine formé par les points où $v < \lambda < 1$. On démontre que le potentiel de S_λ est égal à $\frac{v}{\lambda}$ et que les points irréguliers de S_λ sont ceux où la plus petite limite de v est inférieure à λ, les autres étant réguliers. D'après le résultat général précédent, on conclut que

Une surface de niveau du potentiel d'un ensemble réduit borné ne peut avoir qu'un ensemble de capacité nulle de points réguliers.

Propriété de la solution du problème de Dirichlet généralisé. Le même résultat général précédent, joint à des résultats antérieurs concernant les fonctions harmoniques, permet d'énoncer le théorème suivant:

Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques bornées qui tendent vers la même valeur aux points réguliers de la frontière d'un domaine [3].

Et cet énoncé permet de démontrer la propriété suivante de la solution du problème de Dirichlet généralisé:

Elle peut être définie au moyen de domaines normaux tendant vers Ω d'une manière quelconque, et non plus seulement par son intérieur [4].

---

1 Loc. cit. et VASILESCO, *Journ.*, loc. cit., 1930.
2 F. VASILESCO, *C. R.*, t. 187, 1928, p. 635.
3 F. VASILESCO, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 199 et *Journ.*, loc. cit., 1935.
4 *Ibid.*