

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE  
**Autor:** Doetsch, Gustav  
**Kapitel:** VII. — Prolongement analytique.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27305>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

dans le cas de la demi-bande et d'une solution s'annulant aux extrémités  $x = 0$  et  $x = \pi$ . En posant

$$z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \sin nx$$

il réduit l'équation (6, 52) à un système infini d'équations intégrales, qui est résolu par des approximations successives.

## VII. — PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

1. — Soit  $z(x, y)$  une fonction satisfaisant dans un domaine  $\mathfrak{G}$  à une équation parabolique. S'il existe un domaine  $\mathfrak{G}_1$  contigu à  $\mathfrak{G}$  le long d'un arc AB, et une fonction  $\bar{z}(x, y)$  satisfaisant dans  $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_1$  à la même équation et identique à  $z$  dans  $\mathfrak{G}$ , nous dirons que  $z$  est *prolongeable* au travers de AB. C'est ainsi que Holmgren définit cette notion, en supposant d'ailleurs la *régularité* de  $z$  et  $\bar{z}$ . L'on pourrait aussi définir la possibilité d'un prolongement de la manière suivante: Il doit exister une fonction  $z_1(x, y)$  satisfaisant dans  $\mathfrak{G}_1$  à l'équation différentielle qui, ainsi que certaines de ses dérivées, se raccorde d'une façon continue avec  $z$ ; l'équation différentielle doit être satisfaite aussi sur AB.

L'exemple suivant montre l'importance de la manière d'envisager le prolongement et le raccord continu le long de AB:

La fonction  $z \equiv 0$  satisfait dans  $\mathfrak{G}$ :  $0 < x < x_0$ ,  $y > 0$ , à l'équation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  et a, ainsi que toutes ses dérivées, la valeur zéro sur la frontière donnée par  $x = x_0$ .

La fonction  $z_1(x, y) \equiv \psi(x - x_0, y + \alpha)$  avec  $\alpha \geq 0$  satisfait dans le domaine adjacent

$$\mathfrak{G}_1: x > x_0, y > 0$$

à la même équation différentielle et possède le long de la droite  $x = x_0$  la valeur zéro. Mais que font les dérivées? Si l'on complète  $z_1$  par sa valeur sur la frontière,  $\frac{\partial z_1}{\partial x}$  existe le long de  $x = x_0$  (du côté droit) et a la valeur  $\frac{1}{2\sqrt{\pi}(y + \alpha)^{3/2}}$ ;  $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$  existe

également et a la valeur zéro. Puisqu'on a aussi  $\frac{\partial z_1}{\partial y} = 0$  sur  $x = x_0$ , il en résulte que

- 1) l'équation différentielle est satisfaite sur  $x = x_0$ ,
- 2) pour le passage de  $z$  à  $z_1$  le raccord continu des dérivées intervenant dans l'équation différentielle a lieu.

Par contre la dérivée par rapport à  $x$ , qui n'intervient pas dans l'équation différentielle, n'est pas continue. Si sa continuité n'est pas expressément exigée, on peut prolonger  $z$  d'une infinité de manières ( $\alpha \geq 0$  est arbitraire), prolongements qui ne donnent alors évidemment pas de fonctions régulières et de ce fait analytiques en  $x$ .

2. — *L'aspect du problème du prolongement* est complètement différent suivant qu'on exige que le prolongement soit fait vers la droite ou la gauche ou bien vers le bas, c'est-à-dire si l'on veut traverser une des courbes  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$  ou bien la caractéristique  $\mathfrak{R}$ ; ceci est en rapport avec le fait que, pour l'équation (1, 21) par exemple, un  $u$  régulier est bien analytique dans la direction des  $x$ , tandis qu'il appartient seulement à la classe 2 dans la direction des  $y$ . Si  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$  sont, comme toujours dans la physique, des droites perpendiculaires  $x = 0$  et  $x = l$ , il s'agit une fois d'une extrapolation de l'état de température plus loin que les extrémités du fil (« räumliche Fortsetzung »), la seconde fois de la reconstitution d'un état antérieur à l'état initial observé (« zeitliche Zurückverfolgung »), deux cas d'importance capitale en physique.

Envisageons d'abord le prolongement au travers de  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$ , par exemple au travers de  $\mathfrak{C}_1$ . Pour cela Holmgren [3, 4] obtint le beau résultat suivant:

Si  $\mathfrak{C}_1$  est représentable par une fonction analytique  $x = \gamma_1(y)$ ,  $a \leq y \leq b$ , alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution  $u(x, y)$  régulière dans  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$  (voir page 51) de l'équation (1, 21) puisse être prolongée au travers de  $\mathfrak{C}_1$  vers la gauche, s'énonce ainsi: Les valeurs que  $u$  prend sur chaque arc plus petit:  $a < \alpha \leq y \leq \beta < b$ , définissent une fonction  $f(y)$  qui possède

dans  $\alpha \leq y \leq \beta$  toutes les dérivées et représente une fonction  $\mathfrak{S}$  de la classe 2.

La démonstration se base essentiellement sur le théorème d'unicité du problème de Cauchy. Il est donc nécessaire de prendre les hypothèses assez étroites pour que l'unicité soit effectivement assurée.

L'unicité du prolongement lui-même résulte de l'analyticité de  $u$  dans la direction des  $x$ .

Gevrey ([1], nos 57, 58) a étendu cela à l'équation linéaire générale.

Pour le *cas physique* où le domaine primitif est formé par une demi-bande  $0 < x < l, y > 0$  l'on peut donner au problème du prolongement un *autre aspect* (Doetsch [1], p. 48). Exigeons de nos solutions au moins que l'unicité soit hors de doute et que la solution du problème aux limites soit représentée par la formule classique (1, 23). Pour simplifier nous supposons que les valeurs s'annulent sur les frontières  $x = l$  et  $y = 0$ ; nous pouvons toujours arriver à cela par soustraction des termes relatifs à ces frontières de la formule (1, 23), termes qui, d'ailleurs, sont prolongeables au travers de la frontière  $x = 0$ . Si l'on peut maintenant prolonger  $u$  vers la gauche jusqu'à une droite  $x = -\alpha$  incl. et cela de façon à ce que les valeurs initiales restent nulles sur le prolongement de la frontière inférieure, alors on peut considérer la droite  $x = -\alpha$  comme frontière à gauche. Alors la température pour  $x \geq 0$  ou bien, puisque ça suffit, pour  $x = 0$  doit être représentable au moyen de la température sur la nouvelle frontière. Si l'on change la notation des abscisses cela peut s'exprimer ainsi: La formule classique

$$u(x_0, y) = A(y) * G(x_0, y)$$

est, si les valeurs zéro sont données à droite et en bas, solution du problème qui consiste à évaluer, à partir de la température sur la frontière  $x = 0$  à gauche, la température en chaque point  $x_0$  placé plus à droite. Posons maintenant le problème inverse: Quelle température  $A(y)$  doit être placée à la frontière  $x = 0$ , pour qu'on trouve en  $x_0$  précisément la température  $u(x_0, y)$ ? Cela revient évidemment à la résolution d'une équation intégrale

de première espèce de Volterra, mais qui ne se laisse pas transformer de la façon habituelle par dérivation en une équation de seconde espèce, puisque toutes les dérivées de  $G(x_0, y)$  s'annulent pour  $y = 0$ . On peut cependant ramener cette équation intégrale à une autre de noyau  $\psi(x_0, y)$  plus simple (Doetsch [5]), qui correspond d'ailleurs au cas du fil indéfini, et énoncer pour cette dernière ce qui suit (Doetsch [6]):

Pour qu'elle possède une solution il est nécessaire que toutes les dérivées par rapport à  $y$  de  $u(x_0, y)$  existent pour  $y \geq 0$  et s'annulent, comme d'ailleurs  $u(x_0, y)$  elle-même, pour  $y = 0$ . Si la série suivante, procédant suivant des quotients différentiels d'ordre fractionnaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} u(x_0, y)$$

converge pour  $y \geq 0$  et est intégrable terme à terme dans chaque intervalle fini, alors elle représente la solution  $A(y)$  de l'équation intégrale.

Tandis que Holmgren ne démontre que l'existence du prolongement, lequel peut rester indéterminé jusqu'où ce prolongement peut être effectué, nous donnons ici une expression explicite pour la solution, à condition que l'étendue du prolongement soit déterminé *a priori*. Mais c'est précisément cela qui est donné pour des problèmes physiques: si par exemple l'extrémité  $x = 0$  est « inaccessible » et que l'on veuille déterminer sa température à partir de celle qui a été constatée en un point « accessible »  $x_0$ .

3. — Envisageons maintenant le *prolongement au travers de  $\mathbb{R}$* ! Supposons ici tout de suite que  $\mathbb{C}_1$  et  $\mathbb{C}_2$  sont deux droites verticales  $g_1$  et  $g_2$ . Pour ce cas Gevrey ([1], n° 59) déjà a remarqué que le prolongement n'est pas univoque si l'on ne connaît pas les valeurs de  $u$  sur les prolongements vers le bas de  $g_1$  et  $g_2$ . Pour la possibilité d'un prolongement il trouve comme condition nécessaire et suffisante ([1], n° 60) que les valeurs de  $u$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  étant située dans un plan complexe des  $x$ , doivent définir une fonction analytique dans le carré construit sur  $\mathbb{R}$  comme

diagonale. Nous pouvons cependant donner un résultat plus complet, qui en plus n'exige pas l'introduction du domaine complexe (Doetsch [4]). Supposons tout de suite que  $u$  s'annule sur les droites  $g_1$  et  $g_2$ , à quoi on peut toujours arriver par une soustraction de solutions appropriées. Si l'unicité de  $u$  et la possibilité de lui appliquer la formule (1, 23) sont assurées et si  $u$  peut être reconstituée dans le temps jusqu'au temps négatif  $-y_0$ , alors l'ancienne température initiale  $\Phi(x)$  pour  $y = 0$  doit se laisser déduire de la température  $u(x, -y_0)$  au moment  $-y_0$ , par la formule

$$\Phi(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi, y_0) u(\xi, -y_0) d\xi.$$

Si  $\Phi(x)$  est donnée, c'est une équation intégrale de Fredholm de première espèce pour  $u(x, -y_0)$  et nous en tirons le résultat suivant:

La température ne peut être reconstituée dans un passé antérieur à l'état initial  $\Phi(x)$  que si  $\Phi(x)$  est une fonction analytique, entière et périodique de période  $2l$  avec  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  et  $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$ . Si on la développe en série de Fourier (convergente absolument et uniformément) de la forme

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \nu \pi \frac{x}{l},$$

alors la température peut être reconstituée sans singularités pour des  $y = -y_0$  négatifs aussi loin que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left( e^{\nu^2 \pi^2 \frac{y_0}{l^2}} a_{\nu} \right)^2 \quad (7, 31)$$

reste convergente. Si  $Y$  est la coupure entre les  $y_0$  de la convergence et de la divergence alors on obtient l'état de température pour  $0 < y_0 < Y$  par la série de Fourier convergente absolument et uniformément en  $x$ :

$$u(x, -y_0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} e^{\nu^2 \pi^2 \frac{y_0}{l^2}} \sin \nu \pi \frac{x}{l}. \quad (7, 32)$$

Si  $Y$  est une valeur pour laquelle la série (7, 31) converge encore, alors la série (7, 32) représente pour  $y_0 = Y$  la valeur  $u(x, -Y)$  au moins dans le sens de la convergence en moyenne.

4. — La reconstitution dans le passé de la température dans un *fil infiniment long des deux côtés* est d'intérêt particulier et cela à cause de ses applications pratiques multiples. APPELL [1] s'en est occupé en 1892, mais sans aller très loin. Si l'on ne considère que des fonctions pour lesquelles on peut employer la formule de solution de Poisson (5, 1), alors le problème est équivalent à la résolution de l'équation intégrale singulière

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_0}} u(\xi, -y_0) d\xi. \quad (7, 4)$$

Ce problème revient évidemment à une *décomposition spectrale* de la fonction  $\Phi(x)$  en *courbes de Gauss*  $\frac{1}{2\sqrt{\pi y_0}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_0}}$  (maximum toujours en  $\xi$ , mesure de précision  $\frac{1}{y_0}$ ), et cela explique que le même problème se pose souvent dans le calcul des probabilités, en statistique, en physique, etc. Moi-même, j'étais amené à cette question par un problème de l'analyse spectrale (Doetsch [7]) et j'ai obtenu la solution, à partir de la solution pour un intervalle fini, par un passage à la limite peut-être assez audacieux. On obtient le même résultat si l'on remarque que l'équation intégrale (7, 4) est du « type de composition » (Faltungstypus) et admet par conséquent la transformation de Laplace ou celle de Fourier (voir DOETSCH [13]). Plus tard, P. LÉVY [1] s'est occupé de ce problème surtout du point de vue de la théorie des probabilités et sans tenir compte, semble-t-il, des recherches mentionnées plus haut; ses résultats ne sont, d'ailleurs, pas encore définitifs.

On pourrait encore dire beaucoup de choses sur les solutions dans un intervalle infini d'un ou de deux côtés et montrer quelques problèmes importants qui ne sont pas encore résolus. Je dois ici m'en abstenir et réserver ce sujet pour une autre occasion.