

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE
Autor: Doetsch, Gustav
Kapitel: V. — Le caractère analytique des solutions.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27305>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La solution de ce problème s'écrit ainsi:

$$u(x, y) = [\vartheta_3(0, y) + 1] * \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right),$$

et l'identification des deux expressions pour u donne la relation

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right) * [\vartheta_3(0, y) + 1] + \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x} * [2y \vartheta_3(0, y) + 1] = 0.$$

Pour $x \rightarrow 0$ cette relation se transforme en une équation intégrale pour $\vartheta_3(0, y)$:

$$\vartheta_3(0, y) * [\vartheta_3(0, y) + 1] - 2y \vartheta_3(0, y) - 1 = 0$$

indiquée par F. BERNSTEIN (Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 1920, pp. 735-747). Pour d'autres exemples et pour une autre méthode de gagner de telles relations transcendantes par des transformations fonctionnelles, voir Doetsch [11].

V. — LE CARACTÈRE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS.

1. — WEIERSTRASS [1] a montré en 1885 que la solution dans le demi-plan $y > 0$ de l'équation (1,21) de la chaleur avec les valeurs $\Phi(x)$ sur la frontière $y = 0$, représente sur chaque horizontale une fonction entière analytique en x . Plus explicitement: La solution donnée par la formule classique de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x - \xi, y) \Phi(\xi) d\xi, \quad (5, 1)$$

où χ désigne la fonction (3,331), a cette propriété. A cause de nos expériences sur la multiplicité des solutions nous nous trouvons obligés de nous servir de cet énoncé plus prudent. Weierstrass établit la même propriété pour la solution (1,23), si les températures $A(y)$ et $B(y)$ s'annulent.

Holmgren montra en 1905 ([1] et plus explicitement dans [3]) qu'une solution *régulière* (voir p. 50) de (1,21) représente sur

chaque horizontale une *fonction analytique de x*; d'une manière plus précise: soit $u(x, y)$ une solution de (1,21), régulière dans un domaine \mathfrak{D} et supposons le segment $x = x_0$, $a \leq y \leq b$ entièrement intérieur à \mathfrak{D} . Alors, dans un certain rectangle

$$|x - x_0| < d, \quad a \leq y \leq b$$

u est développable en série de puissances

$$u(x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v(y)}{v!} (x - x_0)^v.$$

Cette série a donc sur chaque horizontale $y = \text{const.}$ un rayon de convergence égal au moins à d .

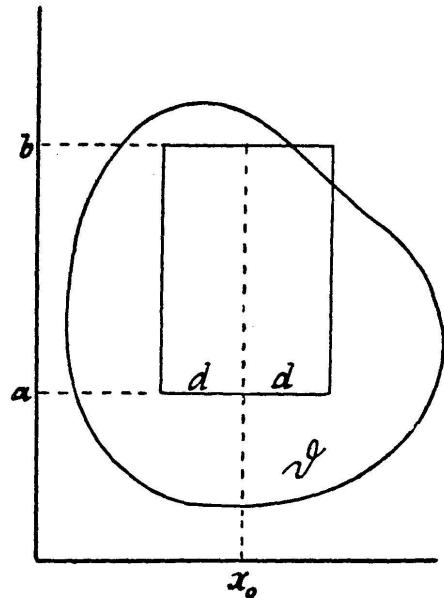


Fig. 4.

2. — Holmgren [1] donna à ce résultat une interprétation inattendue et très importante. Tout d'abord, comme toutes les dérivées par rapport à x existent, il découle de $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que toutes les dérivées par rapport à y existent aussi et satisfont aux relations:

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Puisqu'on a

$$c_v(y) = \left. \frac{\partial^v u}{\partial x^v} \right|_{x=x_0},$$

il en résulte: En posant

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

on trouve

$$c_{2n}(y) = \varphi^{(n)}(y), \quad c_{2n+1}(y) = \varphi_1^{(n)}(y)$$

de façon que la solution a la même forme que pour le problème de Cauchy dans le cas analytique connu:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(y)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(y)}{(2n+1)!} (x - x_0)^{2n+1}. \quad (5, 21)$$

D'après les inégalités de Cauchy pour les coefficients on a

$$\frac{|c_n|}{n!} \leqq \frac{M}{d^n},$$

où M est la borne supérieure de u dans le rectangle, et par conséquent

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leqq M \frac{(2n)!}{d^{2n}}, \quad |\varphi_1^{(n)}(y)| \leqq M \frac{(2n+1)!}{d^{2n+1}}. \quad (5, 22)$$

Cela signifie qu'une solution régulière représente sur chaque segment *vertical* entièrement intérieur au domaine de régularité, une fonction $\varphi(y)$ *dérivable un nombre illimité de fois et dont les dérivées admettent les majorantes* (5,22), avec les valeurs M et d indépendantes de y . (La même chose a lieu pour $\frac{\partial u}{\partial x}$).

3. — Les remarques suivantes se rattachent immédiatement à ce dernier fait:

1. A côté de l'inégalité (5,22) pour $\varphi^{(n)}(y)$ on envisagera celle pour les dérivées d'une fonction *analytique* $f(y)$:

$$|f^{(n)}(y)| \leqq M \frac{n!}{\rho^n}. \quad (5, 31)$$

Mais une fonction pour laquelle (5,22) est valable, n'est pas nécessairement analytique et même pas, comme l'on pourrait croire, *quasi-analytique* dans le sens de Carleman. Car alors ses valeurs sur un petit intervalle devraient définir d'une manière univoque la répartition de ses valeurs partout. Or la solution (3,61) nous montre qu'en général ce n'est pas le cas pour φ . C'est que, si nous remplaçons $A(y)$ pour $y > y_0$ par une autre fonction, u conserve bien sa valeur pour $0 < y \leqq y_0$, mais ne la conserve pas pour $y > y_0$.

2. Les deux inégalités (5,22) et (5,31) conduisent à envisager d'une manière plus générale (Holmgren [3]) des fonctions $f(z)$, dérivables une infinité de fois dans un intervalle et satisfaisant dans cet intervalle à l'inégalité

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{\Gamma(\alpha n + 1)}{r^n},$$

qui est équivalente à

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{(n!)^\alpha}{r^n},$$

avec $\alpha \geq 1$. Gevrey ([1], chap. III, et [2]) appelle ces fonctions *fonctions H de la classe α* . A l'exception de la classe $\alpha = 1$, qui donne les fonctions analytiques, elles ne sont pas même quasi-analytiques, comme nous le montre l'exemple

$$f(z) = \int_0^z \Phi(\eta) e^{-\frac{1}{(z-\eta)^\beta}} d\eta \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(Holmgren [3], p. 5).

3. Gevrey [2] a étendu la notion de classe pour des *fonctions à un nombre arbitraire de variables*. Après que E. E. Levi ([3], § 9) eut démontré pour l'équation non homogène de la chaleur que z restait analytique en x au voisinage d'un point où $f(x, y)$ était analytique en x , Gevrey [2] montra pour l'équation linéaire la plus générale et d'autres équations très générales que, en gros, les propriétés de classe de l'équation se transmettaient aussi aux solutions. Ce serait trop long de vouloir reproduire ici ces résultats d'une très grande portée.

VI. — L'EXISTENCE DE LA SOLUTION.

Un théorème d'unicité énonce seulement qu'il y a *au plus* une solution. C'est un théorème d'existence qui doit décider si *en vérité* il y en a une.

Le problème de Cauchy.

Dans le cas *analytique* l'existence de la solution est toujours assurée, mais c'était un des premiers résultats des travaux