

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	35 (1936)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE
<b>Autor:</b>	Doetsch, Gustav
<b>Kapitel:</b>	III. — La question d'unicité ou de multiplicité DES SOLUTIONS.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-27305">https://doi.org/10.5169/seals-27305</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

boliques concernant l'existence des solutions dans le cas d'une non-intégrabilité des valeurs sur la frontière ni sur l'interprétation possible des conditions aux limites dans ce cas. Les démonstrations de l'unicité nécessitent surtout une série d'hypothèses sur les solutions et sur certaines dérivées, hypothèses comme l'intégrabilité à une ou deux dimensions, continuité, etc. Ce sont toutes des hypothèses étrangères à la nature du problème qui, par conséquent, doivent être chaque fois nettement explicitées<sup>1</sup>.

**3.** — L'on voit alors ceci: Pour que le problème soit clairement posé il est indispensable d'une part de préciser quelles conditions on impose à la solution et aux valeurs sur la frontière, de fixer d'autre part le sens dans lequel les conditions aux limites doivent être interprétées.

Il est à regretter qu'une partie même de la littérature moderne, pour ne plus parler de la plus ancienne, reste extrêmement vague sous ce rapport. Ceci entraîne d'une part que les théorèmes et démonstrations sont faux eux-mêmes, d'autre part que des théorèmes, justes sous certaines restrictions, sont employés dans des cas où ces restrictions ne sont pas respectées. Ce sont surtout les démonstrations d'unicité qui montrent la gravité décisive du sens dans lequel on envisage le problème aux limites.

### III. — LA QUESTION D'UNICITÉ OU DE MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS.

**1.** — Dans les ouvrages parus avant 1925 on ne voit nulle part surgir un doute sur l'unicité de la solution des équations paraboliques<sup>2</sup>, on y trouve, au contraire, une série de démonstrations du fait que la solution, si elle existe, est bien unique; ainsi

<sup>1</sup> Dans le cas de l'énoncé particulier du problème on a l'habitude d'appeler *régulières* les solutions de l'équation (1,1) qui sont, ainsi que leurs dérivées  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ , continues dans le domaine plus la frontière.

<sup>2</sup> Seul M. É. Picard indiquait à l'occasion (*Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences*, Paris, 1905), sans d'ailleurs insister, que si l'on envisageait la propagation de la chaleur dans un conducteur illimité l'on devait, pour démontrer l'unicité, admettre des hypothèses sur l'allure à l'infini de la fonction et de ses dérivées. Mais c'est plutôt le fait qu'un cas limite exige des considérations particulières, qui est souligné ici.

Holmgren (*Öfversikt af K. Vet. Akad. Förhandlingar*, 1901, pp. 91-103) le démontra pour l'énoncé particulier du *problème de Cauchy* dans le cas non analytique. Mais nous ne voulons pas insister ici sur le problème de Cauchy.

2. — Pour un *problème aux limites* — et nous en reparlerons dans VI — les valeurs de  $z$  sont données sur un contour ouvert  $\mathfrak{C}$ , composé de deux courbes  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$  à gauche et à droite, dont les points extrêmes inférieurs  $A_1, A_2$  ou supérieurs  $B_1, B_2$  se trouvent à égale hauteur, et d'un segment de caractéristique  $\mathfrak{K}$ , qui relie les points extrêmes inférieurs ou supérieurs. Dans les cas considérés dans la suite  $\mathfrak{K}$  se trouve en bas. Le problème consiste à déterminer  $z$  dans les points « entre  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$  », c'est-à-dire dans les points intérieurs au domaine délimité par  $A_1 A_2 B_2 B_1 A_1$  et dans les points de  $B_1 B_2$  lui-même. Soit  $\mathfrak{B}$  l'ensemble de ces points.

L'on connaît trois types de démonstration de l'unicité que je ne citerai pas dans l'ordre historique, mais dans l'ordre de leur simplicité. (J'omets ici le type le plus primitif de démonstration qui part de la représentation effective de la solution par ses valeurs sur la frontière, représentation sous forme d'une intégrale; j'en parlerai à l'occasion dans VI, 3).

1. *Démonstration<sup>1</sup> de Gevrey* ([1], n° 18). — Elle s'applique dans certains cas à l'équation parabolique linéaire générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = f(x, y) . \quad (3, 21)$$

Nous envisageons d'abord l'équation homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 . \quad (3, 22)$$

Supposons que  $u$  satisfait à l'équation dans  $\mathfrak{B}$  et soient  $u$  continue dans  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  continues dans  $\mathfrak{B}$ ; pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  il suffira de

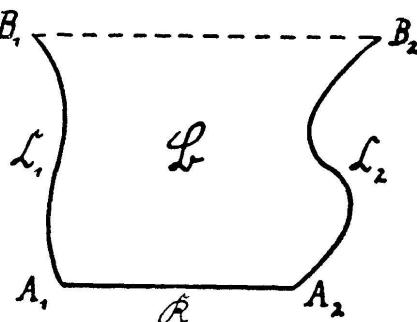


Fig. 1.

<sup>1</sup> La démonstration de Picone [1] qui se sert aussi de la méthode de Gevrey, est du même type.

supposer l'existence dans  $\mathfrak{B}$ . Considérons les *deux cas particuliers* suivants:

a) Soient dans  $\mathfrak{B}$ :

$$b(x, y) \leq 0, \quad c(x, y) < 0.$$

Alors  $u$  ne peut pas prendre de maximum positif ( $> 0$ ) dans  $\mathfrak{B}$ . (Cela exprime en un point  $(x_0, y_0)$  de  $B_1B_2$  que les inégalités  $u(x_0, y_0) > 0$  et  $u(x_0, y_0) \geq u(x, y)$  ne peuvent pas être satisfaites pour les points voisins avec  $y \leq y_0$ ). Si c'était le cas en un point  $P$  de  $\mathfrak{B}$ , la considération des sections  $y = \text{const.}$  et  $x = \text{const.}$  nous montrerait qu'on aurait nécessairement en  $P$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$$

et, si  $P$  ne se trouve pas sur  $B_1B_2$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$

si  $P$  se trouve sur  $B_1B_2$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} \geq 0$

et, par conséquent, dans tous les cas:  $b \frac{\partial u}{\partial y} \leq 0.$

En plus, nous avons en  $P$

$$cu < 0.$$

L'équation (3,22) ne pourrait alors pas être satisfaite.

Cependant, en raison de sa continuité,  $u$  doit avoir un maximum absolu dans le domaine fermé  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ . Par conséquent, ce maximum sera  $\leq 0$  s'il est atteint dans  $\mathfrak{B}$ , ou bien il sera atteint sur  $\mathfrak{C}$ .

Un raisonnement analogue nous montre que  $u$  ne peut pas avoir de minimum négatif ( $< 0$ ) dans  $\mathfrak{B}$ , et que, par conséquent, ce minimum sera  $\geq 0$  s'il est atteint dans  $\mathfrak{B}$ , ou bien qu'il sera atteint sur  $\mathfrak{C}$ .

Supposons maintenant que l'équation non homogène (3, 21) ait deux solutions différentes  $z_1, z_2$ , qui prennent la même valeur sur la frontière  $\mathfrak{C}$  et ceci dans le sens particulier que « la fonction plus la valeur sur la frontière » est continue dans  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ , que leurs premières dérivées sont continues dans  $\mathfrak{B}$ , tandis que de  $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}$  on ne suppose que l'existence dans  $\mathfrak{B}$ . La différence

$u = z_1 - z_2$  satisfait alors à l'équation homogène (3, 22) et aux conditions posées plus haut, elle a en plus sur la frontière la valeur zéro, de façon que le maximum absolu ne peut être que  $\geq 0$ . Mais alors il découle du résultat énoncé plus haut que ce maximum est égal à zéro. La même chose peut être prouvée pour le minimum absolu. Par conséquent nous avons  $u \equiv 0$ , c'est-à-dire  $z_1 \equiv z_2$ .

b) Soient dans  $\mathfrak{B}$ :

$$b(x, y) \leqq B < 0, \quad 0 \leqq c(x, y) \leqq C.$$

(L'équation de la chaleur appartient à ce type). Par la substitution

$$z(x, y) = e^{Ky} \zeta(x, y) \quad (K = \text{const.})$$

l'équation (3, 21) se transforme en une équation en  $\zeta$ , qui ne se distingue de la première que par le fait que le coefficient de  $\zeta$  est maintenant égal à  $c + Kb$ . D'après les hypothèses sur  $b$  et  $c$ , l'on peut choisir  $K$  assez grand pour que cette fonction soit négative dans  $\mathfrak{B}$ , de façon que la déduction de a) est applicable à  $\zeta$ . Mais si, les valeurs sur la frontière étant données, il n'y a qu'une seule solution  $\zeta$ , il n'existe de même qu'une seule solution  $z$  de l'équation primitive avec les valeurs correspondantes sur la frontière.

2. *Démonstration de Poincaré* ([1], pp. 27-30) pour l'équation de la chaleur (1, 22). (Cette démonstration est peut-être plus ancienne, on la trouve dans beaucoup de traités sur les équations aux dérivées partielles de la physique). Poincaré envisage l'équation pour la demi-bande (voir p. 45), mais on peut aussi considérer une frontière plus générale, comme sur p. 51, si l'on suppose que les courbes  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$  sont représentables par deux fonctions univoques et dérivables

$$\mathfrak{C}_1 : x = \gamma_1(y) \quad \mathfrak{C}_2 : x = \gamma_2(y).$$

Supposons que l'équation non homogène (1, 22) ait deux solutions différentes pour des valeurs données sur la frontière. Alors l'équation homogène (1, 21) a une solution  $u(x, y)$  non identiquement nulle, prenant sur la frontière les valeurs zéro.

Je reproduis d'abord la démonstration usuelle et en m'abstenant de remarques.

Envisageons l'intégrale

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u^2(x, y) dx , \quad (a)$$

étendue sur un segment de caractéristique qui fait partie de  $\mathfrak{B}$ . Alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dy} &= \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{1}{2} u^2(\gamma_2(y), y) \frac{d\gamma_2}{dy} - \frac{1}{2} u^2(\gamma_1(y), y) \frac{d\gamma_1}{dy} \\ &= \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial u}{\partial y} dx . \end{aligned} \quad (b)$$

En vertu de l'équation différentielle (1, 21) on a

$$\frac{dJ}{dy} = \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} - \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (c)$$

et par conséquent

$$\frac{dJ}{dy} \leqq 0 . \quad (d)$$

Avec  $y_0$  ordonnée de  $A_1$  et de  $A_2$ , on a  $u(x, y_0) = 0$  et de ce fait

$$J(y_0) = 0 ; \quad (e)$$

donc il découle de (d) et (e):

$$J(y) \leqq 0 , \quad (f)$$

tandis que, par définition, on a  $J(y) \geqq 0$ . Donc on doit avoir  $J(y) \equiv 0$ , de façon que  $u$ , si elle est continue, est identiquement nulle.

Cette démonstration se sert en réalité d'un si grand nombre d'hypothèses qu'il est difficile de les énumérer toutes. L'intégrale (a) existe certainement si  $u$  se raccorde d'une façon continue — au moins dans la direction des  $x$  — avec les valeurs sur la frontière, puisque à l'intérieur  $u$  est en tous cas continue dans la direction des  $x$  en vertu de l'existence de  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Cependant (b) exige que  $J$

soit *dérivable* et encore que  $\frac{dJ}{dy}$  puisse être obtenue par la règle connue. (c) présuppose que, si  $(x, y)$  se déplace horizontalement vers la frontière, non seulement  $u$  mais aussi  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  tende vers zéro (par exemple que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  reste bornée sur ce chemin; Gevrey a montré ([2], chap. III) que ceci n'est, en général, pas le cas). Pour autoriser le passage de (d) et (e) à (f), J devrait être *continue pour*  $y_0$  ou, en d'autres termes, l'on devrait à la place de  $J(y_0)$  envisager la limite vers laquelle J tend pour  $y \rightarrow y_0$ . Or, le fait que  $u^2$  tende vers zéro si l'on s'approche d'un point quelconque de  $\mathfrak{R}$ , n'entraîne nullement que aussi  $\int u^2 dx$  tende alors vers zéro. Ceci signifierait que  $u$  converge vers zéro « en moyenne » et cela nécessiterait des hypothèses, par exemple que  $u$  converge vers zéro uniformément en  $x$  pour  $y \rightarrow y_0$  ou bien, d'après Arzelà, que  $u$  reste bornée dans le voisinage de  $\mathfrak{R}$ . Nous verrons plus tard, à quel point ces hypothèses sont indispensables pour la validité de la démonstration.

3. *Démonstration de Volterra* ([1], p. 64) pour l'équation de la chaleur, plus développée chez E. E. Levi ([3], p. 190). Cette démonstration se base sur la transformation connue de Green d'une intégrale de surface en intégrale prise le long d'un contour, transformation dont on se sert beaucoup dans d'autres domaines des équations aux dérivées partielles. Les conditions sous lesquelles la démonstration est juste ne sont point indiquées par Volterra. Levi indique soit-disant toutes les hypothèses employées, mais il en néglige une et cela, comme nous verrons, précisément la plus décisive. Son théorème s'énonce ainsi: Soit  $\mathfrak{C}$  un arc de courbe dont les points extrêmes A et B se trouvent à la même hauteur; supposons cet arc placé entièrement au-dessous de AB et tel que les parallèles aux axes aient au plus deux points communs avec l'arc. Soit  $\mathfrak{B}$  l'ensemble de points intérieurs à  $\mathfrak{C} + AB$  et du segment AB lui-même et suppo-

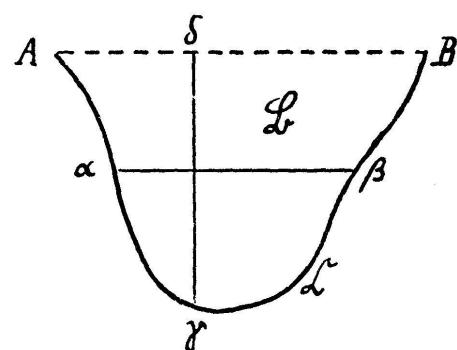


Fig. 2.

sons que la fonction  $u$  satisfait aux conditions suivantes :

- a)  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$  sont continues dans  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ <sup>1</sup>,
- b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  est dans  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$  linéairement intégrable par rapport à  $x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  est dans  $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$  linéairement intégrable par rapport à  $y$ ,
- c)  $u$  satisfait dans  $\mathfrak{B}$  à l'équation (1, 21),
- d)  $u$  a la valeur zéro sur  $\mathfrak{C}$ .

Alors on a  $u \equiv 0$  dans  $\mathfrak{B}$ .

Les transformations dont la démonstration se sert s'écrivent ainsi (voir fig. 2); de plus b) entraîne que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy &= \int dy \int_{\alpha}^{\beta} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int dy \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \\ &= - \iint_{\mathfrak{B}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

en vertu de a) et d);

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} u \frac{\partial u}{\partial y} dx dy &= \int dx \int_{\gamma}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \int dx \left\{ u^2(\delta) - u^2(\gamma) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int u^2(\delta) dx = \frac{1}{2} \int_{AB} u^2 dx \end{aligned}$$

en vertu de d), et par conséquent

$$\iint_{\mathfrak{B}} u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{\mathfrak{B}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{AB} u^2 dx .$$

Le premier membre s'annulant en vertu de c), les deux intégrales du second membre doivent être nulles elles aussi, donc  $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$  en vertu de sa continuité et par conséquent  $u = \text{const.} = 0$ .

<sup>1</sup> Remarquons que l'existence de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  sur la frontière est ici admise.

L'on constate immédiatement que la continuité à deux dimensions de  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$  n'est point utilisée pour l'évaluation de l'intégrale; *il suffit ici que le raccord de  $u$  avec les valeurs sur la frontière soit continu dans la direction des  $x$  et des  $y$  et que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  reste bornée si l'on s'approche de la frontière dans la direction des  $x$ .* Par contre l'on admet *l'hypothèse essentielle qui n'est pas exprimée*, que  $\frac{\partial u}{\partial y}$  ou, ce qui revient au même,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , *sont dans  $\mathfrak{B}$  intégrables à deux dimensions.* Si  $u$  n'était supposée continue qu'à une dimension dans la direction des  $x$  et des  $y$ , ce qui est possible dans cette démonstration, l'on devrait même exiger que  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  soient de carré intégrable à deux dimensions.

3. — Je ne veux pas m'arrêter ici à tirer des démonstrations précédentes tout ce qui pourrait servir à établir un théorème aussi général que possible<sup>1</sup>; je veux plutôt résumer ici mes remarques sur les trois types de démonstration:

La première démonstration est entièrement adaptée à l'énoncé « particulier » du problème; la seconde et la troisième peuvent être employées aussi pour l'énoncé « général », mais nécessitent alors toute une série d'hypothèses fondamentales. Le soupçon s'impose alors que *la solution du problème « général » n'est pas unique* si les hypothèses ne sont pas très étroites. Et, en effet, il en est ainsi! Pour le montrer il suffit que pour une simple équation, comme l'équation homogène de la chaleur (1, 21) et pour un simple domaine comme la demi-bande ou un quart du plan qui est une demi-bande dégénérée, nous donnions l'exemple d'une fonction-solution qui tende vers zéro si l'on s'approche de la frontière normalement, sans être cependant identiquement nulle. J'appellerai de telles fonctions « *solutions singulières* ».

1. Dans le quart du plan  $x > 0, y > 0$  la fonction

$$\psi(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (3, 311)$$

<sup>1</sup> J'en reparlerai à une autre occasion.

a cette propriété. Elle remplace dans le quart du plan la fonction de Green  $G(x, y)$  de (1, 24). Cette solution possède même une signification physique: elle représente la distribution de température qu'on obtient si l'on apporte en un temps extrêmement court une quantité finie de chaleur à l'extrémité  $x = 0$  du fil (explosion de chaleur). Mais ce n'est pas seulement cette solution qui possède la propriété demandée, toutes ses dérivées partielles par rapport à  $y$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}, \dots \quad (3, 312)$$

l'ont aussi (Doetsch [3], p. 304). De ces fonctions l'on peut à nouveau déduire une infinité de solutions singulières: si l'on pose, par exemple,

$$u(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y - y_0) & \text{pour } y > y_0 > 0, \\ 0 & \text{pour } 0 < y \leq y_0, \end{cases} \quad (3, 313)$$

$u$  tend encore vers zéro si l'on s'approche normalement des frontières du quart du plan et l'équation différentielle est satisfait dans tout l'intérieur et aussi sur la droite  $y = y_0$ .

2. Dans la *demi-bande*  $0 < x < l$ ,  $y > 0$  la fonction

$$G(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(x + 2nl, y) \quad (3, 321)$$

connue de (1,24), ainsi que ses dérivées partielles par rapport à  $y$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 G}{\partial x^4}, \dots \quad (3, 322)$$

possèdent la propriété analogue (Doetsch [3], p. 299), comme d'ailleurs aussi toutes les fonctions formées à partir de ces solutions d'après le schéma suivant

$$u(x, y) = \begin{cases} G(x, y - y_0) & \text{pour } y > y_0 > 0, \\ 0 & \text{pour } 0 < y \leq y_0 \end{cases} \quad (3, 323)$$

(Doetsch [4], p. 612). Toutes ces solutions peuvent être interprétées comme distributions de température, créées par des explosions de chaleur (Doetsch [3], p. 301). — De même

$$G(l - x, y) \quad (3, 324)$$

et les fonctions qui en peuvent être déduites de la manière indiquée plus haut sont des solutions singulières.

3. Les mêmes relations se présentent aussi pour des *problèmes aux limites d'un autre genre*, par exemple pour ceux où intervient la valeur de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  sur la frontière: la fonction

$$\chi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (3, 331)$$

satisfait dans le quart du plan à l'équation (1, 21) et tend vers zéro si l'on s'approche normalement de la frontière inférieure, tandis que  $\frac{\partial \chi}{\partial x}$  tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à gauche. Les dérivées par rapport à  $y$  de cette fonction se comportent de la même façon.

La fonction

$$\mathfrak{Z}_3\left(\frac{x}{2}, y\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(x + 2n, y) \quad (3, 332)$$

dans la demi-bande  $0 < x < 1, y > 0$  tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière inférieure, tandis que sa dérivée par rapport à  $x$  tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à gauche et à droite.

La fonction

$$-\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{Z}_2\left(\frac{x}{2}, y\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \psi(x + 2n, y) \quad (3, 333)$$

dans la demi-bande  $0 < x < 1, y > 0$  tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière inférieure et de la frontière à gauche, tandis que sa dérivée par rapport à  $x$  tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à droite (Doetsch [9], pp. 333, 338).

4. Il existe encore un *type tout à fait différent* de solutions singulières. Supposons donnée la demi-bande de largeur  $l$  et établissons la fonction de Green correspondante à (1, 24) d'abord pour l'intervalle  $0 \leq x \leq \frac{l}{n}$  ( $n$  étant un nombre entier positif).

Soit  $G\left(x, y, \frac{l}{n}\right)$  cette fonction de Green et posons

$$u(x, y) = \begin{cases} G\left(x, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{n} \\ -G\left(\frac{2l}{n} - x, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } \frac{l}{n} \leq x \leq 2\frac{l}{n} \\ G\left(x - \frac{2l}{n}, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } 2\frac{l}{n} \leq x \leq 3\frac{l}{n} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3, 34)$$

$u$  représente simplement le prolongement analytique de  $G$  dans la direction des  $x$ . Cette fonction ainsi que ses dérivées  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  sont continues sur les droites  $x = v \frac{l}{n}$  et satisfait même sur ces droites à l'équation (1, 24). Elle tend vers zéro quand on se rapproche d'une frontière quelconque de la demi-bande. Pour  $n = 2$  elle est simplement une combinaison linéaire de solutions singulières précitées, à savoir  $u(x, y) = G(x, y) - G(l - x, y)$ , ce qui n'est plus le cas pour  $n > 2$ .

Je voudrais ici faire la remarque que pour le *problème de Cauchy* je ne connais pas d'exemple réfutant l'unicité dans le cas de l'énoncé « général ».

4. — Il est très intéressant d'examiner ici de quelle façon les *démonstrations d'unicité* tombent en défaut en face de ces exemples, disons de la fonction  $G$ . La *première démonstration* (de Gevrey) n'entre pas en ligne de compte puisque, dans la demi-bande fermée,  $G(x, y)$  n'est pas continue et même pas bornée : dans le voisinage du sommet  $x = 0, y = 0$  cette fonction se comporte comme  $\psi(x, y)$  et peut, par conséquent, y prendre des valeurs positives arbitrairement petites et arbitrairement grandes.

L'intégrale  $J(y)$  employée dans la *seconde démonstration* (de Poincaré) prend dans le cas  $u \equiv G(x, y)$  et  $l = 1$  la valeur

$$J(y) = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n^2 \pi^2 y}.$$

Il est vrai que cette expression est dérivable pour  $y > 0$  et que la dérivée est constamment négative, mais pour  $y \rightarrow 0$  elle ne tend point vers zéro mais vers  $\infty$  (Doetsch [3], p. 300).

L'exemple (3,323) nous montre qu'il ne suffit point d'admettre que  $J \rightarrow 0$  pour  $y \rightarrow 0$ , de sorte par exemple que  $u(x, y)$  tende uniformément vers zéro en  $x$  pour  $y \rightarrow 0$ . Dans cet exemple cette condition est évidemment satisfaite, tandis que  $J$  n'est pas dérivable pour  $y = y_0$ , étant de la forme

$$J(y) = \begin{cases} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n^2\pi^2(y-y_0)} & \text{pour } y > y_0, \\ 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq y_0 \end{cases}$$

de façon que la règle exprimée dans (b), p. 54, n'est pas applicable non plus<sup>1</sup>.

*La troisième démonstration* (de Levi) semble être applicable à  $G(x, y)$  puisque la condition *a*), comme nous l'avons indiqué plus haut, n'intervient pas en toute sa rigueur dans la démonstration et n'y est employée que dans une mesure qui est satisfaite pour  $G$ . Mais  $G$  ne satisfait pas à la condition négligée par Levi, celle qui

exige que  $\frac{\partial u}{\partial y}$  soit intégrable à deux dimensions dans le domaine!

Il semble être une ironie du destin que Levi lui-même ait démontré dans le même mémoire ([3], p. 229) que  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  n'est pas intégrable, ce qui entraîne immédiatement la non intégrabilité de  $\frac{\partial G}{\partial y}$ .

5. — Le procédé par lequel j'ai trouvé ces solutions singulières vaut peut-être la peine d'être mentionné, parce qu'il donne la possibilité de les trouver toutes. Il fut déduit à l'occasion de l'étude d'une nouvelle *méthode d'intégration d'équations aux dérivées partielles* dans une demi-bande, méthode bien adaptée précisément à l'énoncé « général » (Doetsch [1, 2, 3, 4, 8, 9]).

<sup>1</sup> Pour cette même raison la démonstration de Thum, qui opère avec des intégrales de Lebesgue et des fonctions de carré intégrable, tombe en défaut (v. Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen. *Crellesches Journal*, 168 (1932), pp. 65-90, § 1).

Elle emploie la transformation de Laplace

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sy} F(y) dy \equiv \mathcal{L}\{F\}$$

et sa propriété fondamentale

$$\mathcal{L}\{F'\} = s\mathcal{L}\{F\} - F(0), \quad (3, 51)$$

où  $F(0)$  représente la valeur limite de  $F$  pour  $y \rightarrow +0$ . Si l'on applique cette transformation par rapport à la variable<sup>1</sup>  $y$

aux « fonctions objet »  $u(x, y)$  qui pourraient être solutions de l'équation différentielle, on leur fait correspondre certaines « fonctions résultat »  $v(x, s)$ :

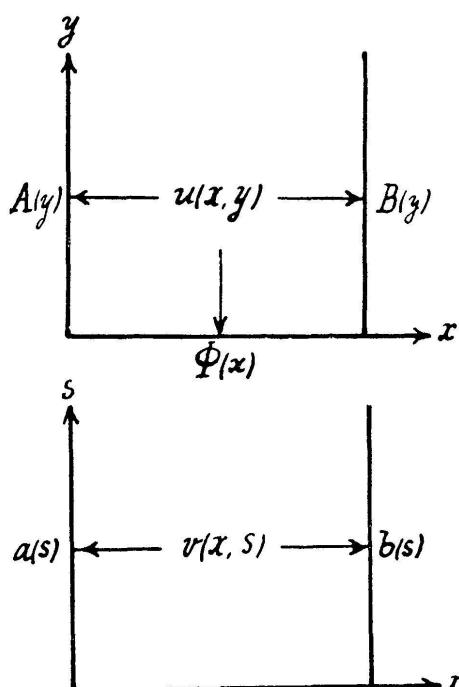


Fig. 3.

$$\mathcal{L}\{u(x, y)\} = v(x, s),$$

et l'équation aux dérivées partielles (1, 21) se transforme suivant (3, 51) en une équation différentielle *ordinaire* en  $v$ :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - sv + \Phi(x) = 0, \quad (3, 52)$$

dans laquelle la *condition initiale*  $\Phi(x)$  est introduite et où  $s$  joue le rôle d'un paramètre. Ce sont les deux caractères essentiels de la méthode<sup>2</sup>. Les fonctions sur la frontière  $A(y)$  et  $B(y)$  se transforment en les deux valeurs de  $v$  sur la frontière

$$v(0, s) \equiv a(s) = \mathcal{L}\{A\}, \quad v(l, s) \equiv b(s) = \mathcal{L}\{B\}.$$

<sup>1</sup> Qui parcourt dans notre problème justement l'intervalle infini  $0 < y < \infty$ .

<sup>2</sup> Cette méthode s'applique évidemment à toutes les équations linéaires dont les coefficients de la partie homogène ne dépendent que de  $x$  et non pas de  $y$ . Elle donne entre autres une justification rigoureuse de ce qu'on appelle calcul symbolique de Heaviside (Doetsch [10]). On peut de même employer une autre méthode qui transforme les équations par rapport à la variable  $x$  et qui est adaptée à un intervalle fini. Alors les coefficients peuvent dépendre de  $y$  (Doetsch [12]).

A propos du calcul de Heaviside voir *L'Ens. mathématique*, XXXIII, 1934, p. 118.

Si nous prenons en particulier

$$\Phi(x) \equiv 0, \quad B(y) \equiv 0$$

et par conséquent aussi  $b(s) \equiv 0$ , alors la solution de (3,52) est la suivante:

$$\varphi(x, s) = a(s) g(x, s) \quad \text{avec} \quad g(x, s) = \frac{\sin(l-x)\sqrt{s}}{\sin l\sqrt{s}}. \quad (3, 53)$$

La solution de l'équation initiale aux dérivées partielles sera trouvée si l'on peut déterminer inversement la fonction objet de cette fonction résultat. On sait que  $A(y)$  correspond à  $a(s)$ ,  $G(x, y)$  à  $g(x, s)$  et qu'au produit de deux fonctions résultat  $f_1(s)$  et  $f_2(s)$  correspond ce que nous appelons la *composition* (Faltung)

$$F_1 * F_2 \equiv \int_0^y F_1(\eta) F_2(y - \eta) d\eta$$

des fonctions objet:

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

A (3,53) correspond alors la fonction objet

$$u(x, y) = A(y) * G(x, y). \quad (3, 54)$$

C'est la solution connue (1,23) pour  $\Phi = B = 0$ .

Maintenant intervient le raisonnement suivant (Doetsch [3], p. 298; [8], p. 75). La méthode repose évidemment sur *deux hypothèses essentielles*:

1. Il est supposé que

$$a(s) = \mathfrak{L}\{A\} \quad \text{et} \quad b(s) = \mathfrak{L}\{B\}$$

sont les valeurs sur la frontière de  $\varphi$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathfrak{L}\{u\} = \mathfrak{L}\left\{\lim_{x \rightarrow 0} u\right\}, \quad \lim_{x \rightarrow l} \mathfrak{L}\{u\} = \mathfrak{L}\left\{\lim_{x \rightarrow l} u\right\}, \quad (3, 55)$$

c'est-à-dire que *les valeurs sur la frontière des fonctions transformées sont les transformées des valeurs sur la frontière* (ou, en d'autres termes, que la transformation fonctionnelle est conti-

nue). Si ce n'était pas le cas pour un  $u$ , l'on aurait une nouvelle fonction sur la frontière  $\bar{a}(s) \neq \mathfrak{L}\{A\}$  dans le domaine résultat et, par conséquent, une autre solution  $\bar{v}(x, s) = \bar{a}(s)g(x, s)$ . Cette dernière donne lieu à une autre solution  $\bar{u}(x, y)$  dans le domaine objet. Mais étant donné que, plus haut, nous avons déjà obtenu une solution correspondante à la condition  $A(y)$  sur la frontière, ceci n'est possible que s'il existe plusieurs solutions pour une fonction sur la frontière. Si maintenant à  $\bar{a}(s)$  correspondait la fonction objet  $\bar{A}(y)$ , il en résulterait, par l'application de la règle de composition:

$$\bar{u}(x, y) = \bar{A}(y) * G(x, y).$$

Mais ce serait une solution avec la fonction  $\bar{A}$  sur la frontière et certainement pas avec  $A$ . Il ne reste que la possibilité que  $\bar{a}(s)$  ne corresponde à aucune fonction objet. *Si nous choisissons maintenant  $\bar{a}(s)$  de façon qu'aucune fonction objet ne corresponde à  $\bar{a}(s)$ , mais qu'il y ait une correspondante à  $\bar{a}(s)g(x, s)$ ,* alors nous obtenons une solution de l'équation aux dérivées partielles qui ne satisfait pas aux relations (3,55), qui par conséquent *diffère de la solution déduite d'après (3,54) de la valeur sur la frontière.*

Si l'on choisit  $\bar{a}(s) = 1$ , nous sommes sûrs de n'avoir aucune fonction objet correspondant à cette fonction, tandis que  $\bar{a}(s)g(x, s) = g(x, s)$  possède évidemment  $G(x, y)$  comme fonction objet. Cette fonction a, pour  $x \rightarrow 0$ , la valeur  $A(y) \equiv 0$  sur la frontière, valeur pour laquelle la formule (3,54) donnerait seulement la solution  $u \equiv 0$ , tandis que sa fonction résultat  $g(x, s)$  prendra pour  $x \rightarrow 0$  la valeur un.

Si l'on choisit  $\bar{a}(s) = s^n$ , on obtient  $u = \frac{\partial^n G}{\partial y^n}$ , donc la solution singulière (3,322). Pour  $\bar{a}(s) = e^{-y_0 s}$  on trouve la solution (3,323). Cette dernière est d'ailleurs une superposition des solutions (3,322):

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y_0)^n}{n!} \frac{\partial^n G(x, y)}{\partial y^n}.$$

2. La seconde hypothèse faite dans notre méthode est que la

transformation de Laplace soit permutable avec la dérivation par rapport à  $x$ :

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L} \{ u \} .$$

L'exemple (3, 34) nous montre pour  $n = 3$  qu'il existe effectivement des solutions où cette hypothèse n'est pas satisfaite, qui sont par conséquent des solutions singulières. Ici  $\mathfrak{L}\{u\}$  n'est même pas continue pour  $x = \frac{2}{3}l$ , d'autant moins dérivable.

6. — Je voudrais encore montrer sur un exemple que même la formule classique (1, 23) de la solution entraîne des contradictions évidentes si l'on conserve l'unicité. Pour simplifier, considérons le cas dégénéré du quart du plan  $x > x_0, y > 0$  et donnons-nous la valeur  $\Phi(x) \equiv 0$  sur la frontière inférieure, la valeur  $A(y)$  sur la frontière à gauche. La solution classique de l'équation (1, 21) s'écrit alors

$$u(x, y) = A(y) * \psi(x - x_0, y) , \quad (3, 61)$$

où  $\psi$  désigne la fonction (3,311). Envisageons maintenant la fonction  $u = \psi(x, y)$  elle-même qui satisfait à l'équation (1, 21) dans tout le demi-plan  $y > 0$  et prend sur la frontière inférieure les valeurs zéro. Soit  $x_0 = -\alpha$  ( $\alpha > 0$ ). Sur la frontière  $x = x_0$  la solution  $\psi$  prend la valeur  $\psi(-\alpha, y) = -\psi(\alpha, y)$ . La formule (3, 61) donne alors

$$-\psi(\alpha, y) * \psi(x + \alpha, y) .$$

D'après un théorème d'addition de Cesàro (Sur un problème de propagation de la chaleur. *Acad. Royale de Belgique, Bull. d. l. classe des Sc.*, Bruxelles, 1902, pp. 387-407), pour lequel il est d'ailleurs essentiel que  $\alpha > 0$ ,  $x + \alpha > 0$ , cette dernière expression est égale à

$$-\psi(x + 2\alpha, y)$$

et pas du tout à  $\psi(x, y)$ . D'ailleurs, la température restant zéro sur la frontière  $y = 0$  et négative sur la frontière  $x = -\alpha$ , la solution  $-\psi(x + 2\alpha, y)$  semble au premier abord avoir plus de sens pour la physique, car alors la température est constam-

ment négative, tandis que pour  $\psi(x, y)$  la température passe pour  $x = 0$  des valeurs négatives aux valeurs positives. Mais ceci s'explique du fait que les deux solutions correspondent à des conditions aux limites différentes pour  $x \rightarrow \infty$ . L'influence des *conditions aux limites à l'infini* et la question dans quelle mesure celles-ci peuvent être données n'a pas été jusqu'à maintenant étudiée dans la littérature.

#### IV. — LES PRINCIPES DE HUYGHENS ET D'EULER.

**1.** — La non-unicité oblige à prendre des précautions surtout dans l'application aux solutions d'équations paraboliques du principe de Huyghens et de celui d'Euler. Le *principe de Huyghens* (Hadamard [1]) détermine la solution une fois à partir de la frontière primitive, puis à partir d'une station intermédiaire. L'exemple le plus simple serait le suivant: Soit un fil, de température initiale nulle, qui s'étend d'un côté à l'infini; appliquons à la frontière  $x = 0$  la température un, alors; d'après (3, 61) nous obtenons pour  $x > 0$  la température

$$1 * \psi(x, y).$$

Si l'on prend comme frontière le point intermédiaire  $x_0$  ( $0 < x_0 < x$ ), on y a la température  $1 * \psi(x_0, y)$ , donc dans  $x$

$$1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y).$$

Dans le cas de l'unicité on en peut conclure

$$1 * \psi(x, y) = 1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y),$$

d'où, par dérivation par rapport à  $y$ ,

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) \quad (0 < x_0 < x).$$

Ceci n'est autre que le théorème d'addition de Cesàro, mentionné à la page 65. Mais la conclusion n'est pas légitime, si nous ne possédons pas de théorème d'unicité, rigoureusement applicable dans ce cas.

Si dans la fonction de Green G de (1, 24) nous mettons en évidence la largeur  $l$  de l'intervalle en écrivant  $G(x, y; l)$ ,