

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE
Autor: Doetsch, Gustav
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27305>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE¹

PAR

Gustav DOETSCH (Freiburg i. B.).

I. — INTRODUCTION.

1. — Il est bien connu que la distinction des types des équations aux dérivées partielles du second ordre subsiste même pour les équations les plus générales à un nombre arbitraire de variables indépendantes. Nous ne nous occuperons ici que des équations du second ordre à *deux variables* indépendantes qui sont *linéaires* par rapport aux *dérivées partielles du second ordre*

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ces équations sont par conséquent de la forme suivante $(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y})$:

$$A(x, y)r + 2B(x, y)s + C(x, y)t + F(x, y, z, p, q) = 0.$$

L'équation est dite du *type parabolique* si l'égalité

$$AC - B^2 = 0$$

¹ Résumé de la Conférence faite les 17 et 18 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Équations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions*. — La conférence a été faite en langue allemande; je tiens à exprimer ici mes remerciements à M^{me} A. HALPERN, de l'Université de Genève, qui a bien voulu se charger de la traduction en français.

L'essentiel de la *bibliographie* se trouve à la fin de cet article. Les travaux sont indiqués dans le texte par le nom de l'auteur et le numéro du mémoire entre crochets. Toute autre indication bibliographique est insérée dans le texte.

a lieu dans un domaine du plan des (x, y) . On peut alors, par un changement de variables, la ramener à la forme suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (1, 1)$$

Les *caractéristiques* de cette équation sont alors les droites $y = \text{const.}$

2. — On peut mentionner *deux sources différentes* pour la théorie des équations paraboliques. Ceci explique que *les problèmes furent posés d'une façon différente* dans les travaux parus sur ce sujet.

1. Nous avons d'abord le *problème de Cauchy*, qui peut ici être posé de la même manière que pour les équations des autres types. Dans le cas de l'équation (1,1) on se donne z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur un segment de la droite $x = x_0$:

$$z \Big|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

et l'on cherche z dans un domaine adjacent d'étendue indéterminée. La droite $x = x_0$ peut être remplacée par une courbe \mathfrak{C} , qui n'est pas une caractéristique. Si toutes les *données*, c'est-à-dire la fonction f de l'équation (1,1), les « valeurs initiales » φ , φ_1 ainsi que la courbe \mathfrak{C} sont *analytiques* et si l'on demande que les *solutions* soient elles aussi *analytiques*, on aura une solution et une seule, ce qui est démontré par la théorie classique de Cauchy. Nous ne nous arrêterons pas à approfondir ici ce cas analytique à propos duquel il faut mentionner surtout le mémoire célèbre de S. DE KOWALEWSKY (*Crellesches Journal*, 80 (1875), pp. 1-32).

2. *La théorie de la propagation de la chaleur.* On sait que les exemples classiques des équations elliptiques et hyperboliques ont été puisés dans la Physique mathématique, en particulier dans la théorie du potentiel ainsi que dans la théorie des vibrations des milieux élastiques. De même, le type fondamental des équations paraboliques est donné par la théorie de la propagation de la chaleur dans un milieu à une dimension.

La température u dans un milieu conducteur homogène et à une dimension (par exemple dans un fil) satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1, 21)$$

(équation homogène de la chaleur) où x désigne l'abscisse, y le temps. (Toutes les équations paraboliques, linéaires et homogènes à coefficients constants peuvent être ramenées à ce type). Dans le cas où il y a des sources de chaleur à l'intérieur du fil, on aura l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y) \quad (1, 22)$$

(équation non homogène de la chaleur). Le problème qui se pose ici d'une façon naturelle est le suivant: Le fil a, à un moment donné $y = 0$, une certaine « température initiale » $\Phi(x)$. A ses extrémités $x = 0$ et $x = l$ on place deux sources de chaleur de température en général variable $A(y)$ et $B(y)$. On cherche la distribution de la température à l'intérieur à un instant quelconque. Il s'agit donc ici d'intégrer l'équation différentielle dans un domaine entièrement déterminé, la demi-bande $0 \leq x \leq l$, $y \geq 0$, les valeurs de la fonction sur les trois parties de la frontière étant données. Ici l'on ne parle plus de données analytiques, les fonctions $\Phi(x)$, $A(y)$, $B(y)$ étant arbitraires. *La solution classique* de l'équation (1, 21) est la suivante:

$$u(x, y) = \int_0^y A(\eta) G(x, y - \eta) d\eta + \int_0^y B(\eta) G(l - x, y - \eta) d\eta + \\ + \int_0^l \Phi(\xi) \Gamma(x, \xi, y) d\xi, \quad (1, 23)$$

G et Γ étant les « fonctions de Green » de la forme suivante:

$$G(x, y) = -\frac{1}{l} \frac{\partial \mathfrak{I}_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{y}{l^2}\right)}{\partial x} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} y} \sin n\pi \frac{x}{l}, \quad (1, 24)$$

$$\Gamma(x, \xi, y) = \frac{1}{2l} \left[\mathfrak{I}_3\left(\frac{x - \xi}{2l}, \frac{y}{l^2}\right) - \mathfrak{I}_3\left(\frac{x + \xi}{2l}, \frac{y}{l^2}\right) \right] = \\ = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} y} \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n\pi \frac{\xi}{l}. \quad (1, 25)$$

L'apport de chaleur au voisinage des extrémités est proportionnel à $\frac{\partial u}{\partial x}$ d'une part et à la différence des températures du fil et de son voisinage de l'autre. L'on voit alors surgir des problèmes où l'on a des relations linéaires entre u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ données aux extrémités du fil.

Le véritable calcul de la solution de ces problèmes et d'autres semblables — envisagés aussi dans le plan et dans l'espace — fut tellement approfondi par FOURIER dans son mémoire célèbre « Théorie analytique de la chaleur » (1822) que, encore, POINCARÉ, dans son cours bien connu [1] fait en 1895, ne fit que suivre l'œuvre de Fourier. Mentionnons cependant que des savants célèbres du XIX^e siècle, comme POISSON, LAMÉ et Lord KELVIN, ont apporté des idées essentielles et très ingénieuses pour le calcul de la solution.

3. — Le point de vue sous lequel le problème était envisagé jusqu'en 1905 est caractérisé par les deux questions que nous venons d'énoncer: la solution du problème de Cauchy dans le cas analytique en partant de l'équation générale (1, 1) et la solution de l'équation homogène de la chaleur (1, 21), pour quelques problèmes aux limites dans une demi-bande posés par la Physique mathématique. Or, précisément en 1905, un caractère entièrement nouveau paraît dans cette théorie. A cette époque HOLMGREN (Suède) envisagea le problème de Cauchy dans le cas non analytique et considéra d'autre part le problème de la chaleur pour des domaines plus généraux que la demi-bande. Il examina aussi la question de l'existence et de l'unicité des solutions ainsi que leur analyticité et la possibilité de leur prolongement analytique. En 1907, E. E. LEVI (Italie) fit progresser surtout la théorie de l'équation non homogène de la chaleur (ses autres résultats et en particulier le contenu de [1] furent dans l'essentiel anticipés par Holmgren; pour la question de priorité voir la note de Holmgren dans les *Comptes Rendus* 24.2.08). En 1913 et 1918, GEVREY (France) s'est attaqué à l'équation linéaire générale et aux équations essentiellement plus générales et dans deux grands mémoires très féconds mit au clair une fois pour toutes la question de l'existence et de

l'analyticité des solutions. Ses résultats n'ont pas été surpassés depuis. Mes propres travaux (publiés à partir de 1923) — commencés alors sans la connaissance des trois auteurs précités — traitent l'équation homogène de la chaleur dans le sein d'une théorie plus générale, celle des opérations fonctionnelles.

Je tracerai maintenant un résumé rapide du développement que la théorie des équations paraboliques prit depuis les travaux de Holmgren et j'attacherai le plus d'importance à un problème qui a été un peu négligé dans la littérature, à savoir à la question de l'unicité de la solution. Pour cela il est indispensable de mettre au clair la véritable signification du mot « solution ». Le fait qu'on peut attacher à ce terme des sens très différents et que cela entraîne de vastes conséquences n'a jamais été exprimé nettement dans la littérature. — Pour les autres parties de la théorie, je serai obligé de me restreindre aux résultats essentiels, sans quoi cet article prendrait l'étendue d'un livre.

II. — LES DIFFÉRENTES CONCEPTIONS D'UNE « SOLUTION ».

1. — On sait depuis longtemps que la solution $z(x, y)$ d'un problème aux limites ne représente pas nécessairement les valeurs sur la frontière elles-mêmes, puisque, en général, cette solution n'a pas de sens pour les points de la frontière. Ceci a lieu même pour des cas les plus simples, comme par exemple pour l'intégrale de Poisson, qui est solution pour le cercle du problème aux limites de l'équation de Laplace. La seule chose qu'on peut demander est que $z(x, y)$ converge vers la valeur donnée sur la frontière quand (x, y) se rapproche d'un point de cette frontière; la même condition doit être posée pour les dérivées, si la valeur de celles-ci est donnée sur la frontière. Mais même cette convergence peut s'interpréter dans différents sens.

a) Du point de vue *mathématique* on envisagera une convergence à *deux dimensions*, définie par la condition suivante: étant donnée la valeur ζ en un point (ξ, η) de la frontière, il doit être possible de déterminer pour chaque $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$|z(x, y) - \zeta| < \varepsilon$$

pour tous les (x, y) du domaine d'intégration pour lesquels on a

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \delta.$$

Si l'on suppose z continu par rapport à l'ensemble des deux variables à l'intérieur du domaine et si les valeurs sur la frontière sont elles-mêmes continues, cette condition peut s'exprimer ainsi: La fonction, définie à l'intérieur du domaine par $z(x, y)$ et par les valeurs ζ sur la frontière, doit être continue dans le domaine composé de « l'intérieur plus la frontière ». Cette condition se formule d'une manière analogue pour les dérivées s'il y a lieu. C'est toujours dans ce sens qu'on conçoit le raccord avec les valeurs sur la frontière dans des travaux purement mathématiques.

b) Cette conception cependant est de beaucoup trop étroite pour le point de vue de la *physique* et ici se présente un cas intéressant où la physique exige une conception plus générale que celle qui semble être imposée par le point de vue mathématique. Ainsi la conception a) exige que les valeurs sur la frontière soient elles-mêmes continues, par exemple, pour la propagation de la chaleur dans un fil, la température $A(y)$ placée à l'extrémité $x = 0$ doit avoir la même valeur pour $y = 0$ que la température initiale $\Phi(x)$ pour $x = 0$. Dans les cas pratiques cependant c'est généralement le contraire qui a lieu; ce serait un hasard particulier si la flamme avait au commencement de l'expérience la même température que la place qu'elle chauffe. (Il est même caractéristique que dans le tout premier problème dont Fourier donne la solution dans son grand ouvrage les valeurs sur la frontière ne soient pas continues; il s'agit ici de la distribution stationnaire de température dans une plaque ayant la forme d'une demi-bande et les valeurs sont égales à un sur le segment fini de la frontière, à zéro sur les demi-droites). Nous ne pouvons donc pas parler d'une continuité à deux dimensions de la fonction « solution plus valeurs sur la frontière ». Pour la propagation de la chaleur on sait clairement comment la physique doit interpréter le raccord avec les valeurs sur la frontière¹: Si à un

¹ L'interprétation que nous donnons aux conditions aux limites est intimement liée au fait que la chaleur se propage avec une vitesse infinie. Une interprétation très différente peut s'imposer pour des phénomènes qui se traduisent par des équations hyperboliques et qui, par conséquent, se propagent avec une vitesse finie: l'observateur qui établit les conditions aux limites devrait se déplacer avec une vitesse moindre que celle du phénomène (Doetsch [8], p. 70).

moment donné on avançait de l'intérieur vers l'extérieur du fil, on devrait y trouver la température placée sur la frontière; et si en partant d'un temps $y > 0$ l'on reconstituait dans le temps la température d'une place intérieure déterminée, l'on devrait y trouver la température initiale donnée. Dans le plan des (x, y) cela signifie que l'on exige le raccord continu avec les valeurs sur la frontière seulement pour des chemins qui aboutissent perpendiculairement à la frontière (*raccord à une dimension*); cette condition s'exprime d'une manière analogue pour les dérivées s'il y a lieu¹. Si les frontières ne sont pas rectilignes on exigera, conformément à la nature du problème, que ce chemin soit normal à la frontière, parallèle aux axes ou une autre condition pareille. Dans ce sens les discontinuités comme celles qui viennent d'être signalées gardent une signification précise: les sommets $(0,0)$ et $(l, 0)$ de la demi-bande ne peuvent pas être atteints si l'on se dirige de l'intérieur normalement à la frontière.

Nous appellerons *particulier* l'énoncé du problème tel qu'il était décrit dans *a*), *général* l'énoncé² sous la forme donnée dans *b*). Les deux cas ont leur sens et leur justification et se présentent à juste titre comme deux classes différentes de la théorie des problèmes aux limites.

2. — Toute méthode de résolution d'un problème aux limites doit faire certaines hypothèses sur la *nature des solutions* ainsi que sur les *valeurs sur la frontière*, sans quoi il serait impossible d'appliquer la méthode et d'attribuer un sens à la solution trouvée. Ainsi la solution (1,23) donnée sous forme d'intégrale exige tout au moins l'intégrabilité des valeurs sur la frontière. En plus, on ne peut démontrer le raccord même à une dimension avec les valeurs sur la frontière que pour des points pour lesquels on a des hypothèses supplémentaires, telles que continuité ou identité de la valeur de la fonction avec certaines valeurs moyennes. (C'est ici qu'intervient la théorie des intégrales singulières). Il n'y a pas de recherches pour les équations para-

¹ Voir l'article de HILB et SZASZ, *Allgemeine Reihenentwicklungen. Enzyklopädie*, II, 3, fascicule 8, § 6, p. 1245, où l'on trouve une indication d'une définition semblable des conditions aux limites avec la note suivante: « Gerade diese der Natur des Problems angepasste Fragestellung ist bisher in der Literatur verhältnismässig wenig behandelt ».

² En allemand: « Spezielle » und « allgemeine » Problemstellung.

boliques concernant l'existence des solutions dans le cas d'une non-intégrabilité des valeurs sur la frontière ni sur l'interprétation possible des conditions aux limites dans ce cas. Les démonstrations de l'unicité nécessitent surtout une série d'hypothèses sur les solutions et sur certaines dérivées, hypothèses comme l'intégrabilité à une ou deux dimensions, continuité, etc. Ce sont toutes des hypothèses étrangères à la nature du problème qui, par conséquent, doivent être chaque fois nettement explicitées¹.

3. — L'on voit alors ceci: Pour que le problème soit clairement posé il est indispensable d'une part de préciser quelles conditions on impose à la solution et aux valeurs sur la frontière, de fixer d'autre part le sens dans lequel les conditions aux limites doivent être interprétées.

Il est à regretter qu'une partie même de la littérature moderne, pour ne plus parler de la plus ancienne, reste extrêmement vague sous ce rapport. Ceci entraîne d'une part que les théorèmes et démonstrations sont faux eux-mêmes, d'autre part que des théorèmes, justes sous certaines restrictions, sont employés dans des cas où ces restrictions ne sont pas respectées. Ce sont surtout les démonstrations d'unicité qui montrent la gravité décisive du sens dans lequel on envisage le problème aux limites.

III. — LA QUESTION D'UNICITÉ OU DE MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS.

1. — Dans les ouvrages parus avant 1925 on ne voit nulle part surgir un doute sur l'unicité de la solution des équations paraboliques², on y trouve, au contraire, une série de démonstrations du fait que la solution, si elle existe, est bien unique; ainsi

¹ Dans le cas de l'énoncé particulier du problème on a l'habitude d'appeler *régulières* les solutions de l'équation (1,1) qui sont, ainsi que leurs dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, continues dans le domaine plus la frontière.

² Seul M. É. Picard indiquait à l'occasion (*Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences*, Paris, 1905), sans d'ailleurs insister, que si l'on envisageait la propagation de la chaleur dans un conducteur illimité l'on devait, pour démontrer l'unicité, admettre des hypothèses sur l'allure à l'infini de la fonction et de ses dérivées. Mais c'est plutôt le fait qu'un cas limite exige des considérations particulières, qui est souligné ici.

Holmgren (*Öfversikt af K. Vet. Akad. Förhandlingar*, 1901, pp. 91-103) le démontra pour l'énoncé particulier du *problème de Cauchy* dans le cas non analytique. Mais nous ne voulons pas insister ici sur le problème de Cauchy.

2. — Pour un *problème aux limites* — et nous en reparlerons dans VI — les valeurs de z sont données sur un contour ouvert \mathfrak{C} , composé de deux courbes \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 à gauche et à droite, dont les points extrêmes inférieurs A_1, A_2 ou supérieurs B_1, B_2 se trouvent à égale hauteur, et d'un segment de caractéristique \mathfrak{K} , qui relie les points extrêmes inférieurs ou supérieurs. Dans les cas considérés dans la suite \mathfrak{K} se trouve en bas. Le problème consiste à déterminer z dans les points « entre \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 », c'est-à-dire dans les points intérieurs au domaine délimité par $A_1 A_2 B_2 B_1 A_1$ et dans les points de $B_1 B_2$ lui-même. Soit \mathfrak{B} l'ensemble de ces points.

L'on connaît trois types de démonstration de l'unicité que je ne citerai pas dans l'ordre historique, mais dans l'ordre de leur simplicité. (J'omets ici le type le plus primitif de démonstration qui part de la représentation effective de la solution par ses valeurs sur la frontière, représentation sous forme d'une intégrale; j'en parlerai à l'occasion dans VI, 3).

1. *Démonstration¹ de Gevrey* ([1], n° 18). — Elle s'applique dans certains cas à l'équation parabolique linéaire générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = f(x, y) . \quad (3, 21)$$

Nous envisageons d'abord l'équation homogène

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0 . \quad (3, 22)$$

Supposons que u satisfait à l'équation dans \mathfrak{B} et soient u continue dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ continues dans \mathfrak{B} ; pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ il suffira de

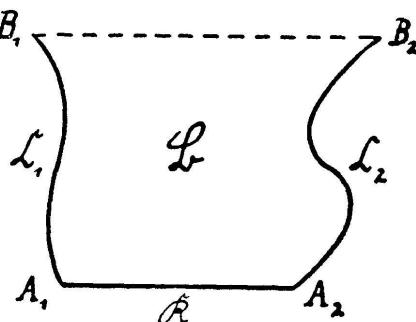


Fig. 1.

¹ La démonstration de Picone [1] qui se sert aussi de la méthode de Gevrey, est du même type.

supposer l'existence dans \mathfrak{B} . Considérons les *deux cas particuliers* suivants:

a) Soient dans \mathfrak{B} :

$$b(x, y) \leq 0, \quad c(x, y) < 0.$$

Alors u ne peut pas prendre de maximum positif (> 0) dans \mathfrak{B} . (Cela exprime en un point (x_0, y_0) de B_1B_2 que les inégalités $u(x_0, y_0) > 0$ et $u(x_0, y_0) \geq u(x, y)$ ne peuvent pas être satisfaites pour les points voisins avec $y \leq y_0$). Si c'était le cas en un point P de \mathfrak{B} , la considération des sections $y = \text{const.}$ et $x = \text{const.}$ nous montrerait qu'on aurait nécessairement en P

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$$

et, si P ne se trouve pas sur B_1B_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

si P se trouve sur B_1B_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \geq 0$$

et, par conséquent, dans tous les cas:

$$b \frac{\partial u}{\partial y} \leq 0.$$

En plus, nous avons en P

$$cu < 0.$$

L'équation (3,22) ne pourrait alors pas être satisfaite.

Cependant, en raison de sa continuité, u doit avoir un maximum absolu dans le domaine fermé $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$. Par conséquent, ce maximum sera ≤ 0 s'il est atteint dans \mathfrak{B} , ou bien il sera atteint sur \mathfrak{C} .

Un raisonnement analogue nous montre que u ne peut pas avoir de minimum négatif (< 0) dans \mathfrak{B} , et que, par conséquent, ce minimum sera ≥ 0 s'il est atteint dans \mathfrak{B} , ou bien qu'il sera atteint sur \mathfrak{C} .

Supposons maintenant que l'équation non homogène (3, 21) ait deux solutions différentes z_1, z_2 , qui prennent la même valeur sur la frontière \mathfrak{C} et ceci dans le sens particulier que « la fonction plus la valeur sur la frontière » est continue dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, que leurs premières dérivées sont continues dans \mathfrak{B} , tandis que de $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}$ on ne suppose que l'existence dans \mathfrak{B} . La différence

$u = z_1 - z_2$ satisfait alors à l'équation homogène (3, 22) et aux conditions posées plus haut, elle a en plus sur la frontière la valeur zéro, de façon que le maximum absolu ne peut être que ≥ 0 . Mais alors il découle du résultat énoncé plus haut que ce maximum est égal à zéro. La même chose peut être prouvée pour le minimum absolu. Par conséquent nous avons $u \equiv 0$, c'est-à-dire $z_1 \equiv z_2$.

b) Soient dans \mathfrak{B} :

$$b(x, y) \leqq B < 0, \quad 0 \leqq c(x, y) \leqq C.$$

(L'équation de la chaleur appartient à ce type). Par la substitution

$$z(x, y) = e^{Ky} \zeta(x, y) \quad (K = \text{const.})$$

l'équation (3, 21) se transforme en une équation en ζ , qui ne se distingue de la première que par le fait que le coefficient de ζ est maintenant égal à $c + Kb$. D'après les hypothèses sur b et c , l'on peut choisir K assez grand pour que cette fonction soit négative dans \mathfrak{B} , de façon que la déduction de a) est applicable à ζ . Mais si, les valeurs sur la frontière étant données, il n'y a qu'une seule solution ζ , il n'existe de même qu'une seule solution z de l'équation primitive avec les valeurs correspondantes sur la frontière.

2. *Démonstration de Poincaré* ([1], pp. 27-30) pour l'équation de la chaleur (1, 22). (Cette démonstration est peut-être plus ancienne, on la trouve dans beaucoup de traités sur les équations aux dérivées partielles de la physique). Poincaré envisage l'équation pour la demi-bande (voir p. 45), mais on peut aussi considérer une frontière plus générale, comme sur p. 51, si l'on suppose que les courbes \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont représentables par deux fonctions univoques et dérivables

$$\mathfrak{C}_1: x = \gamma_1(y) \quad \mathfrak{C}_2: x = \gamma_2(y).$$

Supposons que l'équation non homogène (1, 22) ait deux solutions différentes pour des valeurs données sur la frontière. Alors l'équation homogène (1, 21) a une solution $u(x, y)$ non identiquement nulle, prenant sur la frontière les valeurs zéro.

Je reproduis d'abord la démonstration usuelle et en m'abstenant de remarques.

Envisageons l'intégrale

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u^2(x, y) dx, \quad (a)$$

étendue sur un segment de caractéristique qui fait partie de \mathfrak{B} . Alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dy} &= \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{1}{2} u^2(\gamma_2(y), y) \frac{d\gamma_2}{dy} - \frac{1}{2} u^2(\gamma_1(y), y) \frac{d\gamma_1}{dy} \\ &= \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial u}{\partial y} dx. \end{aligned} \quad (b)$$

En vertu de l'équation différentielle (1, 21) on a

$$\frac{dJ}{dy} = \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} - \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (c)$$

et par conséquent

$$\frac{dJ}{dy} \leqq 0. \quad (d)$$

Avec y_0 ordonnée de A_1 et de A_2 , on a $u(x, y_0) = 0$ et de ce fait

$$J(y_0) = 0; \quad (e)$$

donc il découle de (d) et (e):

$$J(y) \leqq 0, \quad (f)$$

tandis que, par définition, on a $J(y) \geqq 0$. Donc on doit avoir $J(y) \equiv 0$, de façon que u , si elle est continue, est identiquement nulle.

Cette démonstration se sert en réalité d'un si grand nombre d'hypothèses qu'il est difficile de les énumérer toutes. L'intégrale (a) existe certainement si u se raccorde d'une façon continue — *au moins dans la direction des x* — avec les valeurs sur la frontière, puisque à l'intérieur u est en tous cas continue dans la direction des x en vertu de l'existence de $\frac{\partial u}{\partial x}$. Cependant (b) exige que J

soit *dérivable* et encore que $\frac{dJ}{dy}$ puisse être obtenue par la règle connue. (c) présuppose que, si (x, y) se déplace horizontalement vers la frontière, non seulement u mais aussi $u \frac{\partial u}{\partial x}$ tende vers zéro (par exemple que $\frac{\partial u}{\partial x}$ reste bornée sur ce chemin; Gevrey a montré ([2], chap. III) que ceci n'est, en général, pas le cas). Pour autoriser le passage de (d) et (e) à (f), J devrait être *continue pour* y_0 ou, en d'autres termes, l'on devrait à la place de $J(y_0)$ envisager la limite vers laquelle J tend pour $y \rightarrow y_0$. Or, le fait que u^2 tende vers zéro si l'on s'approche d'un point quelconque de \mathfrak{R} , n'entraîne nullement que aussi $\int u^2 dx$ tende alors vers zéro. Ceci signifierait que u converge vers zéro « en moyenne » et cela nécessiterait des hypothèses, par exemple que u converge vers zéro uniformément en x pour $y \rightarrow y_0$ ou bien, d'après Arzelà, que u reste bornée dans le voisinage de \mathfrak{R} . Nous verrons plus tard, à quel point ces hypothèses sont indispensables pour la validité de la démonstration.

3. *Démonstration de Volterra* ([1], p. 64) pour l'équation de la chaleur, plus développée chez E. E. Levi ([3], p. 190). Cette démonstration se base sur la transformation connue de Green d'une intégrale de surface en intégrale prise le long d'un contour, transformation dont on se sert beaucoup dans d'autres domaines des équations aux dérivées partielles. Les conditions sous lesquelles la démonstration est juste ne sont point indiquées par Volterra. Levi indique soit-disant toutes les hypothèses employées, mais il en néglige une et cela, comme nous verrons, précisément la plus décisive. Son théorème s'énonce ainsi: Soit \mathfrak{C} un arc de courbe dont les points extrêmes A et B se trouvent à la même hauteur; supposons cet arc placé entièrement au-dessous de AB et tel que les parallèles aux axes aient au plus deux points communs avec l'arc. Soit \mathfrak{B} l'ensemble de points intérieurs à $\mathfrak{C} + AB$ et du segment AB lui-même et suppo-

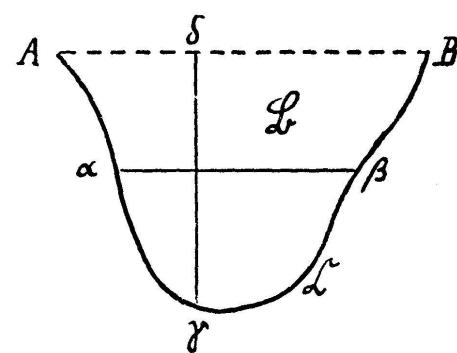


Fig. 2.

sons que la fonction u satisfait aux conditions suivantes :

- a) u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont continues dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ ¹,
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ linéairement intégrable par rapport à x , $\frac{\partial u}{\partial y}$ est dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ linéairement intégrable par rapport à y ,
- c) u satisfait dans \mathfrak{B} à l'équation (1, 21),
- d) u a la valeur zéro sur \mathfrak{C} .

Alors on a $u \equiv 0$ dans \mathfrak{B} .

Les transformations dont la démonstration se sert s'écrivent ainsi (voir fig. 2); de plus b) entraîne que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy &= \int dy \int_{\alpha}^{\beta} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int dy \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \\ &= - \iint_{\mathfrak{B}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

en vertu de a) et d);

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} u \frac{\partial u}{\partial y} dx dy &= \int dx \int_{\gamma}^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \int dx \left\{ u^2(\delta) - u^2(\gamma) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int u^2(\delta) dx = \frac{1}{2} \int_{AB} u^2 dx \end{aligned}$$

en vertu de d), et par conséquent

$$\iint_{\mathfrak{B}} u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{\mathfrak{B}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{AB} u^2 dx .$$

Le premier membre s'annulant en vertu de c), les deux intégrales du second membre doivent être nulles elles aussi, donc $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ en vertu de sa continuité et par conséquent $u = \text{const.} = 0$.

¹ Remarquons que l'existence de $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur la frontière est ici admise.

L'on constate immédiatement que la continuité à deux dimensions de u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ n'est point utilisée pour l'évaluation de l'intégrale; *il suffit ici que le raccord de u avec les valeurs sur la frontière soit continu dans la direction des x et des y et que $\frac{\partial u}{\partial x}$ reste bornée si l'on s'approche de la frontière dans la direction des x .* Par contre l'on admet *l'hypothèse* essentielle qui n'est *pas exprimée*, que $\frac{\partial u}{\partial y}$ ou, ce qui revient au même, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, *sont dans \mathfrak{B} intégrables à deux dimensions.* Si u n'était supposée continue qu'à une dimension dans la direction des x et des y , ce qui est possible dans cette démonstration, l'on devrait même exiger que u et $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient de carré intégrable à deux dimensions.

3. — Je ne veux pas m'arrêter ici à tirer des démonstrations précédentes tout ce qui pourrait servir à établir un théorème aussi général que possible¹; je veux plutôt résumer ici mes remarques sur les trois types de démonstration:

La première démonstration est entièrement adaptée à l'énoncé « particulier » du problème; la seconde et la troisième peuvent être employées aussi pour l'énoncé « général », mais nécessitent alors toute une série d'hypothèses fondamentales. Le soupçon s'impose alors que *la solution du problème « général » n'est pas unique* si les hypothèses ne sont pas très étroites. Et, en effet, il en est ainsi! Pour le montrer il suffit que pour une simple équation, comme l'équation homogène de la chaleur (1, 21) et pour un simple domaine comme la demi-bande ou un quart du plan qui est une demi-bande dégénérée, nous donnions l'exemple d'une fonction-solution qui tende vers zéro si l'on s'approche de la frontière normalement, sans être cependant identiquement nulle. J'appellerai de telles fonctions « *solutions singulières* ».

1. Dans le quart du plan $x > 0, y > 0$ la fonction

$$\psi(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (3, 311)$$

¹ J'en reparlerai à une autre occasion.

a cette propriété. Elle remplace dans le quart du plan la fonction de Green $G(x, y)$ de (1, 24). Cette solution possède même une signification physique: elle représente la distribution de température qu'on obtient si l'on apporte en un temps extrêmement court une quantité finie de chaleur à l'extrémité $x = 0$ du fil (explosion de chaleur). Mais ce n'est pas seulement cette solution qui possède la propriété demandée, toutes ses dérivées partielles par rapport à y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}, \dots \quad (3, 312)$$

l'ont aussi (Doetsch [3], p. 304). De ces fonctions l'on peut à nouveau déduire une infinité de solutions singulières: si l'on pose, par exemple,

$$u(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y - y_0) & \text{pour } y > y_0 > 0, \\ 0 & \text{pour } 0 < y \leq y_0, \end{cases} \quad (3, 313)$$

u tend encore vers zéro si l'on s'approche normalement des frontières du quart du plan et l'équation différentielle est satisfaite dans tout l'intérieur et aussi sur la droite $y = y_0$.

2. Dans la *demi-bande* $0 < x < l$, $y > 0$ la fonction

$$G(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(x + 2nl, y) \quad (3, 321)$$

connue de (1,24), ainsi que ses dérivées partielles par rapport à y

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 G}{\partial x^4}, \dots \quad (3, 322)$$

possèdent la propriété analogue (Doetsch [3], p. 299), comme d'ailleurs aussi toutes les fonctions formées à partir de ces solutions d'après le schéma suivant

$$u(x, y) = \begin{cases} G(x, y - y_0) & \text{pour } y > y_0 > 0, \\ 0 & \text{pour } 0 < y \leq y_0 \end{cases} \quad (3, 323)$$

(Doetsch [4], p. 612). Toutes ces solutions peuvent être interprétées comme distributions de température, créées par des explosions de chaleur (Doetsch [3], p. 301). — De même

$$G(l - x, y) \quad (3, 324)$$

et les fonctions qui en peuvent être déduites de la manière indiquée plus haut sont des solutions singulières.

3. Les mêmes relations se présentent aussi pour des *problèmes aux limites d'un autre genre*, par exemple pour ceux où intervient la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur la frontière: la fonction

$$\chi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad (3, 331)$$

satisfait dans le quart du plan à l'équation (1, 21) et tend vers zéro si l'on s'approche normalement de la frontière inférieure, tandis que $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à gauche. Les dérivées par rapport à y de cette fonction se comportent de la même façon.

La fonction

$$\mathfrak{Z}_3\left(\frac{x}{2}, y\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \chi(x + 2n, y) \quad (3, 332)$$

dans la demi-bande $0 < x < 1, y > 0$ tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière inférieure, tandis que sa dérivée par rapport à x tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à gauche et à droite.

La fonction

$$-\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{Z}_2\left(\frac{x}{2}, y\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \psi(x + 2n, y) \quad (3, 333)$$

dans la demi-bande $0 < x < 1, y > 0$ tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière inférieure et de la frontière à gauche, tandis que sa dérivée par rapport à x tend vers zéro si l'on s'approche de la frontière à droite (Doetsch [9], pp. 333, 338).

4. Il existe encore un *type tout à fait différent* de solutions singulières. Supposons donnée la demi-bande de largeur l et établissons la fonction de Green correspondante à (1, 24) d'abord pour l'intervalle $0 \leq x \leq \frac{l}{n}$ (n étant un nombre entier positif).

Soit $G\left(x, y, \frac{l}{n}\right)$ cette fonction de Green et posons

$$u(x, y) = \begin{cases} G\left(x, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{l}{n} \\ -G\left(\frac{2l}{n} - x, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } \frac{l}{n} \leq x \leq 2\frac{l}{n} \\ G\left(x - \frac{2l}{n}, y, \frac{l}{n}\right) & \text{pour } 2\frac{l}{n} \leq x \leq 3\frac{l}{n} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (3, 34)$$

u représente simplement le prolongement analytique de G dans la direction des x . Cette fonction ainsi que ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont continues sur les droites $x = v \frac{l}{n}$ et satisfait même sur ces droites à l'équation (1, 24). Elle tend vers zéro quand on se rapproche d'une frontière quelconque de la demi-bande. Pour $n = 2$ elle est simplement une combinaison linéaire de solutions singulières précitées, à savoir $u(x, y) = G(x, y) - G(l - x, y)$, ce qui n'est plus le cas pour $n > 2$.

Je voudrais ici faire la remarque que pour le *problème de Cauchy* je ne connais pas d'exemple réfutant l'unicité dans le cas de l'énoncé « général ».

4. — Il est très intéressant d'examiner ici de quelle façon les *démonstrations d'unicité* tombent en défaut en face de ces exemples, disons de la fonction G . La *première démonstration* (de Gevrey) n'entre pas en ligne de compte puisque, dans la demi-bande fermée, $G(x, y)$ n'est pas continue et même pas bornée: dans le voisinage du sommet $x = 0, y = 0$ cette fonction se comporte comme $\psi(x, y)$ et peut, par conséquent, y prendre des valeurs positives arbitrairement petites et arbitrairement grandes.

L'intégrale $J(y)$ employée dans la *seconde démonstration* (de Poincaré) prend dans le cas $u \equiv G(x, y)$ et $l = 1$ la valeur

$$J(y) = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n^2 \pi^2 y}.$$

Il est vrai que cette expression est dérivable pour $y > 0$ et que la dérivée est constamment négative, mais pour $y \rightarrow 0$ elle ne tend point vers zéro mais vers ∞ (Doetsch [3], p. 300).

L'exemple (3,323) nous montre qu'il ne suffit point d'admettre que $J \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow 0$, de sorte par exemple que $u(x, y)$ tende uniformément vers zéro en x pour $y \rightarrow 0$. Dans cet exemple cette condition est évidemment satisfaite, tandis que J n'est pas dérivable pour $y = y_0$, étant de la forme

$$J(y) = \begin{cases} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2n^2\pi^2(y-y_0)} & \text{pour } y > y_0, \\ 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq y_0 \end{cases}$$

de façon que la règle exprimée dans (b), p. 54, n'est pas applicable non plus¹.

La troisième démonstration (de Levi) semble être applicable à $G(x, y)$ puisque la condition *a*), comme nous l'avons indiqué plus haut, n'intervient pas en toute sa rigueur dans la démonstration et n'y est employée que dans une mesure qui est satisfaite pour G . Mais G ne satisfait pas à la condition négligée par Levi, celle qui exige que $\frac{\partial u}{\partial y}$ soit intégrable à deux dimensions dans le domaine! Il semble être une ironie du destin que Levi lui-même ait démontré dans le même mémoire ([3], p. 229) que $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ n'est pas intégrable, ce qui entraîne immédiatement la non intégrabilité de $\frac{\partial G}{\partial y}$.

5. — Le procédé par lequel j'ai trouvé ces solutions singulières vaut peut-être la peine d'être mentionné, parce qu'il donne la possibilité de les trouver toutes. Il fut déduit à l'occasion de l'étude d'une nouvelle *méthode d'intégration d'équations aux dérivées partielles* dans une demi-bande, méthode bien adaptée précisément à l'énoncé « général » (Doetsch [1, 2, 3, 4, 8, 9]).

¹ Pour cette même raison la démonstration de Thum, qui opère avec des intégrales de Lebesgue et des fonctions de carré intégrable, tombe en défaut (v. Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen. *Crellesches Journal*, 168 (1932), pp. 65-90, § 1).

Elle emploie la transformation de Laplace

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sy} F(y) dy \equiv \mathcal{L}\{F\}$$

et sa propriété fondamentale

$$\mathcal{L}\{F'\} = s\mathcal{L}\{F\} - F(0) , \quad (3, 51)$$

où $F(0)$ représente la valeur limite de F pour $y \rightarrow +0$. Si l'on applique cette transformation par rapport à la variable¹ y

aux « fonctions objet » $u(x, y)$ qui pourraient être solutions de l'équation différentielle, on leur fait correspondre certaines « fonctions résultat » $v(x, s)$:

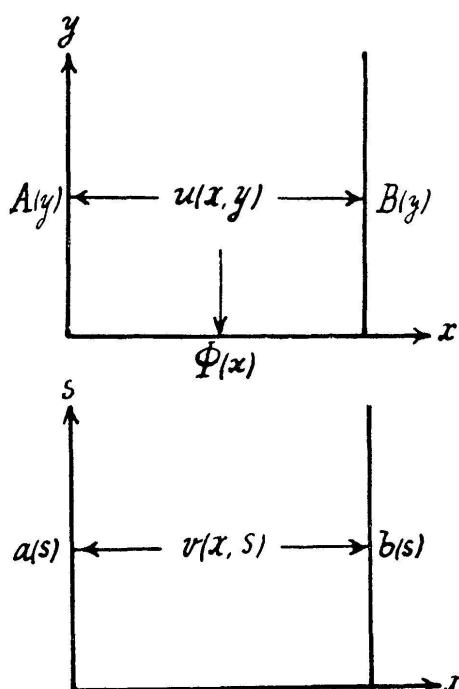


Fig. 3.

$\mathcal{L}\{u(x, y)\} = v(x, s)$,
et l'équation aux dérivées partielles (1, 21) se transforme suivant (3, 51) en une équation différentielle *ordinaire* en v :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - sv + \Phi(x) = 0 , \quad (3, 52)$$

dans laquelle la *condition initiale* $\Phi(x)$ est introduite et où s joue le rôle d'un paramètre. *Ce sont les deux caractères essentiels de la méthode*². Les fonctions sur la frontière $A(y)$ et $B(y)$ se transforment en les deux valeurs de v sur la frontière

$$v(0, s) \equiv a(s) = \mathcal{L}\{A\} , \quad v(l, s) \equiv b(s) = \mathcal{L}\{B\} .$$

¹ Qui parcourt dans notre problème justement l'intervalle infini $0 < y < \infty$.

² Cette méthode s'applique évidemment à toutes les équations linéaires dont les coefficients de la partie homogène ne dépendent que de x et non pas de y . Elle donne entre autres une justification rigoureuse de ce qu'on appelle calcul symbolique de Heaviside (Doetsch [10]). On peut de même employer une autre méthode qui transforme les équations par rapport à la variable x et qui est adaptée à un intervalle *fini*. Alors les coefficients peuvent dépendre de y (Doetsch [12]).

A propos du calcul de Heaviside voir *L'Ens. mathématique*, XXXIII, 1934, p. 118.

Si nous prenons en particulier

$$\Phi(x) \equiv 0, \quad B(y) \equiv 0$$

et par conséquent aussi $b(s) \equiv 0$, alors la solution de (3,52) est la suivante:

$$\varphi(x, s) = a(s) g(x, s) \quad \text{avec} \quad g(x, s) = \frac{\sin(l-x)\sqrt{s}}{\sin l\sqrt{s}}. \quad (3, 53)$$

La solution de l'équation initiale aux dérivées partielles sera trouvée si l'on peut déterminer inversement la fonction objet de cette fonction résultat. On sait que $A(y)$ correspond à $a(s)$, $G(x, y)$ à $g(x, s)$ et qu'au produit de deux fonctions résultat $f_1(s)$ et $f_2(s)$ correspond ce que nous appelons la *composition* (Faltung)

$$F_1 * F_2 \equiv \int_0^y F_1(\eta) F_2(y - \eta) d\eta$$

des fonctions objet:

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

A (3,53) correspond alors la fonction objet

$$u(x, y) = A(y) * G(x, y). \quad (3, 54)$$

C'est la solution connue (1,23) pour $\Phi = B = 0$.

Maintenant intervient le raisonnement suivant (Doetsch [3], p. 298; [8], p. 75). La méthode repose évidemment sur *deux hypothèses essentielles*:

1. Il est supposé que

$$a(s) = \mathfrak{L}\{A\} \quad \text{et} \quad b(s) = \mathfrak{L}\{B\}$$

sont les valeurs sur la frontière de φ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathfrak{L}\{u\} = \mathfrak{L}\{\lim_{x \rightarrow 0} u\}, \quad \lim_{x \rightarrow l} \mathfrak{L}\{u\} = \mathfrak{L}\{\lim_{x \rightarrow l} u\}, \quad (3, 55)$$

c'est-à-dire que *les valeurs sur la frontière des fonctions transformées sont les transformées des valeurs sur la frontière* (ou, en d'autres termes, que la transformation fonctionnelle est conti-

nue). Si ce *n'était pas* le cas pour un u , l'on aurait une nouvelle fonction sur la frontière $\bar{a}(s) \neq \mathfrak{L}\{A\}$ dans le domaine résultat et, par conséquent, une autre solution $\bar{v}(x, s) = \bar{a}(s)g(x, s)$. Cette dernière donne lieu à une autre solution $\bar{u}(x, y)$ dans le domaine objet. Mais étant donné que, plus haut, nous avons déjà obtenu une solution correspondante à la condition $A(y)$ sur la frontière, ceci n'est possible que s'il existe plusieurs solutions pour une fonction sur la frontière. Si maintenant à $\bar{a}(s)$ correspondait la fonction objet $\bar{A}(y)$, il en résulterait, par l'application de la règle de composition:

$$\bar{u}(x, y) = \bar{A}(y) * G(x, y).$$

Mais ce serait une solution avec la fonction \bar{A} sur la frontière et certainement pas avec A . Il ne reste que la possibilité que $\bar{a}(s)$ ne corresponde à aucune fonction objet. *Si nous choisissons maintenant $\bar{a}(s)$ de façon qu'aucune fonction objet ne corresponde à $\bar{a}(s)$, mais qu'il y ait une correspondante à $\bar{a}(s)g(x, s)$,* alors nous obtenons une solution de l'équation aux dérivées partielles qui ne satisfait pas aux relations (3,55), qui par conséquent *diffère de la solution déduite d'après (3,54) de la valeur sur la frontière.*

Si l'on choisit $\bar{a}(s) = 1$, nous sommes sûrs de n'avoir aucune fonction objet correspondant à cette fonction, tandis que $\bar{a}(s)g(x, s) = g(x, s)$ possède évidemment $G(x, y)$ comme fonction objet. Cette fonction a, pour $x \rightarrow 0$, la valeur $A(y) \equiv 0$ sur la frontière, valeur pour laquelle la formule (3,54) donnerait seulement la solution $u \equiv 0$, tandis que sa fonction résultat $g(x, s)$ prendra pour $x \rightarrow 0$ la valeur un.

Si l'on choisit $\bar{a}(s) = s^n$, on obtient $u = \frac{\partial^n G}{\partial y^n}$, donc la solution singulière (3,322). Pour $\bar{a}(s) = e^{-y_0 s}$ on trouve la solution (3,323). Cette dernière est d'ailleurs une superposition des solutions (3,322):

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y_0)^n}{n!} \frac{\partial^n G(x, y)}{\partial y^n}.$$

2. La seconde hypothèse faite dans notre méthode est que la

transformation de Laplace soit permutable avec la dérivation par rapport à x :

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L} \{ u \} .$$

L'exemple (3, 34) nous montre pour $n = 3$ qu'il existe effectivement des solutions où cette hypothèse n'est pas satisfaite, qui sont par conséquent des solutions singulières. Ici $\mathfrak{L} \{ u \}$ n'est même pas continue pour $x = \frac{2}{3}l$, d'autant moins dérivable.

6. — Je voudrais encore montrer sur un exemple que même la *formule classique* (1, 23) de la solution entraîne des *contradictions* évidentes si l'on conserve l'unicité. Pour simplifier, considérons le cas dégénéré du quart du plan $x > x_0, y > 0$ et donnons-nous la valeur $\Phi(x) \equiv 0$ sur la frontière inférieure, la valeur $A(y)$ sur la frontière à gauche. La solution classique de l'équation (1, 21) s'écrit alors

$$u(x, y) = A(y) * \psi(x - x_0, y) , \quad (3, 61)$$

où ψ désigne la fonction (3,311). Envisageons maintenant la fonction $u = \psi(x, y)$ elle-même qui satisfait à l'équation (1, 21) dans tout le demi-plan $y > 0$ et prend sur la frontière inférieure les valeurs zéro. Soit $x_0 = -\alpha$ ($\alpha > 0$). Sur la frontière $x = x_0$ la solution ψ prend la valeur $\psi(-\alpha, y) = -\psi(\alpha, y)$. La formule (3, 61) donne alors

$$-\psi(\alpha, y) * \psi(x + \alpha, y) .$$

D'après un théorème d'addition de Cesàro (Sur un problème de propagation de la chaleur. *Acad. Royale de Belgique, Bull. d. l. classe des Sc.*, Bruxelles, 1902, pp. 387-407), pour lequel il est d'ailleurs essentiel que $\alpha > 0$, $x + \alpha > 0$, cette dernière expression est égale à

$$-\psi(x + 2\alpha, y)$$

et pas du tout à $\psi(x, y)$. D'ailleurs, la température restant zéro sur la frontière $y = 0$ et négative sur la frontière $x = -\alpha$, la solution $-\psi(x + 2\alpha, y)$ semble au premier abord avoir plus de sens pour la physique, car alors la température est constam-

ment négative, tandis que pour $\psi(x, y)$ la température passe pour $x = 0$ des valeurs négatives aux valeurs positives. Mais ceci s'explique du fait que les deux solutions correspondent à des conditions aux limites différentes pour $x \rightarrow \infty$. L'influence des *conditions aux limites à l'infini* et la question dans quelle mesure celles-ci peuvent être données n'a pas été jusqu'à maintenant étudiée dans la littérature.

IV. — LES PRINCIPES DE HUYGHENS ET D'EULER.

1. — La non-unicité oblige à prendre des précautions surtout dans l'application aux solutions d'équations paraboliques du principe de Huyghens et de celui d'Euler. Le *principe de Huyghens* (Hadamard [1]) détermine la solution une fois à partir de la frontière primitive, puis à partir d'une station intermédiaire. L'exemple le plus simple serait le suivant: Soit un fil, de température initiale nulle, qui s'étend d'un côté à l'infini; appliquons à la frontière $x = 0$ la température un, alors; d'après (3, 61) nous obtenons pour $x > 0$ la température

$$1 * \psi(x, y) .$$

Si l'on prend comme frontière le point intermédiaire x_0 ($0 < x_0 < x$), on y a la température $1 * \psi(x_0, y)$, donc dans x

$$1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) .$$

Dans le cas de l'unicité on en peut conclure

$$1 * \psi(x, y) = 1 * \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) ,$$

d'où, par dérivation par rapport à y ,

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y) * \psi(x - x_0, y) \quad (0 < x_0 < x) .$$

Ceci n'est autre que le théorème d'addition de Cesàro, mentionné à la page 65. Mais la conclusion n'est pas légitime, si nous ne possédons pas de théorème d'unicité, rigoureusement applicable dans ce cas.

Si dans la fonction de Green G de (1, 24) nous mettons en évidence la largeur l de l'intervalle en écrivant $G(x, y; l)$,

alors le principe de Huyghens appliqué à la propagation de la chaleur dans un fil fini, donne lieu à la relation

$$G(x, y; l) = G(x_0, y; l) * G(x - x_0, y; l - x_0) \quad (0 < x_0 < x < l)$$

qui, explicitement écrite, représente une relation assez compliquée entre des fonctions \mathfrak{S}_3 (Doetsch [11]).

Si l'on applique le principe de Huyghens dans la direction des y au lieu de celle des x , on obtient pour la fonction $\Gamma(x, \xi; y)$ de (1, 25) le théorème transcendant d'addition (Doetsch [1], p. 51):

$$\int_0^l \Gamma(x_1, \xi; y_1) \Gamma(\xi, x_2; y_2) d\xi = \Gamma(x_1, x_2; y_1 + y_2)$$

pour $0 < \frac{x_1}{x_2} < l$ et $\frac{y_1}{y_2} > 0$.

2. — *Le principe d'Euler* (Doetsch [9]) détermine une solution dans le même domaine de base au moyen de deux espèces de conditions sur la frontière, par exemple une fois par les valeurs sur la frontière de la fonction elle-même, puis par celles d'une de ses dérivées. On obtient ainsi par identification une relation en général transcendant. Envisageons par exemple (Doetsch [9], p. 340) la distribution de la température dans un fil de longueur un, distribution qui satisfait aux conditions suivantes sur la frontière

$$\lim_{y \rightarrow 0} u = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u = 2y \mathfrak{S}_3(0, y) + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Elle sera donnée par

$$u(x, y) = -[2y \mathfrak{S}_3(0, y) + 1] * \frac{\partial \mathfrak{S}_3\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x}.$$

Puisqu'on a pour cette fonction

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = -\mathfrak{S}_3(0, y) - 1,$$

l'on peut déterminer u aussi par les conditions suivantes sur la frontière

$$\lim_{y \rightarrow 0} u = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = -\mathfrak{S}_3(0, y) - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La solution de ce problème s'écrit ainsi:

$$u(x, y) = [\vartheta_3(0, y) + 1] * \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right),$$

et l'identification des deux expressions pour u donne la relation

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right) * [\vartheta_3(0, y) + 1] + \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, y\right)}{\partial x} * [2y \vartheta_3(0, y) + 1] = 0.$$

Pour $x \rightarrow 0$ cette relation se transforme en une équation intégrale pour $\vartheta_3(0, y)$:

$$\vartheta_3(0, y) * [\vartheta_3(0, y) + 1] - 2y \vartheta_3(0, y) - 1 = 0$$

indiquée par F. BERNSTEIN (Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 1920, pp. 735-747). Pour d'autres exemples et pour une autre méthode de gagner de telles relations transcendantes par des transformations fonctionnelles, voir Doetsch [11].

V. — LE CARACTÈRE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS.

1. — WEIERSTRASS [1] a montré en 1885 que la solution dans le demi-plan $y > 0$ de l'équation (1,21) de la chaleur avec les valeurs $\Phi(x)$ sur la frontière $y = 0$, représente sur chaque horizontale une fonction entière analytique en x . Plus explicitement: La solution donnée par la formule classique de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x - \xi, y) \Phi(\xi) d\xi, \quad (5, 1)$$

où χ désigne la fonction (3,331), a cette propriété. A cause de nos expériences sur la multiplicité des solutions nous nous trouvons obligés de nous servir de cet énoncé plus prudent. Weierstrass établit la même propriété pour la solution (1,23), si les températures $A(y)$ et $B(y)$ s'annulent.

Holmgren montra en 1905 ([1] et plus explicitement dans [3]) qu'une solution *régulière* (voir p. 50) de (1,21) représente sur

chaque horizontale une *fonction analytique de x*; d'une manière plus précise: soit $u(x, y)$ une solution de (1,21), régulière dans un domaine \mathfrak{D} et supposons le segment $x = x_0$, $a \leq y \leq b$ entièrement intérieur à \mathfrak{D} . Alors, dans un certain rectangle

$$|x - x_0| < d, \quad a \leq y \leq b$$

u est développable en série de puissances

$$u(x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v(y)}{v!} (x - x_0)^v.$$

Cette série a donc sur chaque horizontale $y = \text{const.}$ un rayon de convergence égal au moins à d .

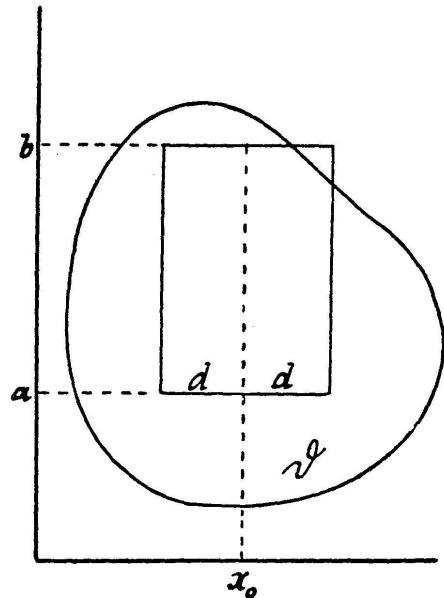


Fig. 4.

2. — Holmgren [1] donna à ce résultat une interprétation inattendue et très importante. Tout d'abord, comme toutes les dérivées par rapport à x existent, il découle de $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que toutes les dérivées par rapport à y existent aussi et satisfont aux relations:

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Puisqu'on a

$$c_v(y) = \left. \frac{\partial^v u}{\partial x^v} \right|_{x=x_0},$$

il en résulte: En posant

$$u|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

on trouve

$$c_{2n}(y) = \varphi^{(n)}(y), \quad c_{2n+1}(y) = \varphi_1^{(n)}(y)$$

de façon que la solution a la même forme que pour le problème de Cauchy dans le cas analytique connu:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(y)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(y)}{(2n+1)!} (x - x_0)^{2n+1}. \quad (5, 21)$$

D'après les inégalités de Cauchy pour les coefficients on a

$$\frac{|c_n|}{n!} \leqq \frac{M}{d^n},$$

où M est la borne supérieure de u dans le rectangle, et par conséquent

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leqq M \frac{(2n)!}{d^{2n}}, \quad |\varphi_1^{(n)}(y)| \leqq M \frac{(2n+1)!}{d^{2n+1}}. \quad (5, 22)$$

Cela signifie qu'une solution régulière représente sur chaque segment *vertical* entièrement intérieur au domaine de régularité, une fonction $\varphi(y)$ *dérivable un nombre illimité de fois et dont les dérivées admettent les majorantes* (5,22), avec les valeurs M et d indépendantes de y . (La même chose a lieu pour $\frac{\partial u}{\partial x}$).

3. — Les remarques suivantes se rattachent immédiatement à ce dernier fait:

1. A côté de l'inégalité (5,22) pour $\varphi^{(n)}(y)$ on envisagera celle pour les dérivées d'une fonction *analytique* $f(y)$:

$$|f^{(n)}(y)| \leqq M \frac{n!}{\rho^n}. \quad (5, 31)$$

Mais une fonction pour laquelle (5,22) est valable, n'est pas nécessairement analytique et même pas, comme l'on pourrait croire, *quasi-analytique* dans le sens de Carleman. Car alors ses valeurs sur un petit intervalle devraient définir d'une manière univoque la répartition de ses valeurs partout. Or la solution (3,61) nous montre qu'en général ce n'est pas le cas pour φ . C'est que, si nous remplaçons $A(y)$ pour $y > y_0$ par une autre fonction, u conserve bien sa valeur pour $0 < y \leqq y_0$, mais ne la conserve pas pour $y > y_0$.

2. Les deux inégalités (5,22) et (5,31) conduisent à envisager d'une manière plus générale (Holmgren [3]) des fonctions $f(z)$, dérivables une infinité de fois dans un intervalle et satisfaisant dans cet intervalle à l'inégalité

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{\Gamma(\alpha n + 1)}{r^n},$$

qui est équivalente à

$$|f^{(n)}(z)| \leq M \frac{(n!)^\alpha}{r^n},$$

avec $\alpha \geq 1$. Gevrey ([1], chap. III, et [2]) appelle ces fonctions *fonctions H de la classe α* . A l'exception de la classe $\alpha = 1$, qui donne les fonctions analytiques, elles ne sont pas même quasi-analytiques, comme nous le montre l'exemple

$$f(z) = \int_0^z \Phi(\eta) e^{-\frac{1}{(z-\eta)^\beta}} d\eta \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(Holmgren [3], p. 5).

3. Gevrey [2] a étendu la notion de classe pour des *fonctions à un nombre arbitraire de variables*. Après que E. E. Levi ([3], § 9) eut démontré pour l'équation non homogène de la chaleur que z restait analytique en x au voisinage d'un point où $f(x, y)$ était analytique en x , Gevrey [2] montra pour l'équation linéaire la plus générale et d'autres équations très générales que, en gros, les propriétés de classe de l'équation se transmettaient aussi aux solutions. Ce serait trop long de vouloir reproduire ici ces résultats d'une très grande portée.

VI. — L'EXISTENCE DE LA SOLUTION.

Un théorème d'unicité énonce seulement qu'il y a *au plus* une solution. C'est un théorème d'existence qui doit décider si *en vérité* il y en a une.

Le problème de Cauchy.

Dans le cas *analytique* l'existence de la solution est toujours assurée, mais c'était un des premiers résultats des travaux

célèbres de Holmgren que le problème de Cauchy avec des données *non analytiques* n'a *pas nécessairement une solution* et qu'une condition nécessaire et suffisante de résolubilité peut être écrite. Le résultat pour l'équation homogène de la chaleur s'énonce ainsi (Holmgren [1]) :

Si les valeurs initiales

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x, y) = \varphi(y) , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(y)$$

sont données sur le segment $x = x_0$, $\alpha \leq y \leq b$, φ possédant une dérivée du premier ordre continue, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution régulière est la suivante :

$$\varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^y \frac{\varphi'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta$$

est une fonction \mathfrak{H} de la classe 2.

On peut donner une autre forme très intuitive à cette condition assez surprenante. Le second terme de cette somme n'est autre que la dérivée $D_y^{\frac{1}{2}}\varphi$ de Riemann-Liouville (on dérive φ une fois et on effectue une intégration d'ordre une demie). Tandis que l'équation différentielle elle-même peut s'écrire sous la forme

$$(D_x u + D_y^{\frac{1}{2}} u) (D_x u - D_y^{\frac{1}{2}} u) = 0 ,$$

la condition de Holmgren s'énonce ainsi :

$D_x u + D_y^{\frac{1}{2}} u$ doit, pour $x = x_0$, être une fonction \mathfrak{H} de la classe 2.

Holmgren ([3], p. 8) a généralisé ce résultat pour le cas où u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ seraient données sur une courbe et non pas sur un segment de droite et Gevrey ([2], chap. IV) l'a étendu à l'équation non homogène (1, 22) et a montré comment on pouvait traiter le problème pour l'équation linéaire la plus générale et des équations plus générales encore.

Le problème aux limites.

1. — Les équations paraboliques occupent une place intermédiaire entre les équations elliptiques et hyperboliques. Comme pour les équations elliptiques il suffit de nous donner sur la frontière seulement les valeurs de la fonction ou seulement celles d'une de ses dérivées ou bien seulement les valeurs de la fonction sur certaines parties de la frontière et seulement celles de la dérivée sur d'autres. Mais la valeur en un point ne dépend, comme pour les équations hyperboliques, que des valeurs sur la frontière située entre les deux caractéristiques correspondantes. Vu que ces dernières sont ici horizontales et coïncident, ce sont seulement les points de la frontière qui se trouvent en dessous ou bien en dessus des caractéristiques qui interviennent. Pour les équations linéaires en $\frac{\partial z}{\partial y}$ c'est le signe de $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui le décide. Si nous envisageons des domaines dans lesquels ce signe est négatif, il s'agit de *frontières courbes* \mathfrak{C} , *ouvertes vers le haut*. D'après E. E. Levi ([3], § 2) on distingue trois types:

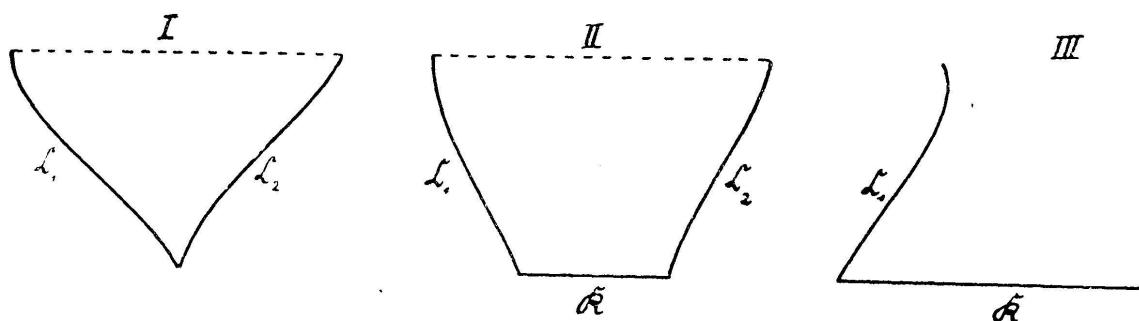


Fig. 5.

Premier type: \mathfrak{C} est composée de deux courbes, représentables sous la forme

$$\mathfrak{C}_1: x = \gamma_1(y) \quad \mathfrak{C}_2: x = \gamma_2(y) \quad (a \leqq y \leqq b),$$

qui se rencontrent en bas:

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a). \quad \text{On a } \gamma_1(y) < \gamma_2(y),$$

sauf pour $y = a$.

Deuxième type: \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 ne se rencontrent pas en bas, mais y sont reliées par un segment \mathfrak{R} de caractéristique.

Troisième type: La courbe \mathfrak{C}_2 est rejetée à l'infini et \mathfrak{C} ne se compose que de \mathfrak{C}_1 et d'un segment infini \mathfrak{K} de caractéristique.

Dans la suite nous supposerons $a = 0$. — Nous ne parlerons pas ici des courbes frontières du troisième type pour lesquelles certaines choses sont particulièrement simples, d'autres non encore expliquées (voir la remarque à la fin de III). Levi insiste sur les domaines du premier type (comme limite de domaines du deuxième type) et il les traite séparément, pour la raison seulement qu'à son avis certaines intégrales dont on se sert pour la démonstration d'existence n'ont pas de sens pour ces domaines. Je crois que cette opinion n'est pas juste et que la distinction est accessoire, au moins dans les cas considérés par Levi où les valeurs sur la frontière \mathfrak{C} sont continues, où par conséquent les valeurs dans les points inférieurs de \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 coïncident.

En ce qui concerne le *caractère des courbes* \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , on peut dire que les fonctions γ_1 et γ_2 (excepté au plus en un nombre fini de points)

sont analytiques chez Holmgren;
satisfont

chez Levi à une condition de Lipschitz d'ordre 1,
chez Gevrey à la même condition d'ordre α :

$$|\gamma(y) - \gamma(y')| \leq H |y - y'|^\alpha \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 .$$

Cette dernière condition s'explique par le fait que, essentiellement, il s'agit toujours de la convergence d'intégrales de la forme

$$\int_0^y \frac{\gamma(y) - \gamma(\eta)}{(y - \eta)^{3/2}} e^{-\frac{[\gamma(y) - \gamma(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} d\eta .$$

Sous l'hypothèse de Gevrey on a pour $0 \leq \eta < y$

$$0 < e^{-\frac{[\gamma(y) - \gamma(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \leq 1 , \quad \left| \frac{\gamma(y) - \gamma(\eta)}{(y - \eta)^{3/2}} \right| \leq \frac{H}{(y - \eta)^{3/2 - \alpha}} \\ \text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} - \alpha < 1$$

et par conséquent la convergence de l'intégrale.

Dernièrement PETROWSKY [1] a appliqué aux équations paraboliques la méthode de Perron, établie pour les équations elliptiques (ce qui antérieurement a été déjà fait par Sternberg). Il a démontré de cette façon l'existence de la solution de (1,21) pour des courbes encore plus générales et il a aussi montré que cette classe était la « meilleure » dans ce sens que si on la dépassait, on pourrait donner des valeurs continues sur la frontière telles qu'aucune solution ne pourrait exister.

2. — La *démonstration d'existence* (les valeurs sur la frontière étant continues) que Holmgren a imaginée et les démonstrations de Levi et Gevrey qui s'y rattachent, se sont inspirées de la *théorie du potentiel*. Le rôle de la *solution fondamentale* (qui pour un potentiel de volume est égale à $\frac{1}{r}$) est joué dans la propagation de la chaleur par la fonction $\chi(x, y)$ de (3,331). Elle représente la distribution de la température pour $y > 0$, si l'on suppose comme état initial une source de chaleur concentrée en $x = 0$. Au *potentiel d'une couche* correspondent des intégrales de la forme

$$P_0(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \chi(x - \xi, y) \Phi(\xi) d\xi \quad (\text{prise le long de la caractéristique } \mathfrak{K})$$

et

$$P_1(x, y) = \int_0^y \chi(x - \gamma(\eta), y - \eta) \Phi(\eta) d\eta \quad (\text{prise le long de } \mathfrak{C}_1 \text{ ou } \mathfrak{C}_2).$$

P_0 n'est pas définie sur $\mathfrak{K}(y = 0)$, mais a la valeur limite $\Phi(x)$ si l'on s'approche d'un point intérieur à \mathfrak{K} . P_1 est définie et continue aussi sur la courbe $x = \gamma(y)$. — Dans la théorie du potentiel on envisage à côté de $\frac{1}{r}$ aussi la dérivée de $\frac{1}{r}$, dérivée normale à la couche. A celle-ci correspond ici la fonction $\psi(x, y) = -\frac{\partial \chi}{\partial x}$ de (3, 311). Elle donne lieu à l'intégrale

$$P_2(x, y) = \int_0^y \psi(x - \gamma(\eta), y - \eta) \Phi(\eta) d\eta \quad (\text{prise le long de } \mathfrak{C}_1 \text{ ou } \mathfrak{C}_2),$$

qui correspond au *potentiel de double couche*. Cette intégrale a, comme dans la théorie du potentiel, des valeurs limites si (x, y) tend vers la courbe $x = \gamma(y)$, qui d'ailleurs sont différentes suivant qu'on s'en approche par la droite ou par la gauche:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0, \\ x \rightarrow \gamma(y_0) \pm 0}} P_2(x, y) = \pm \Phi(y_0) + \\ + \int_0^{y_0} \psi(\gamma(y_0) - \gamma(\eta), y_0 - \eta) \Phi(\eta) d\eta.$$

Pour $\gamma(y) = \text{const.}$ ceci est un résultat classique, pour le cas général il est donné par E. E. Levi ([2]; [3], p. 211) et Holmgren ([3], p. 6).

Avec cela on gagne le point de départ pour des démonstrations d'existence. Holmgren [2] se donne les valeurs $A(y)$ et $B(y)$ sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , la valeur zéro sur \mathfrak{K} (on peut toujours y arriver par soustraction d'une intégrale de la forme P_0) et prend la solution de l'équation (1, 21) sous forme d'une somme de deux potentiels de chaleur de la forme P_1 , sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 :

$$u(x, y) = \int_0^y \chi(x - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y \chi(x - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta.$$

Il en tire, en vertu de leur continuité sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , les deux conditions:

$$A(y) = \int_0^y \chi(\gamma_1(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta) dy + \\ + \int_0^y \chi(\gamma_1(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta,$$

$$B(y) = \int_0^y \chi(\gamma_2(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta) d\eta + \\ + \int_0^y \chi(\gamma_2(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta) d\eta.$$

C'est un système de deux équations intégrales de Volterra de première espèce pour les densités inconnues Φ_1 et Φ_2 . Holmgren le transforme, suivant le procédé de Volterra, en un système d'équations intégrales de seconde espèce dont la résolubilité est assurée.

E. E. Levi ([2]; [3], § 5) donna plus tard une démonstration d'existence basée sur la même idée, qui suit de plus près encore le procédé indiqué par Neumann pour le potentiel ordinaire. Il pose u comme différence de deux intégrales P_2 , donc comme potentiel de double couche:

$$u(x, y) = \int_0^y \psi(x - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Psi_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \psi(x - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Psi_2(\eta) d\eta$$

et obtient, conformément à ce qui a été dit plus haut sur la valeur limite de P_2 sur les courbes \mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_2 , les conditions:

$$A(y) = \Psi_1(y) + \int_0^y \psi(\gamma_1(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Psi_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \psi(\gamma_1(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Psi_2(\eta) d\eta, \\ B(y) = \Psi_2(y) + \int_0^y \psi(\gamma_2(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Psi_1(\eta) d\eta - \\ - \int_0^y \psi(\gamma_2(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Psi_2(\eta) d\eta.$$

Ces équations intégrales pour Ψ_1 et Ψ_2 sont *a priori* de seconde espèce, de façon que leur résolubilité est évidente.

Holmgren [3] appliqua la même méthode aux cas où sur \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 est donnée la valeur de u ou de $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou encore une combinaison linéaire de u et $\frac{\partial u}{\partial x}$.

3. — Ces résultats ont à nouveau beaucoup à faire avec la question de l'*unicité*. Il semble d'après cela que pour des valeurs

continues données sur la frontière, la solution pourrait bien être unique. Cette contradiction réfutant la non-unicité s'explique par le fait que cette méthode n'est applicable qu'aux solutions représentables par des potentiels de chaleur. Holmgren et Levi supposaient cela de chaque solution, mais ce n'est pas le cas pour nos solutions singulières! Supposons qu'on ait pour une solution singulière arbitraire $S(x, y)$:

$$S(x, y) = \Psi_1(y) * \psi(x, y) - \Psi_2(y) * \psi(1 - x, y)$$

(dans le cas de la demi-bande de largeur un nous pouvons bien écrire le point de départ de Levi sous cette forme). Si, y étant constant, on fait tendre x une fois vers zéro, puis vers un, alors:

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi_1(y) - \Psi_2(y) * \psi(1, y) , \\ 0 &= \Psi_1(y) * \psi(1, y) - \Psi_2(y) , \end{aligned}$$

d'où, en employant le théorème d'addition de Cesàro (voir p. 65):

$$\Psi_1(y) = \Psi_1(y) * \psi(2, y) , \quad \Psi_2(y) = \Psi_2(y) * \psi(2, y) .$$

Cela n'est possible que pour $\Psi_1 \equiv \Psi_2 \equiv 0$. Mais avec ces valeurs on aurait $S \equiv 0$.

4. — VOLTERRA ([1], p. 66) établit, d'après la méthode de Riemann de l'équation adjointe, une *formule de Green* pour la solution de l'équation non homogène (1, 22), qui à côté des valeurs sur la frontière de z contient aussi celles de $\frac{\partial z}{\partial x}$; il montra aussi ([1], p. 67) comment on peut éliminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur une frontière rectiligne en employant le principe des images de Lord Kelvin. E. E. Levi ([2]; [3], § 7) indiqua comment d'après cette méthode de Volterra on pouvait représenter la solution (de l'équation homogène) par ses valeurs sur la frontière, supposée polygonale, et arriver par un passage à la limite à des frontières arbitraires.

Gevrey ([1], n° 4) donna, plus explicitement encore, une *représentation de Green* de la solution de l'équation non homogène (1, 22); il le fait en introduisant une fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$, représentant une certaine solution de l'équation

adjointe et dont il établit l'existence à l'aide de la méthode de Holmgren indiquée plus haut, qui utilise les équations intégrales. Cette représentation est donnée par la formule

$$z(x, y) = - \int_{\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2}^{\frac{\partial G}{\partial \xi}} z(\xi, \eta) d\eta + \\ + \int_{\kappa}^{\Gamma} G z(\xi, 0) d\xi - \iint_{S_y} G f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6, 4)$$

S_y désignant la partie du domaine limité par $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{R} + \mathfrak{C}_2$ se trouvant en dessous de la caractéristique d'ordonnée y . (L'intégrale double représente la solution de l'équation non homogène qui s'annule sur la frontière).

5. — Cette représentation (6, 4) conduit Gevrey ([1], n° 19-24) à une *démonstration d'existence* pour la solution de l'équation linéaire générale (3, 21). Car si l'on remplace (en supposant $b = -1$) la fonction f par $-a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - c(x, y) z + f(x, y)$, alors (6, 4) donne :

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + \iint_{S_y} G \cdot \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz \right) d\xi d\eta, \quad (6, 51)$$

où ζ représente la solution de (1, 22) avec les mêmes valeurs sur la frontière. Avec cela on établit pour z une équation intégro-différentielle qui est résoluble, si certaines hypothèses sur la frontière, les coefficients et les valeurs aux limites sont satisfaites.

L'équation parabolique générale (1, 1) et surtout le type plus particulier

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}) \quad (6, 52)$$

peuvent alors être traités par la méthode qu'on emploie aussi pour des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire en les rendant « comparables » à l'équation linéaire en supposant satisfaites des conditions de Lipschitz (Gevrey [1], n° 28-34).

Récemment, une autre méthode a été employée par SIDDIQI [1]

dans le cas de la demi-bande et d'une solution s'annulant aux extrémités $x = 0$ et $x = \pi$. En posant

$$z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(y) \sin nx$$

il réduit l'équation (6, 52) à un système infini d'équations intégrales, qui est résolu par des approximations successives.

VII. — PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

1. — Soit $z(x, y)$ une fonction satisfaisant dans un domaine \mathfrak{G} à une équation parabolique. S'il existe un domaine \mathfrak{G}_1 contigu à \mathfrak{G} le long d'un arc AB, et une fonction $\bar{z}(x, y)$ satisfaisant dans $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_1$ à la même équation et identique à z dans \mathfrak{G} , nous dirons que z est *prolongeable* au travers de AB. C'est ainsi que Holmgren définit cette notion, en supposant d'ailleurs la *régularité* de z et \bar{z} . L'on pourrait aussi définir la possibilité d'un prolongement de la manière suivante: Il doit exister une fonction $z_1(x, y)$ satisfaisant dans \mathfrak{G}_1 à l'équation différentielle qui, ainsi que certaines de ses dérivées, se raccorde d'une façon continue avec z ; l'équation différentielle doit être satisfaite aussi sur AB.

L'*exemple* suivant montre l'importance de la manière d'envisager le prolongement et le raccord continu le long de AB:

La fonction $z \equiv 0$ satisfait dans \mathfrak{G} : $0 < x < x_0$, $y > 0$, à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et a, ainsi que toutes ses dérivées, la valeur zéro sur la frontière donnée par $x = x_0$.

La fonction $z_1(x, y) \equiv \psi(x - x_0, y + \alpha)$ avec $\alpha \geq 0$ satisfait dans le domaine adjacent

$$\mathfrak{G}_1 : x > x_0, y > 0$$

à la même équation différentielle et possède le long de la droite $x = x_0$ la valeur zéro. Mais que font les dérivées? Si l'on complète z_1 par sa valeur sur la frontière, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ existe le long de $x = x_0$ (du côté droit) et a la valeur $\frac{1}{2\sqrt{\pi}(y + \alpha)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ existe

également et a la valeur zéro. Puisqu'on a aussi $\frac{\partial z_1}{\partial y} = 0$ sur $x = x_0$, il en résulte que

- 1) l'équation différentielle est satisfaite sur $x = x_0$,
- 2) pour le passage de z à z_1 le raccord continu des dérivées intervenant dans l'équation différentielle a lieu.

Par contre la dérivée par rapport à x , qui n'intervient pas dans l'équation différentielle, n'est pas continue. Si sa continuité n'est pas expressément exigée, on peut prolonger z d'une infinité de manières ($\alpha \geq 0$ est arbitraire), prolongements qui ne donnent alors évidemment pas de fonctions régulières et de ce fait analytiques en x .

2. — *L'aspect du problème du prolongement est complètement différent suivant qu'on exige que le prolongement soit fait vers la droite ou la gauche ou bien vers le bas, c'est -à-dire si l'on veut traverser une des courbes \mathfrak{C}_1 , \mathfrak{C}_2 ou bien la caractéristique \mathfrak{R} ; ceci est en rapport avec le fait que, pour l'équation (1, 21) par exemple, un u régulier est bien analytique dans la direction des x , tandis qu'il appartient seulement à la classe 2 dans la direction des y . Si \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont, comme toujours dans la physique, des droites perpendiculaires $x = 0$ et $x = l$, il s'agit une fois d'une extrapolation de l'état de température plus loin que les extrémités du fil (« räumliche Fortsetzung »), la seconde fois de la reconstitution d'un état antérieur à l'état initial observé (« zeitliche Zurückverfolgung »), deux cas d'importance capitale en physique.*

Envisageons d'abord le prolongement au travers de \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 , par exemple au travers de \mathfrak{C}_1 . Pour cela Holmgren [3, 4] obtint le beau résultat suivant:

Si \mathfrak{C}_1 est représentable par une fonction analytique $x = \gamma_1(y)$, $a \leq y \leq b$, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution $u(x, y)$ régulière dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ (voir page 51) de l'équation (1, 21) puisse être prolongée au travers de \mathfrak{C}_1 vers la gauche, s'énonce ainsi: Les valeurs que u prend sur chaque arc plus petit: $a < \alpha \leq y \leq \beta < b$, définissent une fonction $f(y)$ qui possède

dans $\alpha \leq y \leq \beta$ toutes les dérivées et représente une fonction \mathfrak{H} de la classe 2.

La démonstration se base essentiellement sur le théorème d'unicité du problème de Cauchy. Il est donc nécessaire de prendre les hypothèses assez étroites pour que l'unicité soit effectivement assurée.

L'unicité du prolongement lui-même résulte de l'analyticité de u dans la direction des x .

Gevrey ([1], nos 57, 58) a étendu cela à l'équation linéaire générale.

Pour le *cas physique* où le domaine primitif est formé par une demi-bande $0 < x < l, y > 0$ l'on peut donner au problème du prolongement un *autre aspect* (Doetsch [1], p. 48). Exigeons de nos solutions au moins que l'unicité soit hors de doute et que la solution du problème aux limites soit représentée par la formule classique (1, 23). Pour simplifier nous supposerons que les valeurs s'annulent sur les frontières $x = l$ et $y = 0$; nous pouvons toujours arriver à cela par soustraction des termes relatifs à ces frontières de la formule (1, 23), termes qui, d'ailleurs, sont prolongeables au travers de la frontière $x = 0$. Si l'on peut maintenant prolonger u vers la gauche jusqu'à une droite $x = -\alpha$ incl. et cela de façon à ce que les valeurs initiales restent nulles sur le prolongement de la frontière inférieure, alors on peut considérer la droite $x = -\alpha$ comme frontière à gauche. Alors la température pour $x \geq 0$ ou bien, puisque ça suffit, pour $x = 0$ doit être représentable au moyen de la température sur la nouvelle frontière. Si l'on change la notation des abscisses cela peut s'exprimer ainsi: La formule classique

$$u(x_0, y) = A(y) * G(x_0, y)$$

est, si les valeurs zéro sont données à droite et en bas, solution du problème qui consiste à évaluer, à partir de la température sur la frontière $x = 0$ à gauche, la température en chaque point x_0 placé plus à droite. Posons maintenant le problème inverse: Quelle température $A(y)$ doit être placée à la frontière $x = 0$, pour qu'on trouve en x_0 précisément la température $u(x_0, y)$? Cela revient évidemment à la résolution d'une équation intégrale

de première espèce de Volterra, mais qui ne se laisse pas transformer de la façon habituelle par dérivation en une équation de seconde espèce, puisque toutes les dérivées de $G(x_0, y)$ s'annulent pour $y = 0$. On peut cependant ramener cette équation intégrale à une autre de noyau $\psi(x_0, y)$ plus simple (Doetsch [5]), qui correspond d'ailleurs au cas du fil indéfini, et énoncer pour cette dernière ce qui suit (Doetsch [6]):

Pour qu'elle possède une solution il est nécessaire que toutes les dérivées par rapport à y de $u(x_0, y)$ existent pour $y \geq 0$ et s'annulent, comme d'ailleurs $u(x_0, y)$ elle-même, pour $y = 0$. Si la série suivante, procédant suivant des quotients différentiels d'ordre fractionnaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} D^{\frac{n}{2}} u(x_0, y)$$

converge pour $y \geq 0$ et est intégrable terme à terme dans chaque intervalle fini, alors elle représente la solution $A(y)$ de l'équation intégrale.

Tandis que Holmgren ne démontre que l'existence du prolongement, lequel peut rester indéterminé jusqu'où ce prolongement peut être effectué, nous donnons ici une expression explicite pour la solution, à condition que l'étendue du prolongement soit déterminé *a priori*. Mais c'est précisément cela qui est donné pour des problèmes physiques: si par exemple l'extrémité $x = 0$ est «inaccessible» et que l'on veuille déterminer sa température à partir de celle qui a été constatée en un point «accessible» x_0 .

3. — Envisageons maintenant le *prolongement au travers de \mathfrak{K}* ! Supposons ici tout de suite que \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 sont deux droites verticales g_1 et g_2 . Pour ce cas Gevrey ([1], no 59) déjà a remarqué que le prolongement n'est pas univoque si l'on ne connaît pas les valeurs de u sur les prolongements vers le bas de g_1 et g_2 . Pour la possibilité d'un prolongement il trouve comme condition nécessaire et suffisante ([1], no 60) que les valeurs de u sur \mathfrak{K} , \mathfrak{K} étant située dans un plan complexe des x , doivent définir une fonction analytique dans le carré construit sur \mathfrak{K} comme

diagonale. Nous pouvons cependant donner un résultat plus complet, qui en plus n'exige pas l'introduction du domaine complexe (Doetsch [4]). Supposons tout de suite que u s'annule sur les droites g_1 et g_2 , à quoi on peut toujours arriver par une soustraction de solutions appropriées. Si l'unicité de u et la possibilité de lui appliquer la formule (1, 23) sont assurées et si u peut être reconstituée dans le temps jusqu'au temps négatif $-y_0$, alors l'ancienne température initiale $\Phi(x)$ pour $y = 0$ doit se laisser déduire de la température $u(x, -y_0)$ au moment $-y_0$, par la formule

$$\Phi(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi, y_0) u(\xi, -y_0) d\xi.$$

Si $\Phi(x)$ est donnée, c'est une équation intégrale de Fredholm de première espèce pour $u(x, -y_0)$ et nous en tirons le résultat suivant:

La température ne peut être reconstituée dans un passé antérieur à l'état initial $\Phi(x)$ que si $\Phi(x)$ est une fonction analytique, entière et périodique de période $2l$ avec $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ et $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$. Si on la développe en série de Fourier (convergente absolument et uniformément) de la forme

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{v=1}^{\infty} a_v \sin v\pi \frac{x}{l},$$

alors la température peut être reconstituée sans singularités pour des $y = -y_0$ négatifs aussi loin que

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(e^{-v^2 \pi^2 \frac{y_0}{l^2}} a_v \right)^2 \quad (7, 31)$$

reste convergente. Si Y est la coupure entre les y_0 de la convergence et de la divergence alors on obtient l'état de température pour $0 < y_0 < Y$ par la série de Fourier convergente absolument et uniformément en x :

$$u(x, -y_0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-v^2 \pi^2 \frac{y_0}{l^2}} \sin v\pi \frac{x}{l}. \quad (7, 32)$$

Si Y est une valeur pour laquelle la série (7, 31) converge encore, alors la série (7, 32) représente pour $y_0 = Y$ la valeur $u(x, -Y)$ au moins dans le sens de la convergence en moyenne.

4. — La reconstitution dans le passé de la température dans un *fil infiniment long des deux côtés* est d'intérêt particulier et cela à cause de ses applications pratiques multiples. APPELL [1] s'en est occupé en 1892, mais sans aller très loin. Si l'on ne considère que des fonctions pour lesquelles on peut employer la formule de solution de Poisson (5, 1), alors le problème est équivalent à la résolution de l'équation intégrale singulière

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_0}} u(\xi, -y_0) d\xi. \quad (7, 4)$$

Ce problème revient évidemment à une *décomposition spectrale* de la fonction $\Phi(x)$ en *courbes de Gauss* $\frac{1}{2\sqrt{\pi y_0}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_0}}$ (maximum toujours en ξ , mesure de précision $\frac{1}{y_0}$), et cela explique que le même problème se pose souvent dans le calcul des probabilités, en statistique, en physique, etc. Moi-même, j'étais amené à cette question par un problème de l'analyse spectrale (Doetsch [7]) et j'ai obtenu la solution, à partir de la solution pour un intervalle fini, par un passage à la limite peut-être assez audacieux. On obtient le même résultat si l'on remarque que l'équation intégrale (7, 4) est du « type de composition » (Faltungstypus) et admet par conséquent la transformation de Laplace ou celle de Fourier (voir DOETSCH [13]). Plus tard, P. LÉVY [1] s'est occupé de ce problème surtout du point de vue de la théorie des probabilités et sans tenir compte, semble-t-il, des recherches mentionnées plus haut; ses résultats ne sont, d'ailleurs, pas encore définitifs.

On pourrait encore dire beaucoup de choses sur les solutions dans un intervalle infini d'un ou de deux côtés et montrer quelques problèmes importants qui ne sont pas encore résolus. Je dois ici m'en abstenir et réservé ce sujet pour une autre occasion.

BIBLIOGRAPHIE

P. APPELL.

1. Sur l'équation $\frac{\epsilon^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. — *Journ. de Math.* (4), 8 (1892), S. 187-216.

G. DOETSCH.

1. Ueber das Problem der Wärmeleitung. — *Jahresber. d. deutsch. Math.-Vrg.*, 33 (1925), S. 45-52.
2. Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung: Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. — *Math. Zeitschr.*, 22 (1925), S. 285-292.
3. Idem. II. Mitteilung: Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit. — *Math. Zeitschr.*, 22 (1925), S. 293-306.
4. Idem. III. Mitteilung: Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger Anfangstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes. — *Math. Zeitschr.*, 25 (1926), S. 608-626.
5. Idem. IV. Mitteilung: Die räumliche Fortsetzung des Temperaturablaufs. Bolometerproblem. (I. et IV. Mitt. en commun avec F. Bernstein). — *Math. Zeitschr.*, 26 (1927), S. 89-98.
6. Idem. V. Mitteilung: Explizite Lösung des Bolometerproblems. — *Math. Zeitschr.*, 28 (1928), S. 567-578.
7. Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. — *Zeitschr. f. Physik*, 49 (1928), S. 705-730.
8. Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluss einer Randerregung. — *Festschrift d. Techn. Hochsch. Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts*. Verlag Springer, 1929, S. 56-78.
9. Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion. — *Annali d. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa* (2), 2 (1933), S. 325-342.
10. Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül). — *Jahresber. d. deutsch. Math.-Vrg.*, 43 (1934), S. 238-251.
11. Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. — *Math. Zeitschr.*, 40 (1935), S. 613-628.
12. Integration von Differentialgleichungen mittels der endlichen Fourier-Transformation. — *Math. Annalen*, 112 (1935), S. 52-68.
13. Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. — *Math. Zeitschr.*, 41 (1936).

M. GEVREY.

1. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. — *Journ. de Math.* (6), 9 (1913), S. 305-471 et 10 (1914), S. 105-148.

2. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. — *Annales de l'Ec. Norm. Sup.* (3), 35 (1918), S. 129-190.

J. HADAMARD.

1. Principe de Huyghens et prolongement analytique. — *Bull. d. l. Soc. Math. de France*, 52 (1924), S. 241-278.

E. HOLMGREN.

1. Om Cauchys problem vid de lineära partiella differentialekvationerna af 2: dra ordningen. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 2 (1905-06), Nr. 24.
 2. Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 3 (1906-07), Nr. 12.
 3. Sur l'équation de la propagation de la chaleur. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 4 (1908), Nr. 14.
 4. Idem. Deuxième note. — *Arkiv för Mat., Astr. och Fys.*, 4 (1908), Nr. 18.

E. E. LEVI.

1. Sul problema di Cauchy. — *Rend. d. R. Acc. d. Lincei* (5), 16 (1907), S. 105-112.
 2. Sul equazione del calore. — *Rend. d. R. Acc. d. Lincei* (5), 16 (1907), S. 450-456.
 3. Sul equazione del calore. — *Annali di Mat.* (3), 14 (1908), S. 187-264.

P. LÉVY.

1. Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène. — *Annali d. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa* (2), 1 (1932), S. 283-296.

I. PETROWSKY.

1. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung. — *Compositio Mathematica*, 1 (1935), S. 383-419.

M. PICONE.

1. Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine. — *Annali di Mat.* (4), 7 (1929-30), S. 145-192.

H. POINCARÉ.

1. *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Paris, 1895.

M. R. SIDDIQI.

1. Zur Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus. — *Math. Zeitschr.*, 35 (1932), S. 464-484.

V. VOLTERRA.

1. *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*. Paris, 1912.

K. WEIERSTRASS.

1. Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. — *Sitzungsber. d. Berliner Akademie*, 9 et 30 juillet 1885; *Math. Werke*, 3. Bd., S. 1-37.