

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique
Autor: Hadamard, J.
Kapitel: X
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27304>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

dont nous sommes en train de parler, on ne pouvait pas affirmer, en toute rigueur, qu'une équation *non analytique* de la forme (1) (supposée algébriquement vérifiable) admet toujours des solutions, puisque la seule réponse classiquement connue est celle que fournit le théorème de Cauchy-Kowalewsky. On n'avait jamais répondu à une question de ce genre, même pour une équation linéaire, jusqu'aux importants Mémoires [1, 27] dans lesquels M. Serge Bernstein et le regretté Lichtenstein ont établi la possibilité de la représentation conforme pour une portion de surface non analytique.

On verra dans les conférences suivantes comment le problème est résolu dans le cas elliptique. La réponse, pour le cas hyperbolique résulte des travaux que nous venons de citer.

X

Après nous être demandé si la solution du problème de Cauchy¹ existe, nous avons à nous demander si elle est unique (le cas caractéristique excepté, bien entendu). La question se pose même lorsque toutes les données du problème sont analytiques, car le théorème de Cauchy-Kowalewski affirme seulement qu'il n'y a qu'une seule solution *holomorphe*.

Pour une équation linéaire à coefficients analytiques², le théorème en question — autrement dit, le fait qu'une telle équation (supposée sans second membre) n'admet, pour des données de Cauchy nulles, d'autre solution que zéro — a été établi par M. HOLMGREN [23a].

Il suffirait d'ailleurs, comme on le constate aisément [20c], de l'établir pour une équation linéaire à *coefficients quelconques*: la question serait, du même coup, élucidée pour le cas général.

Une Note de HAAR [19a, b] ouvre une première voie à cet effet en résolvant le problème pour l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (pour laquelle les méthodes clas-

¹ En ce qui regarde le problème de Dirichlet pour le type hyperbolique nous avons, plus haut, constaté des cas d'indétermination.

² M. HOLMGREN opère, ainsi qu'il est légitime, sur un système d'équations linéaires analytiques du premier ordre.

Une méthode particulière, d'une nature toute différente, s'applique [20b] au cas spécial de l'équation (5).

siques ne fournissent de réponse que si la fonction inconnue est supposée au moins deux fois dérivable, ce que Harr montre n'être pas nécessaire).

La méthode employée fournit d'ailleurs une conclusion plus précise que le théorème d'unicité. Pour une équation à deux variables indépendantes, si un segment de la droite $x = 0$ n'est nulle part tangent à une caractéristique, non seulement deux solutions de l'équation coïncidant le long de ce segment doivent, par cela même, coïncider dans toute une région du plan avoisinant, mais, dans la même région, les valeurs obtenues pour la solution dépendent continûment des valeurs données sur le segment.

Seulement, cette précision de plus, cette augmentation de « compréhension », pour employer le langage des logiciens, limite nécessairement par ailleurs la portée de la méthode, autrement dit, son « extension ». Nous avons vu, en effet, que pour l'équation des potentiels (5), cette continuité de la solution par rapport aux données *n'a pas lieu*. On ne peut donc songer à employer, dans un tel cas, la méthode de Haar.

L'objection ne vaut pas pour le cas hyperbolique, auquel, en effet, M. O. Perron a pu appliquer [32] une analyse toute semblable à celle de Haar.

Mais des résultats beaucoup plus décisifs se dégagent des recherches [26] de M. Hans LEWY (entreprises partiellement en collaboration avec M. K. FRIEDRICHS). Dans le cas hyperbolique, la méthode de M. Hans Lewy, tout en démontrant comme nous l'avons dit l'existence de la solution, en démontre en même temps l'unicité. La démonstration repose sur une analyse des plus intéressantes en elle-même par la portée et la souplesse toutes nouvelles qu'elle donne à l'intégration par approximations successives: l'auteur établit en effet l'existence d'une solution unique pour le problème de Cauchy relatif à n'importe quel système de $m = m' + m''$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes et à m inconnues, de la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= a_1^{i'} u_1 + \dots + a_m^{i'} u_m, & (i' = 1, 2, \dots, m') \\ \frac{\partial u_{i''}}{\partial \eta} &= a_1^{i''} u_1 + \dots + a_m^{i''} u_m, & (i'' = m' + 1, \dots, m) \end{aligned} \right\} (16')$$

Les coefficients a pouvant soit être fonctions des seules variables indépendantes ξ , η , soit dépendre des inconnues u elles-mêmes, et la ligne qui porte les données étant assujettie à ce que ξ et η varient chacun d'une façon monotone (ou au contraire, à être formée d'un segment de parallèle à l'axe des ξ et d'un segment de parallèle à l'axe des η). Le caractère remarquable de la méthode est que, le nombre total m des inconnues étant donné, le nombre m' peut être quelconque, c'est-à-dire que le partage des m équations correspondantes entre celles qui comportent une différentiation par rapport à ξ et celles qui comportent une différentiation par rapport à η peut être quelconque.

A l'aide de ce nouvel outil analytique, M. Hans LEWY peut démontrer, pour tout problème de Cauchy hyperbolique à deux variables indépendantes, à la fois l'existence et l'unicité de la solution. Il arrive à appliquer une méthode analogue au cas elliptique, mais dans des conditions notablement plus délicates, puisqu'il s'agit de démontrer l'unicité sans démontrer en même temps l'existence, celle-ci n'ayant pas lieu en général. Par contre, on démontre du même coup, dans ce cas, le théorème de M. Hilbert sur l'analyticité des solutions des équations du type elliptique, et cela par une voie particulièrement élégante et simple, en étendant la solution supposée connue au domaine complexe grâce à l'intégration d'un système de la forme (16'). Ceci fait, la démonstration d'unicité peut se ramener au fait connu que deux fonctions analytiques ne peuvent coïncider tout le long d'un arc de courbe déterminé quelconque sans être identiquement égales entre elles.

Mais, contrairement à ce qui se passait pour le cas hyperbolique, cette deuxième partie des recherches de M. Hans Lewy suppose l'équation donnée analytique. La solution de la question n'était donc pas complète, même pour deux variables indépendantes. Le complément nécessaire lui a été apporté par une note de M. CARLEMAN [7], le problème étant ramené, comme cela est toujours possible, à l'intégration d'un système de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha u + \beta v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma u + \delta v, \quad (17)$$

où on reconnaît, aux premiers membres, les premiers membres de l'équation de monogénéité de Cauchy et où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions continues définies dans un certain domaine convexe D . Moyennant une définition convenablement précisée de ce qu'on doit entendre par solution du système, on peut démontrer qu'une telle solution ne peut admettre ni un zéro d'ordre de multiplicité infini à l'intérieur de D , ni une infinité de zéros ayant un point d'accumulation intérieur à D . Il est donc en particulier impossible que u et v s'annulent simultanément en tous les points d'une ligne intérieure au domaine en question¹.

Le problème est donc élucidé d'une manière satisfaisante pour les équations à deux variables indépendantes: malheureusement, les méthodes de MM. Hans LEWY et CARLEMAN sont, par essence, limitées à ce cas, puisqu'elles reposent sur la distinction des caractéristiques en deux familles (réelles ou imaginaires) distinctes².

XI.

Dans toutes les étapes que nous venons de passer en revue, l'Analyse n'a pu progresser, conformément aux vues classiques de Poincaré, qu'en se laissant constamment guider par l'interprétation physique. Point de résultats où, au fond, la théorie pure et l'application concrète n'aient été solidaires l'une de l'autre et n'aient marché du même pas.

Il commence à en être autrement dans certaines recherches récentes. Il est d'abord un problème posé par l'application mécanique et où les principes généraux posés dans ce qui précède paraissent tomber en défaut, sans qu'on voie bien nettement quant à présent de quelle manière ils devront être complétés ou corrigés: c'est celui des marées, tel que le

¹ La méthode met également en évidence la propagation par ondes, c'est-à-dire le fait que la valeur de l'inconnue en un point voisin de la ligne qui porte les données dépend uniquement de ce que sont ces données le long d'un *certain arc* de cette ligne.

² Le cas linéaire, pour relativement classique qu'il soit, appellerait de nouvelles recherches. On sait que la démonstration d'unicité s'y fait par transformation d'intégrales de domaines en intégrales de frontières. Mais les intégrales utilisées ne sont pas les mêmes pour les problèmes elliptiques et pour les problèmes mixtes hyperboliques [45] et cette circonstance entraîne, en particulier, des difficultés lorsqu'on veut appliquer des méthodes de ce genre à des équations d'ordre supérieur et de type composite [20].