

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique
Autor: Hadamard, J.
Kapitel: IV
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27304>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IV

Doit-on conclure de ce qui précède que le théorème de Cauchy-Kowalewski cesse d'être valable dès qu'on ne suppose pas les données analytiques ?

La réponse n'est pas aussi simple ni aussi absolue. Au lieu de l'équation des potentiels, considérons l'équation des ondes sphériques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad (9)$$

qui gouverne les petites oscillations d'un milieu homogène remplissant tout l'espace. De telles oscillations seront parfaitement déterminées si l'on se donne les *conditions initiales*

$$u(x, y, z, 0) = g(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = h(x, y, z) \quad (10)$$

ce qui revient à se donner, à cet instant initial, les déplacements (infinitésimaux) et les vitesses des différentes molécules. On voit qu'on est précisément en présence des données de Cauchy. Or le problème ainsi posé admet une solution bien déterminée, donnée par la formule classique de Poisson. Etant donnée l'interprétation du problème, on ne saurait d'ailleurs concevoir qu'il en soit autrement et que l'existence de la solution soit subordonnée à l'analyticité des données initiales.

On ne saurait non plus concevoir, dans ce nouveau problème, l'intervention d'expressions analogues à celle que donne notre formule (8'), et qui se présenteraient forcément si les valeurs de la solution étaient profondément liées aux coefficients des développements de g et de h en séries entières. S'il en était ainsi, le phénomène de la propagation du son, qui est régi par l'équation (9), nous paraîtrait régi par le pur hasard et nous n'y pourrions reconnaître aucune loi, puisqu'il serait totalement bouleversé lorsque les données subiraient des altérations imperceptibles à nos moyens d'observation.

Ainsi, entre les équations (5) et (9), la différence apparaît totale sous le point de vue qui nous occupe ¹.

La signification physique de chacune de ces deux équations nous fait comprendre cette différence, puisqu'un problème physique relatif à un milieu régi par l'équation des ondes sphériques se traduit analytiquement par un problème de Cauchy tandis qu'aucun problème de Cauchy relatif à l'équation (5) n'est posé par l'application concrète. Celle-ci nous offre donc, et va continuer à nous offrir un guide sûr pour discerner la vérité au milieu de discordances aussi paradoxales, au premier abord, que celles qui précèdent.

Il nous importe cependant de savoir distinguer les unes des autres, par un critère d'ordre purement mathématique, les équations aux dérivées partielles qui se comportent de manière si différente, pour ne pas dire si opposée. C'est à quoi l'on arrive à l'aide de la forme caractéristique (3). L'examen de cette forme quadratique conduit à distinguer différents types d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

I. La forme quadratique (3) peut être *définie*, c'est-à-dire comprendre autant de carrés indépendants qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation, ces carrés étant tous du même

¹ Il est même impossible de poser d'une manière analogue le problème de Cauchy actuel et le problème de Dirichlet pour l'équation (5). Dans ce dernier, nous avons vu que la fonction g , représentant les valeurs données de la fonction cherchée le long de S , pouvait, par exemple, avoir des dérivées premières discontinues, et que de telles singularités s'effacent, se noient en quelque sorte, dès qu'on s'écarte si peu que ce soit de S en entrant dans le domaine Ω . Rien de pareil ne se produit pour l'équation des ondes sphériques: si une solution u de cette équation était continue ainsi que ses dérivées premières pour $t = +\varepsilon$, elle le serait aussi pour $t = 0$. C'est ce que l'on peut voir en écrivant la formule de Poisson à partir de $t = +\varepsilon$. Les discontinuités, pour les équations du type hyperbolique, ne s'effacent pas comme pour l'équation des potentiels: elles se propagent par ondes.

On ne peut pas, d'autre part, introduire des discontinuités du premier ordre, c'est-à-dire portant sur les dérivées premières, se produisant sur des hypersurfaces situées dans la région $t \geq 0$. Si de pareilles discontinuités étaient admises, les problèmes perdraient tout sens. Soit, en effet, S une telle hypersurface, à orientation d'espace (voir plus loin): des deux côtés de cette surface, on pourrait se poser le problème de Cauchy, les valeurs de u étant les mêmes de part et d'autre, mais les valeurs de la dérivée normale étant choisies arbitrairement de chaque côté. Il n'y a évidemment aucun intérêt à considérer comme une solution unique de l'équation l'ensemble des deux fonctions différentes ainsi formées dans les deux régions.

Les phénomènes qui obéissent à des équations telles que (9) peuvent donner lieu à des « ondes de choc » ou discontinuités du premier ordre. Mais les lois qui régissent cette sorte de discontinuités ne peuvent plus se déduire des seules propriétés mathématiques de l'équation: un appel direct aux principes dynamiques ou physiques qui régissent le phénomène est nécessaire pour les établir.

signe. L'équation aux dérivées partielles est alors dite du type *elliptique*.

II. Si le discriminant de la forme caractéristique est nul¹, c'est-à-dire si celle-ci ne comprend pas son nombre normal de carrés indépendants, l'équation est du type *parabolique*.

III. Enfin, si, le discriminant étant différent de zéro, la forme caractéristique est *indéfinie*, autrement dit si elle est susceptible de valeurs tant positives que négatives, les carrés dont elle se compose n'étant pas tous de même signe, on a affaire au type *hyperbolique*.

Toutefois, eu égard à ce dernier, une distinction est nécessaire. Toutes les équations aux dérivées partielles hyperboliques introduites par des applications dynamiques ou physiques appartiennent au type hyperbolique que nous appellerons *normal*, dans lequel la forme caractéristique a tous ses carrés de même signe à l'exception d'un seul. Dans ce cas, le cône caractéristique (ainsi qu'il arrive pour un cône du second degré dans l'espace ordinaire) se compose de deux nappes distinctes et divise l'espace en trois régions, deux intérieures et une extérieure, au lieu que, pour une équation hyperbolique non normale [9], le cône caractéristique ne se compose que d'une seule nappe et divise l'espace en deux régions seulement, aucune des deux ne méritant d'ailleurs plus que l'autre d'être dénommée intérieure².

Pour une équation hyperbolique normale, il y a, en chaque point, indépendamment des plans caractéristiques (c'est-à-dire tangents au cône caractéristique) deux sortes d'orientation de plans: ceux que, en s'inspirant de la Théorie de la Relativité, on peut appeler « orientés dans l'espace », c'est-à-dire qui sont extérieurs au cône caractéristique (un plan parallèle infiniment voisin coupant ce cône suivant une ellipse ou une surface fermée du genre ellip-

¹ En fait, on n'a jamais eu à considérer d'autres équations paraboliques que celles pour lesquelles la forme caractéristique est semi-définie, et qui correspondent aux équations du type hyperbolique que nous appelons normal.

² Certaines équations du type hyperbolique non normal ont été étudiées par M. COULON [9] et la plus simple d'entre elles, savoir $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}$, par M. HAMEL [21], cette dernière à propos d'un problème de Géométrie. Pour aucune d'entre elles, on ne connaît de problème correctement posé, au sens adopté dans ce qui précède.

soïde) et ceux qui sont « orientés dans le temps », c'est-à-dire qui coupent le cône caractéristique suivant deux génératrices. Une surface ou hypersurface S non caractéristique peut donc être elle-même, suivant la situation de son plan tangent en un quelconque de ses points, orientée dans l'espace ou orientée dans le temps.

Toutes les équations linéaires du type elliptique donnent lieu aux mêmes conclusions que l'équation des potentiels. Tout au moins, c'est ce que l'on peut démontrer par les mêmes méthodes lorsque l'équation est à coefficients analytiques, en formant d'abord une « solution élémentaire » analytique et holomorphe tant que les deux points dont elle dépend ne s'approchent pas l'un de l'autre. Il en sera de même pour la fonction de Green correspondant à un domaine quelconque, par exemple à celui qui est formé par la surface S et une portion de surface auxiliaire Σ , de sorte que le raisonnement présenté plus haut s'appliquera de nouveau. Il permettra encore de montrer que, la surface S qui porte les données étant analytique et la première donnée g étant choisie, la condition que le problème de Cauchy soit possible détermine la seconde donnée h à une fonction analytique près, c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$h = h_1 + H, \quad .$$

h_1 pouvant être calculé à l'aide de g et H étant nécessairement analytique. En particulier, si g est identiquement nul (ou analytique), h devra lui-même être analytique pour que le problème soit possible.

Il en est tout autrement pour les équations hyperboliques ou, plus exactement, du type hyperbolique normal. Pour toute équation de cette nature, une surface S à orientation d'espace en chacun de ses points permet de se poser un problème de Cauchy dans lequel les données ne sont assujetties à aucune condition d'analyticité.

Une circonstance curieuse se présente toutefois lorsque le nombre $n + 1$ des variables indépendantes augmente. Les formules de résolution du problème de Cauchy introduisent en effet les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{n + 1}{2}$ (si n est impair)

pour g et jusqu'à l'ordre $\frac{n-1}{2}$ pour h . Ceci, en toute rigueur, ne suffit pas pour démontrer que les fonctions g , h doivent être dérivables jusqu'à l'ordre en question pour que le problème soit possible; mais on peut démontrer en toute rigueur une conclusion très voisine de celle-là: par exemple, pour l'équation, à $n+1 = 2n_1$ variables, analogue à celle des ondes sphériques, la fonction g étant supposée identiquement nulle, si l'on prend la moyenne des valeurs de h sur une sphère quelconque de l'espace à n dimensions défini par $x = 0$, il faudra, pour la possibilité du problème, que cette quantité soit dérivable jusqu'à l'ordre n_1 par rapport au rayon de la sphère. Cette condition de possibilité assez inattendue établit une sorte de passage entre une équation de type hyperbolique normal, dont la forme caractéristique comprend un grand nombre de carrés d'un même signe contre un seul du signe contraire, et une équation du type elliptique dont la forme caractéristique a tous ses carrés du même signe et pour laquelle, l'une des données étant nulle, nous savons que l'autre doit être analytique.

Mais un autre correctif beaucoup plus important doit être apporté à notre constatation précédente. Comme nous l'avons dit, le problème de Cauchy relatif à l'équation (9) et à la multiplicité $t = 0$ permet de déterminer, en fonction des conditions initiales, les oscillations d'un milieu homogène *remplissant l'espace entier*. Si ce milieu — un gaz, pour fixer les idées — est au contraire limité par des parois solides — soit, par exemple, qu'il soit contenu dans un récipient soit, au contraire [13], que l'espace renferme une sphère solide pulsante —, le problème est autre. A la paroi solide considérée dans l'espace ordinaire correspond, dans l'espace-temps, un hypercylindre S_2 , et nous avons à déterminer l'inconnue u dans une région Ω de l'espace-temps limitée d'une part par S_2 , de l'autre par notre portion S_1 d'espace ordinaire considérée pour $t = 0$. Les conditions propres à déterminer u seront alors:

les données de Cauchy sur la portion d'espace ordinaire S_1 ;
sur S_2 , des données analogues à celle de Dirichlet, nous voulons dire une seule donnée (la valeur de u ou celle de sa dérivée normale ou une de leurs combinaisons linéaires, etc.) en chaque point.

Autrement dit, nous sommes ici en présence d'un *problème mixte*¹. Il en sera ainsi toutes les fois que, parmi les frontières limitant la région de définition de l'inconnue u , il y en aura d'orientées dans le temps, comme c'est le cas pour S_2 .

Les équations du type elliptique gouvernent les phénomènes d'équilibre (équilibre électrique, élastique, calorifique, etc.). Les équations du type hyperbolique normal gouvernent les phénomènes du mouvement ou, plus généralement, d'état variable avec intervention d'inertie ou de phénomène équivalent (inertie électro-magnétique), inertie grâce à laquelle les perturbations introduites dans le mouvement se propagent en général par ondes, c'est-à-dire, en langage mathématique, par caractéristiques.

Une seule exception à cet égard: les liquides parfaits. Dans ce cas, entièrement théorique d'ailleurs, le mouvement obéit à l'équation des potentiels (5), l'absence de caractéristiques réelles correspondant au fait que toute perturbation se propage de manière instantanée dans toute la masse, et non par ondes.

Mais, même dans ce cas du liquide incompressible parfait, l'influence de l'inertie sur le caractère du phénomène se manifeste dès qu'il y a une surface libre, surface dont on a à étudier le mouvement. Un beau et important Mémoire de M. Volterra [42] montre (du moins en ce qui concerne les petites oscillations) qu'on a alors affaire à un problème mixte: les parois mouillées introduisent des conditions aux limites analogues à celles de Dirichlet — d'une manière précise, des conditions de Neumann —, mais, à la surface libre, on a des conditions initiales (relatives à l'origine des temps) qui sont du type de Cauchy².

V

Le cas parabolique est celui qui se présente pour l'état variable de la propagation de la chaleur, laquelle se fait sans inertie, et

¹ Cette catégorie de « problèmes mixtes » est complètement différente de celle dont nous avons vu l'intervention dans le cas elliptique. Il serait utile d'introduire, pour deux idées aussi nettement distinctes, deux dénominations différentes.

² L'équation des potentiels s'applique au mouvement considéré dans toute la masse du liquide. Mais si, comme il est naturel de le faire en l'espèce, on porte son attention sur ce qui se passe à la surface libre, en prenant pour inconnue par conséquent l'altitude z de cette surface en fonction de x , y , t , on est conduit, comme nous l'avons fait voir précédemment [20e], à une équation intégral-différentielle, que ses propriétés rapprochent visiblement du type hyperbolique.