

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	35 (1936)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES
Autor:	Menger, Karl
Kapitel:	I. — Géométrie des distances et géométrie analytique ÉLÉMENTAIRE.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-27321

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

classiques et des problèmes dont s'occupe la plupart des mathématiciens.

Nous traiterons d'abord brièvement de quelques-uns des rapports entre la géométrie métrique et la géométrie analytique élémentaire des espaces ordinaires. Des remarques concernant l'algèbre et l'algèbre des vecteurs suivront. Nous passerons ensuite à l'étude de la convexité dont la théorie générale se lie étroitement à la géométrie axiomatique de l'espace ordinaire. Puis, toujours du point de vue des distances, nous introduirons la notion de courbure qui sera qualifiée pour servir de point de départ vers une géométrie différentielle. Nous terminerons par l'étude des lignes géodésiques qui nous fournira des résultats nouveaux très généraux relatifs au Calcul des variations.

I. — GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ÉLÉMENTAIRE.

En géométrie analytique élémentaire on prend comme point de départ de la théorie des espaces euclidiens à n dimensions la représentation de chaque point par n nombres x_1, x_2, \dots, x_n réels ou complexes selon qu'il s'agit de l'espace réel ou de l'espace complexe C_n . On appelle carré de la distance des points (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) le nombre¹

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 \quad (1)$$

en se réservant de prendre comme distance la racine carrée positive de l'expression précédente dans le cas où celle-ci est non négative. Nous appellerons *espace à carrés de distances complexes*² un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout

¹ Pour les espaces *unitaires* on fixe comme distance le nombre réel

$$(y_1 - x_1)(\bar{y}_1 - \bar{x}_1) + \dots + (y_n - x_n)(\bar{y}_n - \bar{x}_n)$$

en désignant par \bar{x} le conjugué $\xi - i\eta$ du nombre $x = \xi + i\eta$. Il est clair que du point de vue des distances cet espace unitaire à n dimensions est identique à un espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

² On peut généraliser cette notion et parler d'un espace à distances empruntées à un système donné S , par exemple à un corps de nombres au sens de l'algèbre abstraite ou à un groupe abstrait. Pour des applications au calcul des variations j'ai récemment étudié des espaces dont les distances ne satisfont pas à l'axiome de symétrie (Δ_2). On pourrait appeler les espaces satisfaisant aux axiomes (Δ_1) et (Δ_2) espaces à *distances*

couple p, q de deux de ses éléments il correspond un nombre \overline{pq}^2 (dit carré de la distance de p à q) assujetti aux conditions:

$$\overline{pp}^2 = 0, \quad (\Delta_1)$$

$$\overline{pq}^2 = \overline{qp}^2. \quad (\Delta_2)$$

Dans un espace à carrés de distances complexes tout ensemble F ne contenant qu'un nombre fini de points, disons k points p_1, p_2, \dots, p_k , est complètement caractérisé par les k^2 carrés des distances des points de F entre eux, nombres qui peuvent être rangés dans une matrice. Il résulte des conditions (Δ_1) et (Δ_2) que cette matrice est symétrique et que sa diagonale principale ne contient que des zéros. Une question qui se pose de façon naturelle est la suivante: Etant donnée une matrice $\| \alpha_{ij} \|$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$) jouissant des deux propriétés mentionnées, sous quelles conditions peut-on la réaliser par les points d'un espace euclidien complexe ou réel, c'est-à-dire trouver k points a_1, a_2, \dots, a_k de cet espace tels que $\overline{a_i a_j}^2 = \alpha_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$)?

Nous allons donner immédiatement la solution du problème plus général suivant¹: Etant donné un espace à carrés de distances complexes C (c'est-à-dire une matrice de nombres en général infinie), établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse l'appliquer sur un sous-ensemble de l'espace euclidien à n dimensions, et d'abord de l'espace complexe C_n . De façon précise, nous établirons les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à chaque point de C un point et un seul de C_n de sorte que (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) étant les points de C_n correspondant respectivement aux points p et q de C ,

symétriques complexes et réservé le nom d'espace à distances complexes à des ensembles dont la définition de la distance est assujettie à la condition (Δ_1) seule.

Une étude systématique des espaces à distances non symétriques, par M. NOVAK, paraîtra dans le cahier 8 des *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums.*, Wien, 1936.

¹ La caractérisation des espaces euclidiens réels et de leurs sous-ensembles au moyen des conditions (Δ^k) et (Δ_0^k) se trouve dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 113. Pour une nouvelle démonstration voir *Amer. Journ. of Math.*, 53, p. 721. Des remarques sur C_2 et $E_{2,1}$ se trouvent dans *Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums*, 2, p. 34; 4, p. 13; 5, p. 10, 16; les critères de $E_{n,-n}$ dans *Tôhoku Math. Journ.*, 37, p. 475. La caractérisation générale des sous-ensembles de C_n et $E_{n,s}$ que nous allons énoncer est due à M. WALD et se trouve dans son article, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 32.

le nombre \overline{pq}^2 donné avec l'espace C satisfasse toujours à la condition

$$\overline{pq}^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2.$$

Appelons déterminant des points p_1, p_2, \dots, p_k le nombre

$$\Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \overline{p_1 p_2}^2 & \overline{p_1 p_3}^2 & \dots & \overline{p_1 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_2 p_1}^2 & 0 & \overline{p_2 p_3}^2 & \dots & \overline{p_2 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_3 p_1}^2 & \overline{p_3 p_2}^2 & 0 & \dots & \overline{p_3 p_k}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{p_k p_1}^2 & \overline{p_k p_2}^2 & \overline{p_k p_3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour qu'un espace à carrés de distances complexes C puisse être appliqué sur un sous-ensemble de C_n il est nécessaire et suffisant que

$(\Delta_0^{n+3}) \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ pour tout système de $n+3$ points de C

$(\Delta_0^{n+2}) \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ pour tout système de $n+2$ points de C .

Appelons $E_{n,s}$ la partie de C_n constituée par les points $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, les nombres x_1, \dots, x_m étant réels, les nombres x_{m+1}, \dots, x_n purement imaginaires, m étant égal à $\frac{n+s}{2}$. Posons $x_j' = ix_j$ ($j = m+1, m+2, \dots, n$), x_j réel. Le nombre (1) devient alors

$$(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2 - (y_{m+1} - x_{m+1})^2 - \dots - (y_n - x_n)^2. \quad (1')$$

s est la signature de cette forme quadratique. Le $E_{n,s}$ est un espace à carrés de distances complexes tel que, pour chaque couple p, q de points, \overline{pq}^2 soit réel.

Nous dirons que l'ensemble F des k points p_1, p_2, \dots, p_k est de rang r s'il satisfait aux conditions (Δ_0^{r+2}) et (Δ_0^{r+3}) sans satisfaire (Δ_0^{r+1}) , c'est-à-dire si les déterminants de tous les systèmes de $r+2$ et de $r+3$ points de F sont nuls, mais s'il existe un système $r+1$ points dont le déterminant est différent de 0.

Pour qu'un espace où \overline{pq}^2 est toujours réel jouisse de la propriété d'être applicable sur un sous-ensemble de $E_{n,s}$ il est suffisant (et évidemment nécessaire) que *tout système de $n+3$ points de E* jouisse de cette même propriété; et pour qu'un système F de $n+3$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+3} soit applicable sur un système de $n+3$ points de $E_{n,s}$ il faut et il suffit, r désignant le rang de F, 1^o que l'on ait $r \leq n$ et que 2^o parmi les systèmes de $r+1$ points p_1, p_2, \dots, p_{r+1} de F pour lesquels $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{r+1}) \neq 0$ il en existe un, tel que la suite des nombres

$$\Delta(p_1) = -1, \quad \Delta(p_1, p_2), \quad \Delta(p_1, p_2, p_3), \quad \dots, \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{r+1})$$

ne contienne pas deux zéros consécutifs et que le nombre N des changements de signes qu'elle présente après la suppression des zéros éventuels satisfasse à l'inégalité

$$\frac{n+s}{2} + (r-n) \leq N \leq \frac{n+s}{2}.$$

Pour $s = n (= m)$ l'espace $E_{n,s}$ est évidemment l'espace euclidien réel à n dimensions, le nombre (1') étant $\sum_{j=1}^n (y_j - x_j)^2$ qui est toujours positif ou nul; on peut donc prendre comme distance (non négative) la racine carrée positive de cette expression. $E_{n,n}$ jouit en outre de la propriété que ses points sont métriquement distingués, c'est-à-dire que

$$p \neq q \text{ implique } \overline{pq}^2 \neq 0. \quad (\Delta_3)$$

Un espace à distances non-négatives et qui distingue métriquement les points est ce que M. FRÉCHET avait appelé un espace E. Voici une conséquence importante de la condition (Δ_3) : Une application d'un espace E sur un autre espace E conservant les distances est nécessairement biunivoque, c'est, comme nous dirons, une *congruence*. Un espace E qui peut être appliqué sur un sous-ensemble d'un espace E est donc applicable sur celui-ci au moyen d'une congruence et sera dit *congruent* à ce sous-ensemble¹.

¹ C'est ainsi que l'espace unitaire à n dimensions est congruent à l'espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

Le résultat énoncé plus haut contient donc comme cas particulier le théorème suivant concernant l'espace euclidien réel E_n ($= E_{n,n}$):

Pour qu'un espace E à distances non négatives et distinguant métriquement les points, soit congruent à un sous-ensemble de E_n il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$(\Delta_0^{n+3}) \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ pour tout système de $n+3$ points de E,

$(\Delta_0^{n+2}) \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ pour tout système de $n+2$ points de E,

$(\Delta^k) \quad \operatorname{sgn} \Delta(p_1, p_2 \dots, p_k) = (-1)^{k+1} \text{ ou } 0$

pour tout système de k points de E, où $k = 2, 3, \dots, n+1$.

Remarquons qu'un espace E contenant plus de $n+3$ points et satisfaisant aux conditions (Δ^k) pour $k = 2, 3, \dots, n+1$ et à (Δ_0^{n+2}) satisfait *eo ipso*¹ à la condition (Δ_0^{n+3}) . Pour qu'un espace séparable E soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de HILBERT il faut et il suffit que les conditions (Δ^k) soient satisfaites pour chaque entier k .

II. — LA THÉORIE DE LA CONVEXITÉ ET SES RELATIONS AVEC LA GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE.

Passons à l'étude de propriétés plus géométriques de l'espace et de ses sous-ensembles. Dans ce but nous considérons un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout couple d'éléments (« points ») p, q il corresponde un nombre réel \overline{pq} (« distance ») de p et q qui satisfait à la condition $\overline{pp} = 0$ pour tout p et à l'inégalité triangulaire $\overline{pq} + \overline{qr} \geq \overline{pr}$ pour chaque triplet de points. Nous appellerons un tel ensemble un *espace triangulaire*. Particulièrement importants sont les espaces triangulaires à distances symétriques, non négatives, et qui distinguent métri-

¹ Un espace à distances complexes satisfaisant à la condition (Δ_0^{n+2}) ne satisfait pas nécessairement à la condition (Δ_0^{n+3}) . On trouvera une étude des systèmes de $n+3$ points non congruents à $n+3$ points de E_n bien que $n+2$ quelconques de leurs points soient congruents à $n+2$ points de E_n dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 124. J'ai appelé de tels systèmes *pseudo-euclidiens*.