CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE [1]

(suite)

SUR LA STRUCTURE DES TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES DES SURFACES EN ELLES-MÊMES [2]

PAR

B. DE KERÉKJÁRTÓ (Szeged, Hongrie).

---

1. — *Généralités.* — Le problème fondamental de la topologie est de déterminer les conditions sous lesquelles deux configurations sont homéomorphes; l'homéomorphie des deux configurations sera établie par le moyen d'une transformation topologique (c'est-à-dire biunivoque et bicontinue). Ce problème est résolu pour les cas des lignes et des surfaces; grâce à ces résultats, on peut approfondir les recherches concernant les transformations des surfaces. Alors, les transformations ne seront plus considérées comme les seuls moyens qui servent à établir l'homéomorphie de deux surfaces, mais elles deviennent des êtres autonomes dont la topologie ouvre un champ important de recherches nouvelles. Il s'agit dans ces recherches — comme en toute question d'homéomorphie — de trouver des propriétés topologiques des transformations.

Une partie considérable de ces problèmes — d'une nature plutôt combinatoire — concerne la détermination des points

---

[1] Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut.

[2] Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

invariants, leurs classes et leurs indices. Après les résultats classiques de MM. BROUWER, BIRKHOFF et ALEXANDER, c'est M. J. NIELSEN qui a réussi à développer une théorie systématique de cette catégorie de problèmes par des méthodes remarquables par leur élégance et leur profondeur [**31**] [1].

Une autre partie beaucoup moins développée concerne la structure des transformations; nous essayons de donner dans la suite un résumé des problèmes et des résultats concernant la structure des transformations topologiques, et de signaler leurs relations avec d'autres questions de mathématiques. Nous faisons observer que les recherches profondes de MM. BIRKHOFF et P. SMITH [**2, 7**], importantes par leurs applications dynamiques, concernent surtout des transformations analytiques. Pour cette raison elles n'entrent pas dans le cadre de notre conférence.

2. — *Homéomorphie de deux transformations.* — Soient S et S′ deux surfaces homéomorphes, et soient T et T′ des transformations topologiques de ces surfaces en elles-mêmes. Les transformations T et T′ seront dites *homéomorphes* s'il existe une transformation topologique τ de S en S′ telle que T′ est la transformée de T par τ:

$$T' = \tau^{-1} T \tau \ .$$

Toutes les transformations topologiques homéomorphes entre elles forment un seul *type topologique* de transformations.

Le problème idéal est de reconnaître les conditions sous lesquelles deux transformations sont homéomorphes. Comme ce problème ne pourra pas être résolu dans sa généralité, on cherchera à déterminer des propriétés caractéristiques qui sont alors communes à toutes les transformations appartenant au même type topologique. L'ensemble, les classes et les indices des points invariants sont des caractéristiques; en voici encore quelques autres: la propriété d'une transformation d'appartenir à un groupe continu ou discontinu de transformations, d'admettre une racine carrée, d'être périodique de période n,

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la liste bibliographique placée à la fin du Mémoire.

etc.; la propriété d'une transformation que les images successives d'un point (obtenues par l'itération indéfinie de la transformation et de son inverse) convergent vers un seul point, ou qu'elles admettent des points d'accumulation dont l'ensemble possède une structure donnée, ou bien qu'elles forment un ensemble partout dense sur la surface.

D'une façon analogue, nous définissons l'homéomorphie de deux ensembles de transformations (T) et (T′) dont l'un comprend des transformations T de la surface S en elle-même, l'autre des transformations T′ de S′ en elle-même; les deux ensembles seront dits homéomorphes, s'il existe *une* transformation topologique τ de la surface S en S′ telle que les éléments de (T′) soient les transformés des éléments de (T) par τ. Cette définition s'applique, en particulier, si (T) et (T′) sont des *groupes*, et alors leur homéomorphie entraîne leur isomorphie holoédrique. Si les ensembles (T) et (T′) sont homéomorphes, toute transformation T est homéomorphe à une transformation T′, et vice versa. Mais on peut construire des exemples simples montrant que l'homéomorphie de chacune des transformations (T) avec une transformation de (T′) n'entraîne pas l'homéomorphie des ensembles (T) et (T′) parce que la transformation τ établissant l'homéomorphie entre deux éléments correspondants T et T′ n'est pas la même pour tout T.

3. — *Représentations conformes.* — Bien que le problème d'homéomorphie de deux transformations ne puisse pas être résolu généralement, on peut chercher des conditions de nature topologique sous lesquelles une transformation est homéomorphe à une transformation donnée de structure simple. M. Brouwer [**8**] a posé le problème de caractériser topologiquement les représentations conformes, c'est-à-dire de déterminer les conditions sous lesquelles une transformation est homéomorphe à une représentation conforme. Nous traiterons ce problème plus loin; ici nous le mentionnons seulement pour expliquer et justifier nos définitions.

Si S′ est une surface analytique, et si T′ est une représentation conforme de S′ en elle-même, l'homéomorphie entre T et T′ permet de considérer aussi T comme une représentation conforme.

Nous transportons, en effet, la métrique de S′, c'est-à-dire les angles et les distances définies en S′, sur la surface S, au moyen de la transformation τ qui établit l'homéomorphie entre T et T′. La transformation T de S en elle-même est alors une représentation conforme par rapport à cette métrique de S. On reconnaît facilement que la propriété d'une transformation d'être homéomorphe à une représentation conforme est très restrictive; par exemple, une transformation de S en elle-même, différente de l'identité, qui laisse invariants tous les points d'un domaine sur S ne peut être conforme dans aucune métrique.

Ici on voit immédiatement quelles raisons nous ont obligé à restreindre la définition de l'homéomorphie de deux transformations au cas des transformations des surfaces *en elles-mêmes.* Car si T est une transformation topologique quelconque d'une surface S en une autre surface S_1 (sans point commun avec S), on peut la considérer comme une représentation conforme de S sur S_1; par la transformation T elle-même, nous transportons une métrique de S, choisie arbitrairement, sur la surface S_1 et par cela T devient une représentation conforme de S sur S_1. Le caractère topologique des représentations conformes et biunivoques n'a donc un sens que s'il est restreint au cas des transformations des surfaces *en elles-mêmes.*

En ce qui concerne les représentations conformes et non biunivoques, il faut aussi dire que la détermination de leurs caractères au point de vue topologique pour le cas des transformations *entre deux surfaces distinctes* est complètement résolue par les surfaces de Riemann et leurs théorèmes d'existence. Mais le problème de caractériser topologiquement les transformations des surfaces *en elles-mêmes* qui sont homéomorphes à des représentations conformes, est complètement en suspens. Considérons, par exemple, la question la plus simple suivante: une transformation $(1, n)$ de la sphère en elle-même, sous quelles conditions est-elle homéomorphe à une transformation rationnelle [établie par une fonction rationnelle $w = R(z)$] ? La condition que la transformation soit localement biunivoque, excepté en un nombre fini de points, est évidemment nécessaire; s'il s'agit d'une transformation entre deux sphères distinctes, elle est aussi suffisante, mais non pas pour une transformation d'une sphère en elle-même. Les recherches de M. Julia **[13]** sur l'itération des fonctions rationnelles ont révélé beaucoup de propriétés topologiques de ces transformations; elles sont aussi fondamentales pour attaquer la question posée ci-dessus.

4. — *Domaine de la transformation.* — Pour la recherche de la structure d'une transformation topologique T qui transforme une surface S en elle-même, c'est un moyen utile de considérer les *domaines libres* et, en particulier, les domaines libres maxima. On entend par un domaine libre un domaine qui n'a aucun point commun avec son image; il est appelé maximum s'il n'est pas un vrai sous-ensemble d'aucun domaine libre. Il faut dire tout d'abord que l'existence seule d'un domaine libre maximum ne signifie rien, c'est un fait presque évident pour une transformation quelconque; c'est le type ou la forme d'un tel domaine et sa situation sur la surface qui sont souvent importants et même caractéristiques jusqu'à un certain degré.

Si P est un point quelconque de S non invariant dans la transformation T, il existe un voisinage de P qui n'a aucun point commun avec son image, ce voisinage est donc un domaine libre. En l'augmentant, on peut obtenir un domaine libre maximum. Ce fait qu'il est devenu maximum peut être dû à deux circonstances tout à fait différentes; ou bien la propriété du domaine d'être libre maximum exprime une propriété concernant la structure de la transformation; ou bien une constitution singulière de la frontière du domaine empêche d'augmenter le domaine libre. Voici un exemple qui montre la seconde possibilité; pour la translation $x' = x + 1$, $y' = y$, le domaine limité par les lignes:

$$y = \pm 1 , \qquad -1 \leqq x \leqq +1 ,$$

$$x = \pm \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \sin \frac{1}{1 - |y|} , \qquad -1 < y < +1 \qquad (l_1 \text{ et } l_2)$$

forme un domaine libre maximum (fig. 1); le fait qu'il est maximum est dû à la présence des continus de condensation à la frontière (les segments $y = \pm 1$, $-1 \leqq x \leqq +1$ sont des continus de condensation des lignes l_1 et l_2).

Pour éviter l'inconvénient signalé par cet exemple, nous ne considérerons dans la suite que les domaines libres maxima dont les frontières sont formées par des courbes d'ordre fini dans tout point et telles que les points d'ordre $>$ 2 forment un ensemble isolé. Nous appelons un domaine de cette sorte un *domaine de la transformation.* Pour une surface close il est un domaine limité par un nombre fini de courbes simples et fermées dont deux quelconques n'ont au plus qu'un nombre fini de points communs.

Pour assurer l'existence d'un domaine de la transformation, il faut restreindre la catégorie des transformations envisagées;

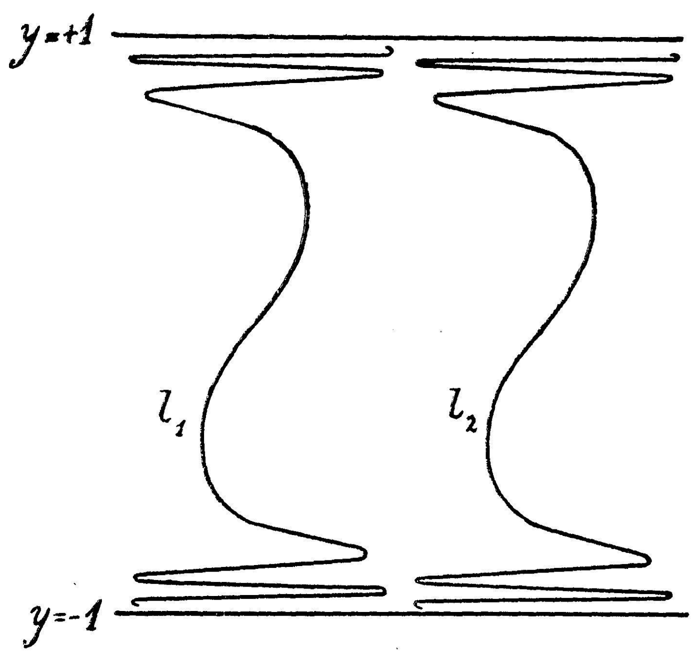

Fig. 1.

nous supposons dans la suite que S est une surface orientable à connexion finie, et T est une transformation à points invariants isolés. En particulier, nous considérerons les surfaces closes, et leurs transformations à un nombre fini de points invariants.

Le domaine de la transformation est l'analogue, dans un certain sens, du domaine fondamental correspondant à un groupe automorphe. Il n'est pas exactement déterminé par la transformation, on peut le modifier de maintes façons. Si P est un point quelconque sur la frontière du domaine, son image directe ou inverse appartient aussi à la frontière. Si P est un point de la frontière dont l'image directe appartient à la frontière, et dont l'image inverse n'appartient pas à la frontière, si, de plus, P est un point d'ordre 2 de la frontière, c'est-à-dire si le voisinage de P sur la frontière est formé par un arc simple, l'image directe de cet arc appartient aussi à la frontière du domaine. On peut alors remplacer le premier arc par un arc voisin intérieur au domaine, et l'autre par l'image directe de celui-ci; par cette modification de la frontière, on a obtenu un autre domaine de la transformation. Un point invariant de la transformation peut appartenir à la frontière du domaine de la transformation, mais non pas à son intérieur.

Concernant le domaine de la transformation, les données suivantes sont caractéristiques: le nombre de ses contours, son nombre de connexion, le nombre des points invariants appartenant à sa frontière et le nombre des domaines complémentaires sur la surface. Sur une surface à connexion finie, le domaine de la transformation peut avoir un ou deux domaines complémentaires; dans le deuxième cas, il a précisément deux contours.

Nous faisons remarquer que la même transformation peut admettre deux domaines de la transformation de types différents. Tel est le cas pour une transformation linéaire hyperbolique de la sphère: $z' = 2z$. Un domaine de la transformation est formé par la couronne limitée par les deux circonférences concentriques $|z| = 1$ et $|z| = 2$; un domaine de type différent est limité par les spirales:

$$\log |z| = \operatorname{arc} z \qquad \text{et} \qquad \log |z| = \operatorname{arc} z + \log 2\ ;$$

ce dernier domaine est à connexion simple, sur son seul contour il y a deux points invariants (fig. 2). Pour une transformation linéaire elliptique, le seul type du domaine de la transformation est limité par deux arcs simples joignant les deux points invariants, l'un de ces arcs étant l'image de l'autre.

5. — *Théorème de translation.* — Le théorème de translation dû à M. Brouwer [**9**] énonce la propriété suivante d'importance principale: Pour une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant, il existe un domaine de la transformation limité par deux

lignes simples et ouvertes. On entend par une ligne simple et ouverte un ensemble fermé qui est une image topologique de la ligne droite. Si on projette le plan stéréographiquement sur une

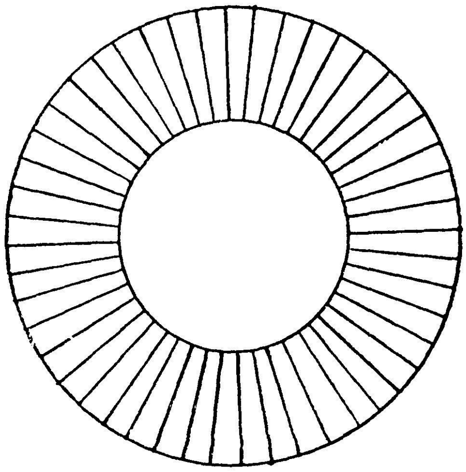

Fig. 2 *a*.

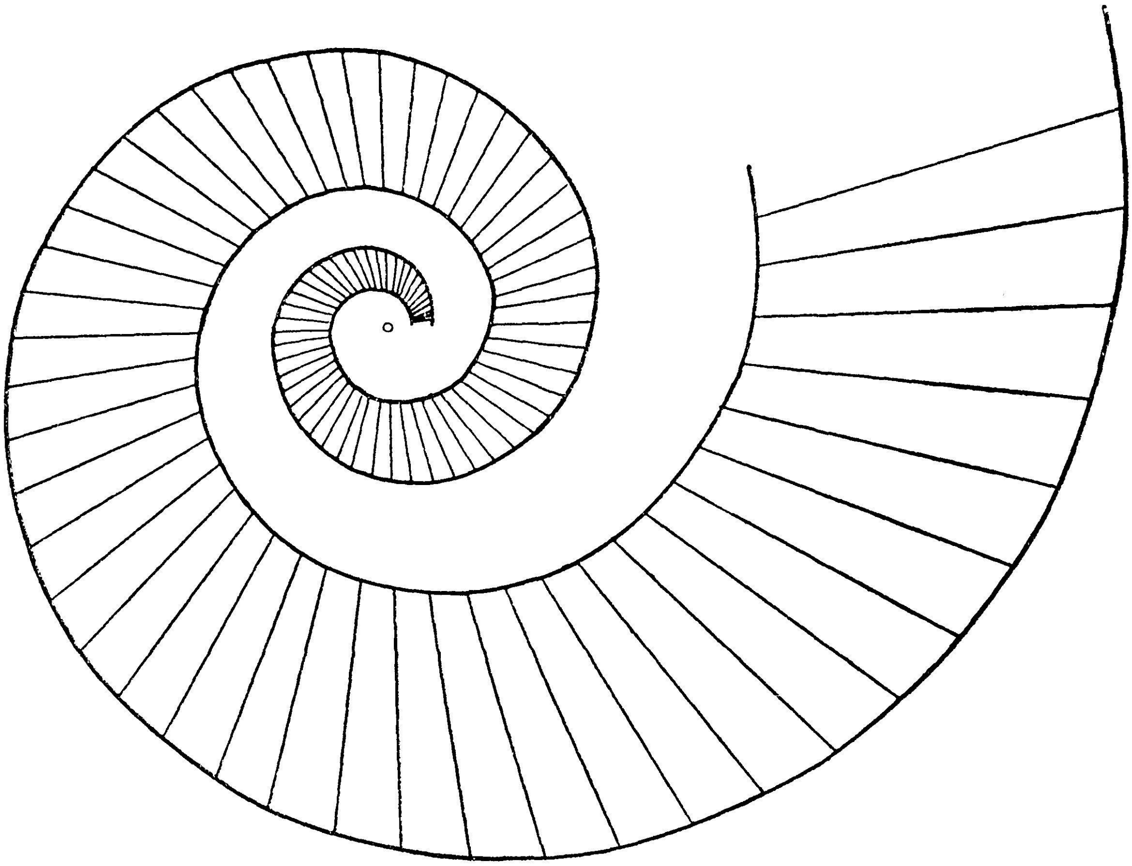

Fig. 2 *b*.

sphère, à la transformation donnée du plan correspond une transformation de la sphère en elle-même à un seul point invariant; aux lignes simples et ouvertes limitant le domaine de la transformation correspondent des courbes simples et fermées passant par le point invariant qui n'ont pas d'autres points communs; l'une de ces courbes est l'image de l'autre dans la transformation donnée.

Remarque. — Comme cette conférence ne nous permet pas de nous occuper des démonstrations, je rappelle que dans deux notes aux *Comptes rendus* j'ai esquissé, et dans un mémoire aux *Acta Scient. Math.* de Szeged j'ai développé une méthode systématique qui nous met en état de démontrer, par une construction simple, à la fois le théorème de translation et le dernier théorème de Poincaré (voir note 6) [**15, 16, 17**]. Si on se borne à démontrer le théorème de translation, on peut éviter la modification de ma construction que j'ai appelée la *déviation de la ligne construite.* La construction nous fournit alors une ligne brisée composée de segments perpendiculaires dont les sommets forment une suite divergente. Si elle n'est pas un ensemble fermé, ses points d'accumulation n'appartenant pas à la ligne forment une ou deux *lignes droites invariantes* dans la transformation. Il ne peut exister deux droites invariantes de directions distinctes, car leur point commun serait un point invariant dans la transformation. En recommençant notre construction à partir d'un segment qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à la direction des droites invariantes, notre construction fournit automatiquement une ligne simple et ouverte qui n'a pas de point commun avec son image; cette ligne et son image limitent un domaine de la transformation.

6. — *Le dernier théorème géométrique de Poincaré.* — Un autre résultat classique concernant la structure des transformations est le théorème suivant énoncé par Poincaré [**32**] et démontré pour la première fois par M. Birkhoff [**1, 3**]: Soit S une couronne limitée par deux circonférences concentriques C_1 et C_2; soit T une transformation topologique de S en elle-même qui transforme chacune des circonférences C_1 et C_2 en elle-même et déplace leurs points en des sens opposés. Si la transformation T n'admet pas de point invariant, il y a une courbe simple et fermée qui se trouve à l'intérieur de son image directe ou inverse.

Nous indiquons la relation entre ce théorème et le théorème de translation. Soient (r, φ) des coordonnées polaires dans la couronne $1 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, et soit la transformation T exprimée par les formules $r' = R(r, \varphi)$, $\varphi' = \theta(r, \varphi)$; déterminons la valeur de $\theta(r, \varphi)$ pour un point de C_1 de telle façon que $\varphi < \theta(1, \varphi) < \varphi + 2\pi$; pour les points de C_2, on aura alors $\theta(2, \varphi) < \varphi$; c'est l'expression de la condition que T déplace les points de C_1 et de C_2 en des sens opposés. Nous transformons la couronne par les formules $y = r$, $x = \varphi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ sur la bande $1 \leqq y \leqq 2$, $-\infty < x < +\infty$ dans le plan cartésien (x, y), et nous étendons la transformation de cette bande en elle-même correspondant à T sur le plan entier pour obtenir une transformation sans point invariant du plan en lui-même. Le théorème de translation assure l'existence d'un domaine de la transformation dans le plan; pour démontrer le théorème de Poincaré, il faut trouver un domaine de la transformation dans la bande qui est périodique en x de période 2π. Ma méthode mentionnée ci-dessus permet de construire un domaine de cette sorte [**16, 17**].

D'une façon similaire, on peut ramener toute transformation T, d'une surface S en elle-même, conservant le sens à une transformation du plan sans point invariant. Sur la surface S privée des points invariants de T, nous construisons la surface de recouvrement à connexion simple ; la transformation $\overline{T}$ de cette surface en elle-même engendrée par la transformation T révèle une certaine partie des propriétés de la transformation T elle-même; ensuite $\overline{T}$ peut être considérée comme une transformation du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant. Ces circonstances montrent la nécessité d'approfondir l'étude des transformations du plan.

7. — *Sur les translations planes.* — Soit T une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'ayant pas de point invariant. En vertu du théorème de M. Brouwer, il existe un domaine de la transformation, F, limité par deux lignes simples et ouvertes; l'ensemble complémentaire de F sur le plan consiste en deux domaines G et D. Nous désignons par F_n l'image de F obtenue par la trans-

formation T^n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); les domaines F_1, F_2, ... appartiennent à D, et les domaines F_{-1}, F_{-2}, ... à G (voir fig. 3). La réunion des domaines F_n est un domaine Δ dans lequel la transformation T est homéomorphe à une translation métrique

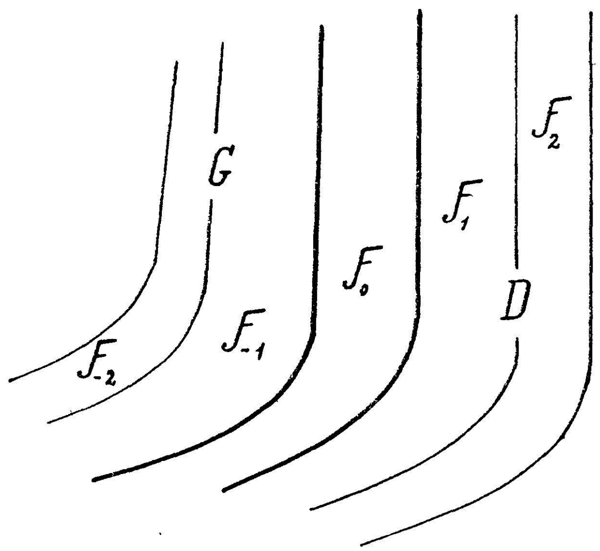

Fig. 3.

du plan. Cependant le domaine Δ n'est pas nécessairement identique au plan entier; tel est le cas pour la translation: $x' = x + 1$, $y' = y$, si on prend pour F le domaine limité par les lignes

$$y = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{x-1} \qquad (x > 0) \ ;$$

les images successives de F ne remplissent que le demi-plan $y > 0$. Pourtant, pour cette transformation, on peut aussi construire un tel domaine F dont les images successives remplissent le plan entier. Mais il y a des transformations pour lesquelles c'est impossible [**10**]; tel est le cas dans l'exemple suivant (voir figure 4):

$$\begin{array}{llll} x' = x + 1 - 2y \ , & y' = + y^{1/2} & \text{pour} & 0 \leqq y \leqq 1 \ , \\ x' = x + 1 \ , & y' = y & \text{pour} & y < 0 \ , \\ x' = x - 1 \ , & y' = y & \text{pour} & y > 1 \ . \end{array}$$

Dans cette transformation, les lignes $y = 0$ et $y = 1$ sont singulières dans un certain sens que nous allons préciser tout à l'heure; un domaine de la transformation ne peut pas comprendre à la fois des points appartenant aux demi-plans $y < 0$ et $y > 1$. Cette transformation ne peut donc pas être homéomorphe à une translation métrique.

Nous projetons stéréographiquement le plan sur une sphère et nous entendons par la distance sphérique de deux points P

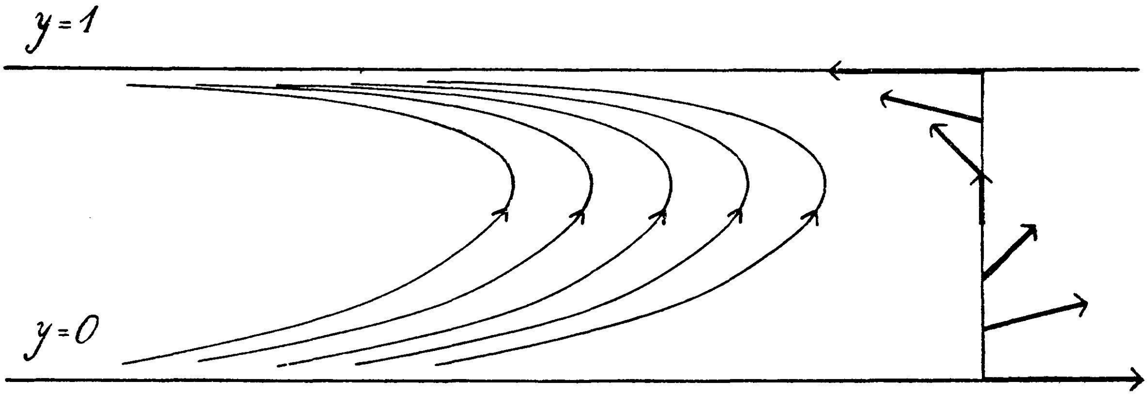

Fig. 4.

et Q du plan la distance sphérique des points qui leur correspondent sur la sphère. Nous entendons par l'expression que les puissances de la transformation T sont *uniformément continues* au point P la propriété suivante: pour toute quantité positive ε, il existe un $\delta > 0$ tel que, Q étant un point quelconque à une distance de P plus petite que δ, les images de ces points, $T^n(P)$ et $T^n(Q)$, obtenues par la transformation T^n, sont à une distance sphérique l'une de l'autre inférieure à ε, pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$ Les points P pour lesquels cette condition se trouve vérifiée, sont appelés *réguliers*, les autres *singuliers*. Dans l'exemple de la figure 4, les points appartenant aux lignes $y = 0$ et $y = 1$ sont singuliers, les autres sont réguliers.

On reconnaît immédiatement que pour une translation métrique, tous les points du plan sont réguliers. J'ai démontré que cette propriété est caractéristique pour les transformations homéomorphes à une translation métrique; ce résultat s'exprime dans le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante sous laquelle une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant est homéomorphe à une translation métrique est qu'elle soit régulière en tout point du plan [**14, 22**].

8. — *Examen des caractères topologiques des représentations conformes.* — La définition de la régularité d'une transformation s'applique dans sa forme donnée ci-dessus à une surface close quelconque; on reconnaît aussi facilement qu'elle se conserve par une transformation topologique quelconque, et en particulier qu'elle est indépendante de la métrique spéciale de la surface. A l'aide de cette notion, on parvient à caractériser de la manière suivante les représentations conformes et biunivoques, manière qui répond au problème posé par M. Brouwer (nº 3):

La condition nécessaire et suffisante sous laquelle une transformation topologique de la surface d'une sphère en elle-même est homéomorphe à une transformation linéaire (ou homographique) est que la transformation soit régulière, excepté en un nombre fini de points, au plus. Elle est homéomorphe à une transformation elliptique parabolique ou hyperbolique suivant que le nombre des points singuliers est 0, 1 ou 2 [**20, 23**].

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation topologique d'une surface close et orientable de genre $p \geqq 1$ en elle-même, conservant le sens, soit homéomorphe à une représentation conforme, est que la transformation soit régulière (en tout point de la surface). Pour $p > 1$, les transformations régulières sont périodiques [**25, 26, 27**].

9. — *Le groupe homographique.* — Les remarques faites au nº 2 montrent la nature différente des problèmes qui consistent à caractériser les transformations linéaires et le groupe des transformations linéaires à une variable complexe (groupe homographique). Un critère du groupe homographique donné par M. Süss [**33**] est le suivant:

Soit G un groupe de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même conservant le sens, et soit (k) un système de courbes simples et fermées sur la surface. Pour deux triples de points (A, B, C) et (A′, B′, C′), il existe une transformation de G et une seule qui transforme (A, B, C) en

(A′, B′, C′). Par trois points quelconques passe une courbe du système (k) et une seule. Soient k et k' deux courbes du système (k) ayant un point B en commun, et soit A un point de k' distinct de B; si une transformation de G transforme k' en lui-même et laisse les points A et B invariants, elle transforme aussi k en elle-même. Sous ces conditions, le groupe G est homéomorphe au groupe homographique, et le système (k) est homéomorphe au système des circonférences sur la sphère.

Cette solution du problème a l'inconvénient qu'elle introduit *a priori* les circonférences au lieu de les définir par le groupe. Voici un autre système de conditions qui évite cet inconvénient.

Soit G un groupe de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même conservant le sens, et dont chacune admet au plus un nombre fini de points singuliers. Pour deux triples de points (A, B, C) et (A′, B′, C′), il existe une transformation de G qui transforme (A, B, C) en (A′, B′, C′) et qui varie continuement avec le triple (A′, B′, C′). Les transformations de G qui laissent un point U invariant et qui sont régulières excepté au point U, forment un sous-groupe de G.

Je vais indiquer comment on peut définir les circonférences par le groupe G. Soient A, B et P trois points fixes, et soit P′ un point variable. Il y a une transformation dans G et une seule qui laisse invariants les points A et B et qui transforme P en P′; cette transformation varie continûment avec P′. Les transformations correspondant aux diverses positions de P′ forment un groupe continu simplement transitif sur la surface privée des points A et B. Ce sous-groupe de G est commutatif et il est homéomorphe au groupe des translations d'une surface cylindrique en elle-même [**19**]. Il contient donc un sous-groupe clos d'ordre 1; les trajectoires de ce dernier sous-groupe sont les circonférences de centres A et B. Par l'étude de ces circonférences définies par le groupe, on parvient à caractériser le groupe homographique.

Les groupes des géométries euclidienne et non-euclidiennes planes peuvent être caractérisés comme des sous-groupes du groupe homographique; on obtient de cette façon une autre solution du problème résolu dans l'œuvre célèbre de M. Hilbert [**12**]. Je tiens à faire remarquer ici qu'un axiome de M. Hilbert appelé « axiome de voisinage » (Axiom der Nachbarschaft) qu'il a introduit d'abord et qu'il a déduit ensuite de ses autres axiomes (surtout de l'axiome de « système fermé ») est en relation avec notre notion de régularité, et de même la notion d'ensemble de fonctions « également continues » due à ASCOLI. La différence essentielle consiste en ce que nous avons déterminé une propriété caractéristique d'*une seule transformation* en appliquant la condition d'égale continuité à l'ensemble de ses puissances.

10. — *La distribution des points singuliers d'une transformation.* — Nous considérons de nouveau les transformations du plan en lui-même sans point invariant; la recherche de la distribution de leurs points singuliers est importante en vue de ses applications.

Nous mentionnons la question suivante qui a été posée en relation avec des problèmes dynamiques:

Une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant peut-elle être immergée dans un groupe continu d'ordre 1 du plan ?

La réponse négative découle des remarques suivantes. Si une transformation sans point invariant appartient à un groupe continu d'ordre 1, ses points singuliers forment des lignes simples et ouvertes sans point commun deux à deux. D'autre part, j'ai construit une transformation dont les points singuliers forment des lignes avec des points multiples; elle ne peut donc pas appartenir à un groupe continu d'ordre 1, et de plus, elle n'admet pas de racine carrée [**24**]. Il faut alors chercher les conditions concernant la distribution des points singuliers sous lesquelles une transformation peut être plongée dans un groupe continu d'ordre 1.

Voici quelques propriétés générales des points singuliers. Si T est une transformation topologique du plan sans point invariant et conservant le sens, les composants de l'ensemble de ses points singuliers sont des continus non-bornés; par conséquent tout domaine maximum consistant de points réguliers est à connexion simple, et s'il est invariant dans T, dans son intérieur la transformation T est homéomorphe à une translation métrique.

En reprenant les notations du n° 7, désignons par Δ le domaine qui est la réunion des images successives d'un domaine de la transformation F. Nous disons que Δ est maximum s'il n'est pas un vrai sous-ensemble d'un autre domaine Δ' de la même sorte. Si Δ est maximum, tout point de sa frontière est un point singulier de T, mais la réciproque n'est pas vraie.

Nous appelons deux *points singuliers* P et Q *associés* s'il existe une suite de points P_1, P_2, ... convergeant vers P, et une suite divergente d'entiers n_1, n_2, ... tels que la suite $T^{n_1}(P_1)$, $T^{n_2}(P_2)$, ... tende vers Q. Les points associés à un point singulier quelconque intérieur à Δ se trouvent sur la frontière de Δ; ils forment un ensemble fermé dont les composants sont des continus non-bornés.

A l'aide de la notion des points singuliers associés, on peut décrire les propriétés de l'ensemble des points singuliers d'une transformation donnée.

11. — *Groupes continus.* — On peut étendre la notion de régularité aux surfaces et variétés non-compactes de la façon suivante. Nous ajoutons à la variété S ses éléments de frontière et nous considérons une famille de voisinages $\{V\}$ des points et des éléments de frontière de S. Une transformation topologique T de S en lui-même est dite régulière au point P de S, si pour une famille arbitraire de voisinages $\{V\}$, il existe un voisinage U_P de P tel que, pour un point quelconque Q pris dans U_P et pour tout entier n, l'un au moins des voisinages V contienne à la fois les points $T^n(P)$ et $T^n(Q)$. Pour les espaces métriques et compacts, cette définition est équivalente à celle donnée au n° 7.

J'ai démontré [**21**] que toute transformation appartenant à un groupe continu simplement transitif, d'ordre fini, est régulière en tout point de l'espace du groupe, et, de plus, la régularité est uniformément vérifiée pour les transformations du groupe. Cela veut dire que, dans la définition ci-dessus, on peut choisir le voisinage U_P du point P de telle façon que, pour toute transformation T du groupe, pour tout point Q de U_P et pour tout entier n, il y a un, au moins, des voisinages donnés V contenant à la fois $T^n(P)$ et $T^n(Q)$. La signification théorique de notre résultat consiste en ce que les images d'un « petit » voisinage obtenues par les transformations du groupe peuvent être regardées comme une famille de voisinages uniformément « petits » dans l'espace du groupe. Sa portée pratique consiste en ce que régularité ou singularité d'une transformation en un point exprime une propriété de structure, et alors l'existence d'un point singulier exclut que la transformation appartienne à un groupe continu simplement transitif. Ensuite, pour qu'une variété puisse représenter l'espace d'un groupe, il faut qu'elle admette des transformations régulières arbitrairement petites sans point invariant.

Il me paraît que le résultat ci-dessus est en relation avec la proposition suivante qui pour les groupes de transformations pseudo-conformes a été démontrée par M. H. Cartan [**11**], mais qui est encore en suspens pour le cas général: Dans un groupe continu d'ordre fini, il existe un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe.

12. — *Applications aux systèmes dynamiques.* — En nous servant des méthodes de Poincaré concernant les relations entre les systèmes dynamiques et des transformations des surfaces, nos résultats précédents admettent des applications aux systèmes dynamiques à deux degrés de liberté. Notre notion de régularité correspond, en effet, à la *stabilité permanente* du système dynamique [**4**].

Considérons un système dynamique conservatif à deux degrés de liberté dont les états forment une variété close. Les solutions correspondant à une valeur de l'énergie peuvent être regardées comme des trajectoires dont l'ensemble remplit une variété close à trois dimensions. Une solution (périodique ou non) sera dite posséder la stabilité permanente si la condition suivante se trouve vérifiée: en changeant très peu les valeurs initiales de la solution donnée (correspondant à la valeur $t = 0$ du temps), on obtient des solutions qui restent infiniment voisines de la solution primitive pour toute valeur de t ($t > 0$ et $t < 0$).

Construisons, d'après Poincaré, une surface de section S et considérons la transformation T de S en elle-même engendrée par des intersections consécutives avec les trajectoires. Cette transformation topologique de la surface S en elle-même est régulière ou singulière au point P de S suivant que la trajectoire passant par P vérifie ou non la condition de stabilité permanente. En appliquant les résultats du n° 8, on obtient, à partir de là, le théorème suivant:

Si un système conservatif à deux degrés de liberté dont toutes les solutions vérifient la condition de stabilité permanente admet une surface de section de genre $p > 1$, toutes les solutions sont périodiques.

Nous signalons aussi une application de nos recherches au *problème ergodique.* Les recherches profondes de MM. von Neumann [**30**] et Birkhoff [**5, 6**] ont conduit à ce résultat que l'ergodicité d'un système est une conséquence de l'hypothèse suivante appelée « transivité métrique »: Tout ensemble invariant dans la transformation, ou son ensemble complémentaire, est de mesure nulle. M. Morse [**29**], a démontré qu'une hypothèse concernant l'« instabilité uniforme » entraîne la transivité métrique et, par conséquent, l'ergodicité du système. D'autre part, j'ai trouvé que pour les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté, l'existence d'une solution, qui possède la stabilité permanente, exclut l'ergodicité du système, pourvu que le système admette une surface de section de genre $p > 1$. Cela revient à dire qu'une transformation topologique d'une surface close de genre $p > 1$ en elle-même admettant un point régulier, au moins, ne peut pas satisfaire à la condition de transivité métrique [**28**].

Dans cet ordre d'idées, j'ai recherché les transformations *asymptotiquement périodiques;* je nomme ainsi des transformations qui ont des puissances différant de l'identité aussi peu que l'on veut; j'ai trouvé qu'elles sont périodiques dans le sens strict pour le cas des surfaces de genre $p > 1$. Il serait intéressant de connaître la structure des transformations asymptotiquement périodiques de la surface d'une sphère en elle-même; sont-elles homéomorphes à des rotations par un angle incommensurable à π, comme les transformations périodiques sont homéomorphes aux rotations d'angles commensurables à π ? Un problème important, concernant les transformations topologiques d'un cercle en lui-même, est le suivant: est-il possible que les images successives d'un point forment un ensemble partout dense dans le cercle ? Pour les transformations dont les points invariants se trouvent à la frontière, c'est impossible; cet événement est aussi exclu si la transformation admet un point régulier dans l'intérieur du cercle; pour le cas général cette question n'est pas encore résolue.

Si T est une transformation topologique générale d'une surface en elle-même, il est possible que tous les points de S soient des points singuliers de T. La classification des points de S en des points réguliers et singuliers devient illusoire dans ce cas, et il faut diviser la surface en des ensembles de « transitivité » dans lesquels la transformation est régulière; il faut donc remplacer la notion de régularité, qui était féconde pour caractériser certaines classes de transformations et de groupes, par une notion de régularité régionale. Mais il me semble que, pour certaines classes de transformations, par exemple pour les transformations analytiques conservant l'aire, on peut établir, sous des conditions de nature générale, l'existence d'un point régulier, au moins. Peut-être de cette façon on réussira à démontrer l'existence d'une solution périodique vérifiant la condition de stabilité permanente dans le problème restreint des trois corps.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. D. Birkhoff. Proof of Poincaré's geometric theorem. *Transact. American Math. Soc.*, 14 (1913), p. 14-22.
2. Id. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, 43 (1920), p. 1-119.
3. Id. An extension of Poincaré's last geometric theorem. *Acta Math.*, 47 (1925), p. 297-311.
4. Id. Dynamical Systems, New York, 1927. (Voir en particulier p. 121.)
5. Id. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, Washington, 17 (1931), p. 656-660.
6. G. D. Birkhoff and B. O. Koopman. Recent contributions to the ergodic theory. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, Washington, 18 (1932), p. 279-282.
7. G. D. Birkhoff and P. A. Smith. Structure analysis of surface transformations. *Journal de Math.*, 7 (1928), p. 345-379.
8. L. E. J. Brouwer. Het Wezen der Meetkunde, Amsterdam, 1909 (p. 19-20).
9. Id. Beweis des ebenen Translationssatzes. *Math. Annalen*, 72 (1912), p. 36-54.
10. Id. Remark on the plane translation theorem. *Proc. R. Acad. Amsterdam*, 21 (1918), p. 935-936.

11. H. Cartan. Sur les groupes de transformations pseudo-conformes. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 196 (1933), p. 993-995.
12. D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie, Anhang IV, Leipzig, 1900.
13. G. Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journ. de Math.* (7), 4 (1918), p. 47-245.
14. B. de Kerékjârtó. On a geometrical theory of continuous groups, I. *Annals of Math.*, 27 (1925), p. 105-117 (p. 117).
15. Id. Démonstration élémentaire du théorème de translation dû à M. Brouwer. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 186 (1928), p. 1669-1671.
16. Id. Démonstration élémentaire du dernier théorème de Poincaré. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 187 (1928), p. 20-22.
17. Id. The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré. *Acta scient. math.*, Szeged, 4 (1928), p. 86-102.
18. Id. Note on the general translation theorem of Brouwer. *Atti d. Congresso Internaz. d. Mat.*, Bologna, 1928, 4 (1931), p. 235-238
19. Id. Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 8 (1930), p. 107-114.
20. Id. Sur le caractère topologique des représentations conformes. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 198 (1934), p. 317-320.
21. Id. Sur la régularité des transformations d'un groupe continu simplement transitif. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 198 (1934), p. 1114-1116.
22. Id. Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene. *Acta scient. math.*, Szeged, 6 (1934), p. 226-234.
23. Id. Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, *Acta scient. math.*, Szeged, 6 (1934), p. 235-262; Ergänzung. *ibid.*, 7 (1934), p. 58-59.
24. Id. Sur le groupe des transformations topologiques du plan. *Annali d. R. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2), 3 (1934), p. 393-400.
25. Id. Ueber die regulären Abbildungen des Torus. *Acta scient. math.*, Szeged, 7 (1934), p. 76-84.
26. Id. Ueber reguläre Abbildungen von Flächen auf sich. *Acta scient. math.*, Szeged, 7 (1934), p. 65-75.
27. Id. Bemerkung über reguläre Abbildungen von Flächen. *Acta scient. math.*, Szeged, 7 (1935), p. 206.
28. Id. Stabilité permanente et l'hypothèse ergodique. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 201 (1935), p. 123-124.
29. M. Morse. Instability and transitivity. *Journ. d. Math.* (9), 14 (1935), p. 49-72.
30. J. v. Neumann. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, Washington, 18 (1932), p. 70-82.
31. J. Nielsen. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math.*, 50 (1927), p. 189-358; 53 (1929), p. 1-76; 58 (1931), p. 87-167.
32. H. Poincaré. Sur un théorème de Géométrie. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 33 (1912), p. 375-407.
33. W. Süss. Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie, III. Topol. Kennzeichnung der linearen Abbildungen der Kugel. *The Tohoku Math. Journ.*, 28 (1927), p. 228-241.

SUR LES ESPACES LOCALEMENT HOMOGÈNES [1]

PAR

Charles EHRESMANN (Paris).

Les espaces qui formeront l'objet de cette conférence sont des espaces analogues aux formes spatiales de Clifford-Klein. Je rappelle qu'une forme spatiale de Clifford-Klein est un espace de Riemann à courbure constante; suivant que cette courbure est nulle, positive ou négative, on aura un espace localement euclidien, localement sphérique ou localement hyperbolique. Etant donné un espace localement euclidien, par exemple, celui-ci est aussi caractérisé par le fait que les déplacements euclidiens voisins de la transformation identique sont définis dans un voisinage suffisamment petit de chaque point. Une généralisation immédiate de cette dernière définition s'obtient en remplaçant le groupe des déplacements euclidiens par un groupe de transformations continu et transitif quelconque, en particulier par un groupe continu et transitif de Lie. On définit ainsi les espaces localement homogènes que nous allons étudier. Bien que les résultats que je pourrai indiquer soient encore incomplets, il m'a semblé que ce sujet méritait d'être traité ici, parce qu'il touche à la fois à la théorie des groupes et à la topologie et parce qu'il conduit à des relations entre les propriétés infinitésimales et les propriétés globales d'un espace.

1. — Avant de préciser la notion d'espace localement homogène, il sera utile de rappeler la *définition d'un groupe de trans-*

---

[1] Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

formations de Lie au sens local ou au sens global. Soit V une variété à n dimensions, c'est-à-dire un espace topologique régulier admettant un système de voisinages dont chacun est homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe à n dimensions. Soit G un ensemble de transformations topologiques dont chacune est définie pour tout point d'un domaine D de V, les point de D étant transformés en des points de V qui n'appartiennent pas forcément à D. L'ensemble G forme un groupe continu à r paramètres au sens local lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes:

a) Les éléments de G peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les points d'une variété à r dimensions, que nous désignerons par (G), telle que, si $M' = \varphi(M, s)$ est la transformation correspondant au point s de (G), la fonction $\varphi(M, s)$ soit continue par rapport à l'ensemble des points M et s.

b) L'ensemble G contient la transformation identique; soit i le point correspondant de (G).

c) Il existe dans (G) un voisinage Δ du point i tel qu'on ait les propriétés suivantes: Si a est un point de Δ, il existe dans D des points M dont les transformés $M' = \varphi(M, a)$ appartiennent à D; pour tout point M de cette espèce et pour tout point b de Δ, on a:

$$M'' = \varphi[\varphi(M, a), b] = \varphi(M, c) .$$

Le point c de (G) qui correspond ainsi à l'ensemble des points a et b est défini par une fonction $c = \psi(a, b)$.

d) Soit a un point de Δ et M un point quelconque de D tel que le point $M' = \varphi(M, a)$ appartienne à D. Il existe dans (G) un point a^{-1} tel que $M = \varphi(M', a^{-1})$.

e) La fonction $\psi(a, b)$ est continue par rapport à l'ensemble des points a et b; le point a^{-1} est une fonction continue du point a.

Un groupe G satisfaisant aux conditions précédentes est appelé *groupe de Lie au sens local* s'il existe, dans un voisinage du point i, un système de coordonnées tel que les coordonnées du point $c = \psi(a, b)$ soient des fonctions analytiques par rapport aux coordonnées des points a et b.

Le groupe G est dit transitif dans D si tout point M de D admet un voisinage tel que, M' étant un point quelconque de ce voisinage, il existe au moins une transformation de G qui transforme M en M'. Si G est un groupe continu transitif de Lie au sens local, il existe des systèmes de coordonnées définis respectivement dans un voisinage de M_0 et dans un voisinage de i tels que les coordonnées du point $M' = \varphi(M, a)$ soient des fonctions analytiques par rapport à l'ensemble des coordonnées de M et de a, en supposant que M et a appartiennent à des voisinages suffisamment petits de M_0 et de i. Deux systèmes de coordonnées qui sont définis dans un voisinage de M_0 et qui jouissent de la propriété précédente se déduisent l'un de l'autre par une transformation analytique.

Un ensemble de transformations topologiques, G, forme un *groupe continu à* r *paramètres au sens global* lorsqu'il satisfait aux conditions *a*), ..., *e*), en supposant que dans l'énoncé de ces conditions D soit remplacé par V et Δ par (G). L'ensemble G forme un *groupe de Lie au sens global* lorsqu'il définit un groupe continu à r paramètres au sens global et un groupe de Lie au sens local. Je signale le théorème suivant:

Etant donné un groupe continu à r *paramètres au sens local dont les transformations sont définies pour tous les points de la variété* V (c'est-à-dire le domaine D est confondu avec V), *l'ensemble des transformations dont chacune est le produit d'un nombre fini de transformations appartenant au voisinage* Δ *de* i *forme un groupe continu à* r *paramètres au sens global.*

2. — Appelons *espace homogène de Lie* une variété à n dimensions dans laquelle est défini un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens global.

Appelons *espace localement homogène de Lie* (en général nous dirons simplement espace localement homogène) une variété E à n dimensions jouissant des propriétés suivantes:

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M à l'intérieur duquel est défini un groupe continu et transitif de Lie au sens local qui transforme les points de V_M en des points de E; le voisinage V_M sera appelé voisinage élémentaire.

b) Soit d un domaine commun à deux voisinages élémentaires. Etant donnés les deux groupes de Lie au sens local attachés à ces voisinages, il existe dans chacun d'eux un voisinage de la transformation identique tel que les transformations de l'un de ces voisinages soient en correspondance biunivoque avec celles de l'autre, deux transformations correspondantes opérant de la même façon sur les points de d.

Un espace localement homogène de Lie peut encore être défini comme étant une variété E à n dimensions qui jouit des propriétés suivantes:

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M dans lequel on a défini un système de coordonnées et un ensemble de r transformations infinitésimales linéairement indépendantes qui engendrent un groupe transitif de Lie au sens local.

b) Soit d un domaine commun à deux voisinages élémentaires V_M et $V_{M'}$. Le changement de coordonnées défini pour les points de d transforme les r transformations infinitésimales définies dans V_M en r combinaisons linéaires des transformations infinitésimales définies dans $V_{M'}$.

Remarquons qu'un espace homogène de Lie est aussi un espace localement homogène de Lie.

Etant donnés deux points M et M′ d'un voisinage élémentaire, appelons transformation élémentaire de M en M′ toute transformation qui transforme M en M′ et qui appartient au groupe de Lie au sens local attaché à ce voisinage. Si A et B sont deux points quelconques de E, on montre que A peut être transformé en B par la succession d'un nombre fini de transformations élémentaires. Il en résulte que les groupes de Lie, au sens local, définis respectivement au voisinage de A et au voisinage de B sont semblables.

La variété d'un espace localement homogène est une variété analytique. En effet, dans chaque voisinage élémentaire on peut introduire un système de coordonnées tel que le groupe de Lie, au sens local correspondant, soit analytique par rapport à ces coordonnées et par rapport aux paramètres. Le changement de coordonnées qui en résulte pour un domaine commun à deux voisinages élémentaires est alors également analytique.

3. — Deux espaces localement homogènes E et E′ sont dits *équivalents* lorsqu'il existe une transformation topologique de E en E′ telle que, M et M′ étant deux points correspondants, les

transformations infinitésimales définies au voisinage de M soient transformées en les transformations infinitésimales définies au voisinage de M′. Les deux espaces E et E′ sont dits *localement équivalents* lorsqu'il existe un voisinage élémentaire dans E qui soit équivalent à un voisinage élémentaire dans E′. Le problème général que nous nous proposons d'étudier s'énonce maintenant de la façon suivante:

Trouver tous les espaces localement homogènes qui soient localement équivalents à un espace localement homogène donné: en d'autres termes, *trouver tous les espaces localement homogènes qui soient le prolongement d'un élément d'espace localement homogène donné.*

Une question intéressante qui se pose aussitôt est la suivante: *Existe-t-il toujours un espace homogène qui soit localement équivalent à un espace localement homogène donné ?*

Pour répondre à cette question, je rappelle les propriétés suivantes: Soit H un espace homogène de Lie et G le groupe de Lie correspondant. Soit g le sous-groupe formé par l'ensemble des transformations de G qui laissent invariant un point O de H. Le sous-groupe g est fermé dans G et n'admet aucun sous-groupe invariant dans G. Réciproquement étant donnés un groupe abstrait de Lie, G, et un sous-groupe g qui est fermé dans G et qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G, on peut définir un espace homogène H dont le groupe de transformations G_1 est isomorphe à G, le sous-groupe de G_1 qui correspond à g étant le plus grand sous-groupe dont les transformations laissent invariant un point O de H.

Si G est un groupe transitif de Lie au sens local, il existe dans G un voisinage Δ de la transformation identique tel que les transformations qui appartiennent à Δ et qui laissent invariant un point O forment un sous-groupe continu de Lie au sens local. Réciproquement soit (G) un groupe abstrait de Lie au sens local et soit (g) un sous-groupe continu de Lie au sens local. Si (g) n'admet aucun sous-groupe continu invariant dans (G), il existe un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens local, que nous désignerons par G_1, tel que ce groupe soit localement isomorphe à (G), son sous-groupe qui correspond par cette isomorphie à (g) étant le plus grand sous-groupe continu qui laisse invariant un certain point. D'après le troisième théorème fondamental de Lie démontré du point de vue global par M. E. CARTAN, la variété (G) peut être considérée comme un voisinage de l'élément unité d'un groupe abstrait de Lie au sens global. Désignons ce groupe par (G'); on peut le supposer simplement connexe; sinon on le remplacerait par son groupe de recouvrement simplement connexe. Le sous-groupe (g) au sens local se prolonge dans (G') en un sous-groupe continu de Lie au sens global; soit (g') ce prolongement. Pour que le groupe G_1 puisse être prolongé en un groupe transitif de Lie au sens global, il faut et il suffit que (g') soit fermé dans (G'). Or on sait qu'un groupe de Lie (G') simplement connexe peut avoir des sous-groupes continus qui ne sont pas fermés dans (G'). Par exemple, un groupe simple clos, simplement connexe et de rang supérieur à 1 admet des sous-groupes ouverts à un paramètre; un tel sous-groupe n'admet évidemment aucun sous-groupe continu invariant dans le groupe simple donné. Donc *il existe effectivement des espaces localement homogènes qui ne sont localement équivalents à aucun espace homogène.*

Pratiquement il est difficile de reconnaître si un groupe transitif de Lie au sens local défini dans un certain domaine par r transformations infinitésimales données peut être prolongé en un groupe de Lie au sens global. Remarquons seulement qu'une condition suffisante pour que ce prolongement existe est que le plus grand sous-groupe au sens local qui laisse invariant un point O ne laisse invariant aucun autre point dans un voisinage suffisamment petit de O. M. E. Cartan a déterminé tous les espaces homogènes de Lie à deux dimensions. On constate que tout espace localement homogène à deux dimensions est localement équivalent à un espace homogène. La même question n'est pas encore résolue dans le cas de trois dimensions et on n'a jamais déterminé tous les espaces homogènes de Lie à trois dimensions.

4. — Je signale le théorème suivant:

Si un espace localement homogène de Lie est clos et simplement connexe, il est équivalent à un espace homogène de Lie.

On en déduit que tout espace localement homogène clos, dont le groupe de Poincaré est fini, est localement équivalent à un espace homogène. Pour démontrer le théorème énoncé, on applique surtout la propriété suivante: *Etant donné un espace localement homogène* E, *tout arc* AB *établit un isomorphisme local bien déterminé entre les groupes de Lie, au sens local, définis respectivement au voisinage de* A *et au voisinage de* B ; *cet isomorphisme ne varie pas lorsqu'on déforme l'arc* AB, *les extrémités* A *et* B *restant fixes*. En particulier, si l'espace E est simplement connexe, il existe un isomorphisme local bien déterminé entre les groupes de Lie au sens local définis respectivement dans les voisinages de deux points quelconques de E.

5. — Par la suite nous porterons notre attention sur les espaces localement homogènes qui sont localement équivalents à un espace homogène donné. Soit H un espace homogène de Lie et G le groupe de transformations correspondant. On démontre alors le fait suivant:

Si $\overline{\mathrm{H}}$ *est la variété de recouvrement simplement connexe de* H, *cette variété* $\overline{\mathrm{H}}$ *définit un espace homogène localement équivalent à* H; *le groupe* $\overline{\mathrm{G}}$ *correspondant à* $\overline{\mathrm{H}}$ *est un groupe de recouvrement (pas forcément simplement connexe) de* G.

Appelons automorphisme de l'espace homogène H une transformation topologique T de H en lui-même telle que la transformée par T de toute transformation de G appartienne encore à G. Appelons automorphisme local une transformation topologique qui transforme un voisinage d'un point A de H en un voisinage d'un point B de H de telle façon que la transformée de toute transformation infinitésimale de G soit encore une transformation infinitésimale de G. On démontre alors le théorème suivant:

Tout automorphisme local d'un espace homogène simplement connexe se prolonge en un automorphisme global de cet espace.

La démonstration de ce théorème repose sur le fait suivant: *Si* G *est un groupe abstrait de Lie au sens global, tout auto-*

morphisme local de (G) *se prolonge en un automorphisme global de* (G).

Soit E un espace localement homogène que nous supposons localement équivalent à un espace homogène simplement connexe H. Définissons le *développement sur* H *d'un arc de l'espace* E. Nous appelons arc la figure décrite par un point qui est une fonction continue d'un paramètre variant de 0 à 1. Soit OA un arc de E. Tout point M de E appartient à un voisinage élémentaire qui est équivalent à un voisinage d'un point $\overline{\mathrm{M}}$ de H. En vertu du lemme de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir l'arc OA par une suite d'un nombre fini d'arcs partiels telle que deux arcs partiels successifs empiètent l'un sur l'autre et telle que tout arc partiel soit contenu dans un voisinage élémentaire équivalent à un voisinage dans l'espace H. Soit V_0, V_1, ..., V_k cette suite de voisinages; nous pouvons supposer que deux voisinages successifs n'aient qu'un seul domaine en commun. Une suite de voisinages de cette espèce sera appelée une chaîne de voisinages recouvrant l'arc OA. Le voisinage V_0 du point O peut être représenté sur un voisinage $\overline{V}_0$ d'un point $\overline{\mathrm{O}}$ de H. Le voisinage V_1 est équivalent à un voisinage $\overline{V}'_1$ dans H. Soit d le domaine commun à V_0 et à V_1. Il est représenté d'une part sur un domaine $\overline{d}$ de $\overline{V}_0$ et d'autre part sur un domaine $\overline{d'}$ de $\overline{V}'_1$. L'automorphisme local qui transforme $\overline{d'}$ en $\overline{d}$ se prolonge en un automorphisme global qui transforme $\overline{V}'_1$ en un voisinage $\overline{V}_1$. En répétant cette opération, on pourra représenter la chaîne de voisinage V_0, V_1, ..., V_k sur une chaîne de voisinages $\overline{V}_0$, $\overline{V}_1$, ..., $\overline{V}_k$. L'arc OA sera représenté sur un arc $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ recouvert par la chaîne de voisinages $\overline{V}_0$, $\overline{V}_1$, ..., $\overline{V}_k$. Nous dirons que l'arc $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ est un développement sur H de l'arc OA; de même l'arc OA sera appelé un développement sur E de l'arc $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$. On a ainsi le résultat suivant:

Un voisinage du point O *de* E *étant représenté sur un voisinage d'un point* $\overline{\mathrm{O}}$ *de* H, *tout arc* OA *de* E *admet un développement bien déterminé suivant un arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *de* H. *Si deux arcs d'origine* O *et d'extrémité* A *sont réductibles l'un à l'autre par déformation continue, leurs développements conduisent de* $\overline{\mathrm{O}}$ *au même point* $\overline{\mathrm{A}}$.

La dernière partie de cet énoncé se démontre en appliquant le lemme de Borel-Lebesgue à une famille continue d'arcs d'origine O et d'extrémité A. On démontre de même le théorème suivant:

Un voisinage de O *étant représenté sur un voisinage de* $\overline{\mathrm{O}}$, *soit* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *un arc quelconque de* H. *Ou bien l'arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *se développe suivant un arc bien déterminé* OA *de* E, *ou bien il existe sur l'arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *un point* $\overline{\mathrm{C}}$ *tel que l'arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{C}}$ *moins le point* $\overline{\mathrm{C}}$ *se développe suivant une ligne divergente sur l'espace de recouvrement simplement connexe de* E. *Etant donnée sur* H *une famille continue d'arcs d'origine* $\overline{\mathrm{O}}$ *et d'extrémité* $\overline{\mathrm{A}}$ *telle que chacun de ces arcs admette sur* E *un développement issu de* O, *ce développement conduit toujours au même point* A.

Les propriétés précédentes conduisent aux résultats suivants:

Si l'espace localement homogène E *est clos et simplement connexe, il est équivalent à l'espace homogène* H. *Si* E *est clos et admet un groupe de Poincaré fini, l'espace de recouvrement simplement connexe de* E *est équivalent à* H. *Si* E *est clos et* H *ouvert, le groupe de Poincaré de* E *est infini.*

Soit H′ *un espace homogène localement équivalent à* H; *si* H′ *est simplement connexe, il est équivalent à* H; *si* H′ *n'est pas simplement connexe, son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent à* H.

6. — Considérons maintenant une classe particulièrement intéressante d'espaces localement homogènes. Un espace E de cette classe satisfait à la condition suivante qui sera appelée *condition de normalité:* L'espace E est localement équivalent à un espace homogène H que nous supposerons simplement connexe, et toute ligne divergente sur l'espace de recouvrement simplement connexe de E se développe suivant une ligne divergente de H. L'espace E sera appelé *espace localement homogène normal* ou encore *forme de Clifford* de l'espace homogène H. En particulier, tout espace homogène localement équivalent à H est normal; on l'appelle *forme de Klein* de l'espace homogène H.

De même tout espace localement homogène clos dont le groupe de Poincaré est fini satisfait à la condition de normalité. On démontre facilement le théorème suivant:

Soit E *un espace normal localement équivalent à l'espace homogène simplement connexe* H; *l'espace* H *est équivalent à l'espace de recouvrement simplement connexe de* E.

Un voisinage du point O de E étant représenté sur un voisinage équivalent du point $\overline{O}$ de H, tout arc OM de E se développe suivant un arc déterminé $\overline{O}\overline{M}$ de H. La correspondance entre M et $\overline{M}$ jouit alors des propriétés suivantes: A tout point $\overline{M}$ de H correspond un point déterminé M de E. Les points de H qui correspondent à un même point M de E forment un ensemble de points équivalents par rapport à un groupe d'automorphismes de l'espace H. Ce groupe s'appelle le groupe d'holonomie de l'espace E. Il est isomorphe au groupe de Poincaré de l'espace E. De plus il est proprement discontinu dans tout l'espace H et aucune de ses opérations n'admet de points invariants dans H. La recherche des formes de Clifford de l'espace H revient ainsi à la recherche des groupes d'automorphismes de H qui peuvent être considérés comme des groupes d'holonomie.

Soit Γ un groupe d'automorphismes de H. Pour que Γ soit le groupe d'holonomie d'un espace localement homogène normal il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:

a) Γ est proprement discontinu dans tout l'espace H.

b) Aucune opération de Γ n'admet des points invariants.

c) Considérons dans H deux voisinages quelconques v et v', distincts ou confondus. Parmi les voisinages transformés de v par Γ, il y a au plus un nombre fini de voisinages qui ont des points communs avec v'.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les ensembles de points équivalents par rapport à Γ peuvent être considérés comme les points d'un espace E qui sera une forme de Clifford de H.

La condition *c*) est vérifiée d'elle-même lorsque Γ est un groupe fini. Cette condition est une conséquence des conditions *a*) et *b*) lorsque Γ laisse invariante une métrique définie dans H. En particulier, supposons que H soit un espace riemannien dont la métrique est invariante par le groupe G qui opère transitivement dans H. Lorsqu'un groupe d'automorphismes Γ laisse invariante cette métrique riemannienne et satisfait aux conditions *a*) et *b*), c'est le groupe d'holonomie d'un espace riemannien localement équivalent à H, c'est-à-dire localement applicable sur H. Il serait intéressant de savoir si la condition *c*) est toujours une conséquence des conditions *a*) et *b*), lorsque le groupe Γ est un groupe d'automorphismes de H. J'ignore la réponse à cette question. On sait seulement que la condition *c*) n'est pas nécessairement une conséquence des conditions *a*) et *b*) lorsque Γ se compose de transformations topologiques quelconques de H.

7. — La condition de normalité, pour un espace localement homogène E, peut être remplacée, dans certains cas, par des conditions plus simples. Considérons en particulier les espaces riemanniens localement homogènes. On voit facilement que la condition de normalité est équivalente dans ce cas à la condition suivante: *Dans l'espace* E, *toute ligne divergente localement rectifiable a une longueur infinie.* Cette condition est encore équivalente à d'autres conditions, par exemple à la condition suivante: *Sur tout rayon géodésique on peut reporter, à partir de son origine, une longueur donnée arbitraire.* L'équivalence des deux conditions précédentes s'établit facilement dans le cas d'un espace riemannien localement homogène. M. Hopf et M. Rinow ont même démontré cette équivalence pour un espace de Riemann quelconque.

Dans le cas des espaces localement affines, c'est-à-dire localement équivalents à l'espace affine, la condition de normalité peut être remplacée par la suivante: *Etant donnée une géodésique quelconque de l'espace localement affine, un point* M *qui décrit la géodésique peut être défini en fonction d'un paramètre* s *tel que, dans tout système de coordonnées affines locales, les coordonnées de* M *soient des fonctions linéaires de* s; *l'espace considéré sera alors normal si à toute valeur de* s *somprise entre* $-\infty$ et $+\infty$ *correspond un point* M *de la géodésique donnée.*

8. — Lorsqu'un espace riemannien localement équivalent à un espace riemannien homogène est clos, il est normal; car il n'y

a pas de lignes divergentes dans cet espace. Mais dans le cas général, un espace localement homogène clos n'est pas forcément normal. Les espaces localement homogènes normaux ainsi que les espaces localement homogènes clos font partie de la classe plus générale des espaces localement homogènes non prolongeables. Un espace localement homogène E est dit non prolongeable lorsqu'il n'est pas équivalent à un domaine D d'un espace localement homogène E′, le domaine D ayant des points frontières dans E′. On démontre facilement le théorème suivant:

Tout espace homogène est non prolongeable.

Il suffit d'appliquer le théorème qui dit que tout arc d'un espace localement équivalent à un espace homogène H admet un développement sur H. Il résulte immédiatement de ce théorème que *tout espace localement homogène normal est non prolongeable.* De même il est clair que tout espace clos est non prolongeable. Il existe des espaces localement homogènes non prolongeables (même simplement connexes ou clos) qui ne sont pas normaux. Par exemple, soit H un espace homogène à 3 dimensions et considérons un nœud dans cet espace. Tout espace de recouvrement à plusieurs feuillets de l'espace complémentaire du nœud est non prolongeable. D'une façon générale, le théorème relatif au développement d'un arc sur un espace homogène permet de reconnaître si un espace localement homogène donné est prolongeable ou non prolongeable. Il serait intéressant de savoir si tout espace prolongeable est équivalent à un domaine d'un espace non prolongeable.

9. — Donnons quelques applications des notions et propriétés générales qui précèdent. Je ne parlerai pas des espaces localement euclidiens ou localement non euclidiens, car ce sujet est bien connu. Je signale que les formes de Clifford ou de Klein des espaces riemanniens homogènes, en particulier des espaces riemanniens symétriques, ont été considérées par M. E. Cartan dans plusieurs de ses travaux. Je me propose d'indiquer seulement quelques propriétés des espaces localement projectifs.

Un *espace localement projectif* est un espace localement équivalent à un espace projectif réel. On peut encore le définir de la façon suivante: Un espace localement projectif E est une variété à n dimensions sur laquelle on a défini un système de courbes appelées géodésiques tel que chaque point de E appartient à un voisinage qui admet une représentation topologique sur un domaine de l'espace projectif, les arcs de géodésiques étant représentés par des segments de droites.

Tout espace localement euclidien, localement non-euclidien ou localement affine est évidemment un espace localement projectif. D'une façon générale, si H est un espace homogène et G le groupe de transformations correspondant, tout sous-groupe continu G′ qui est localement transitif dans un domaine de H définit un espace homogène H′, et tout espace localement équivalent à H′ définit aussi un espace localement équivalent à H.

Soit S l'espace de recouvrement simplement connexe de l'espace projectif à n dimensions. L'espace S est homéomorphe à la sphère à n dimensions et recouvre deux fois l'espace projectif. Un point de S est représenté par l'ensemble de $n+1$ quantités $\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$, non toutes nulles, le nombre λ étant un nombre positif quelconque. Le groupe d'automorphismes (A) de l'espace S est le groupe dont la transformation générale est:

$$x_i' = a_{ij} x_i , \qquad \text{déterminant } |a_{ij}| = \pm 1 .$$

L'application d'un résultat général au cas présent donne le théorème suivant:

Tout espace localement projectif clos et à groupe de Poincaré fini admet l'espace S *pour espace de recouvrement simplement connexe.*

Les espaces de cette classe sont les espaces localement projectifs normaux. Un espace localement projectif normal peut aussi être caractérisé par la propriété suivante: *Toute géodésique de l'espace est une courbe fermée.*

Tout espace localement projectif normal est défini par un groupe formé d'un nombre fini de transformations du groupe (A), chacune de ces transformations étant sans points invariants dans S. Réciproquement tout groupe fini de cette espèce définit un espace localement projectif normal. Or tout groupe fini de transformations de (A) laisse invariante au moins une forme quadratique définie en $x_0, x_1, ..., x_n$, que nous pouvons supposer être la forme $x_0^2 + x_1^2 + ... + x_n^2$. Le groupe considéré est donc un groupe de déplacements sphériques. Donc

THÉORÈME: *Tout espace localement projectif normal est équivalent à un espace localement sphérique normal* (forme spatiale de Clifford à courbure constante positive). *En particulier, tout espace homogène localement équivalent à l'espace projectif est équivalent à l'espace projectif ou à l'espace sphérique.*

Les espaces localement euclidiens ou localement hyperboliques sont des espaces localement projectifs qui ne sont pas normaux. Si les géodésiques d'un espace localement projectif sont les géodésiques d'une métrique riemannienne, cet espace est localement euclidien ou non-euclidien. Il existe des espaces localement projectifs, même clos, qui ne sont pas équivalents à des espaces localement euclidiens ou non-euclidiens. Considérons, par exemple, dans le plan projectif la transformation $x_0^1 = \lambda x_0$, $x_1^1 = x_1$, $x_2^1 = x_2$ et le groupe Γ engendré par cette transformation. Dans le domaine obtenu en enlevant du plan projectif la droite $x_0 = 0$ et le point $x_1 = x_2 = 0$, le groupe Γ a les caractères d'un groupe d'holonomie et définit un espace localement projectif E. On peut prendre pour domaine fondamental du groupe Γ le domaine compris entre les deux coniques $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 - \lambda^2 x_0^2 = 0$. On voit donc que l'espace E est homéomorphe au tore, mais les géodésiques de cet espace ne peuvent pas être les géodésiques d'une métrique riemannienne. De plus ces géodésiques ne satisfont pas à la condition suivante que nous appellerons condition de convexité: *Supposons donnée une famille continue d'arcs géodésiques* AB_t, *l'origine* A *étant fixe et l'extrémité* B_t *étant une fonction continue d'un paramètre* t, *définie pour* $0 \leq t < 1$; *si* B_t *tend vers un point* B_1 *lorsque* t *tend vers* 1, *l'arc géodésique* AB_t *tend vers un arc géodésique* AB_1. Remarquons que les géodésiques d'un espace riemannien normal satisfont à cette condition ainsi que les géodésiques d'un espace localement projectif normal ou d'un espace localement affine normal. Un espace localement projectif qui satisfait à la condition de convexité sera appelé convexe.

Les géodésiques issues d'un point remplissent tout l'espace. On peut démontrer le théorème suivant:

L'espace de recouvrement simplement connexe d'un espace localement projectif convexe est équivalent à l'espace sphérique S *ou bien à un domaine convexe de l'espace projectif.*

Réciproquement, soit D un domaine convexe de l'espace projectif, c'est-à-dire un domaine satisfaisant à notre condition de convexité. Soit Γ un groupe de transformations projectives qui transforme D en lui-même, qui est proprement discontinu dans D et dont les transformations n'admettent pas de points invariants dans D. On sait qu'on peut définir dans D une métrique en prenant pour distance de deux points M et M′ le logarithme du rapport anharmonique des points M, M′ et des deux points d'intersection de la droite MM′ avec la frontière de D. Cette métrique est invariante par Γ. L'ensemble des points équivalents à un point de D par rapport au groupe Γ peut donc être considéré comme le point général d'un espace localement projectif; celui-ci sera convexe et admettra D pour espace de recouvrement simplement connexe. Dans ce raisonnement on a supposé que D n'est pas l'espace affine.

10. — Considérons plus spécialement les espaces localement projectifs convexes à deux dimensions. Faisons abstraction des espaces localement projectifs normaux, c'est-à-dire de l'espace sphérique à deux dimensions et du plan projectif. Soit E un espace localement projectif clos. Son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent à un domaine convexe D du plan projectif; appelons C la frontière de D. L'espace E sera défini par un groupe projectif Γ qui a les caractères d'un groupe d'holonomie dans le domaine D; ce groupe Γ est d'ailleurs infini. On montre alors que les seuls cas qui peuvent se présenter sont les suivants: 1° C est une droite et D est le plan affine; 2° C se compose de deux droites et D est le demi-plan affine; 3° C se compose de trois segments de droites et D est l'intérieur d'un triangle; 4° C se compose d'un segment de droite et d'un arc de courbe tel que les transformés par Γ de tout point de cet arc forment un ensemble partout dense sur cet arc; 5° les transformés de tout point de C (peut-être à l'exception d'un point)

forment un ensemble partout dense sur C. Supposons que C soit composé d'arcs analytiques. Alors la partie non rectiligne de C est à courbure projective constante. On peut en déduire que les seuls cas possibles sont les trois premiers cas et le cinquième cas où D est l'intérieur d'une conique. On a par conséquent le résultat suivant:

Si un espace localement projectif à deux dimensions est convexe et clos, il est équivalent à l'espace sphérique, ou bien à l'espace projectif, ou bien à un espace localement hyperbolique, ou bien à un espace localement affine normal, ou bien son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent soit au demi-plan affine, soit à l'intérieur d'un triangle, soit à un domaine convexe du plan projectif dont la frontière contient des arcs non analytiques.

Il paraît probable que le dernier cas ne peut pas se présenter. On a de même le résultat suivant:

Si un espace localement affine à deux dimensions est convexe et clos, il est normal, ou bien son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent soit au demi-plan affine, soit à un domaine du plan affine limité par deux demi-droites issues d'un point, soit à un domaine convexe du plan affine dont la frontière contient des arcs non analytiques.

Plus généralement on peut démontrer que les deux énoncés précédents sont encore valables pour les espaces localement projectifs ou pour les espaces localement affines qui sont *convexes* et *non prolongeables.* Remarquons cependant qu'un espace localement hyperbolique normal est prolongeable en tant qu'espace localement projectif lorsque le groupe Γ correspondant est proprement discontinu sur la conique C.

11. — Il est intéressant de considérer également les espaces localement projectifs complexes. L'espace projectif complexe est simplement connexe. Dans le cas d'un nombre pair de dimensions, l'espace projectif complexe n'admet pas de forme de Clifford autre que lui-même. Dans le cas d'un nombre impair de dimensions complexes, il existe une forme de Clifford distincte de l'espace projectif complexe. Cette forme de Clifford est

non orientable, et elle peut aussi être considérée comme une forme de Clifford de l'espace hermitien elliptique.

On détermine encore facilement les espaces localement conformes normaux. *On peut démontrer que ceux-ci sont aussi équivalents aux espaces localement sphériques normaux.*

Pour terminer remarquons que les espaces localement homogènes considérés sont des cas particuliers des espaces non holonomes définis d'une façon générale par M. E. Cartan. Ce sont les espaces non holonomes correspondant à un groupe transitif de Lie G tels que les déplacements infinitésimaux attachés aux différents vecteurs infinitésimaux de l'espace satisfont aux équations de structure du groupe G. L'étude des espaces localement homogènes est ainsi le premier pas dans l'étude des propriétés globales des espaces non holonomes.

BIBLIOGRAPHIE

E. Cartan. *a*) L'application des espaces de Riemann et l'analysis situs (*Ass. fr. p. l'Avancement d. sciences*, 50^{me} session, Lyon, 1926);
b) La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (*Mémorial sc. math.*, fasc. XLII, 1930).

C. Ehresmann. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 196, 1933, p. 1354-1355).

H. Hopf. *a*) Differentialgeometrie und topologische Gestalt (*Jahresb. d. deutsch. Math. Ver.*, XLI, 1932, p. 209-229);
b) Géométrie infinitésimale et Topologie (*L'Enseign. math.*, 30, 1931, p. 233-240).

J. H. C. Whitehead. Locally homogeneous spaces in differential Geometry (*Ann. of Math.*, 2, 33, 1932, p. 681-687).

Sur les formes spatiales de Clifford-Klein, consulter la bibliographie dans H. Hopf, *a*) ou *b*).

QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS CONTINUES [1]

PAR

H. HOPF (Zurich).

---

1. — Comme but des recherches topologiques on assigne souvent l'étude d'une certaine classe de propriétés concernant *la forme et la position des figures géométriques*, propriétés qui sont invariantes pour les représentations topologiques, c'est-à-dire biunivoques et continues dans les deux sens. C'est bien la définition usuelle, mais elle n'est certainement pas complète. Car ce sont non seulement les propriétés des figures géométriques qui doivent être étudiées, mais aussi les propriétés des représentations topologiques ou, plus généralement, des *représentations univoques et continues* elles-mêmes. Comme les figures, *ces représentations elles-mêmes* aussi forment un domaine important et fécond pour les recherches des topologues — il suffit de nous rappeler les conférences intéressantes que nous entendîmes dernièrement de MM. DE KERÉKJÁRTÓ et NIELSEN, ainsi que quelques travaux classiques de M. BROUWER. L'indication de cette distinction de deux parties différentes de la topologie n'entraîne heureusement pas de scission de notre science en deux branches particulières qui seraient peu liées entre elles; tout au contraire, il existe entre elles des rapports étroits: par

---

[1] Conférence faite le 25 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

exemple, les propriétés de toutes les représentations d'un espace P en un autre espace fixe Q — c'est-à-dire les propriétés de l'« espace (abstrait) des représentations » Q^P — sont en même temps, comme M. Kuratowski nous l'a rappelé, des propriétés de P même, qui donnent des renseignements importants sur la forme de P.

Je voudrais exposer ici ces rapports entre la « topologie des représentations » et la « topologie de la forme » et cela en traitant deux catégories de problèmes: une première catégorie se rapportant à la possibilité de *comparer* entre elles les formes de deux espaces [1] P et Q en considérant les représentations de P sur Q et celles de Q sur P, une seconde concernant les relations entre la forme d'un espace P et les *représentations de* P *sur lui-même* [2].

2. — Avant d'aborder le premier de ces points, celui de la comparaison de deux espaces par leurs représentations réciproques, j'introduirai une notion qui a fait ses preuves en ces matières: la représentation f de l'espace P sur l'espace Q sera dite « *essentielle* » si pour chaque modification continue de la représentation f, *tout* l'espace Q reste image de P; en d'autres termes, s'il est impossible de libérer une partie de Q du recouvrement par l'image de P, par une modification continue de la représentation f.

En faisant des hypothèses très générales sur P et Q il est possible de représenter ces espaces l'un sur l'autre d'une manière continue; mais sous quelles conditions existe-t-il une représentation *essentielle* de P sur Q ? On montre par exemple facilement que toute surface close peut être représentée essentiellement sur la surface sphérique, tandis que chaque représentation d'une surface sphérique sur une surface close et orientable de genre supérieur est non-essentielle. Ce dernier fait est un cas particulier du théorème plus général suivant: P et Q étant des variétés closes et orientables à n dimensions, une condition

---

[1] Par un « espace » nous entendons toujours un espace *métrique*.

[2] Par une « représentation » nous entendons toujours une représentation univoque et continue. Nous appelons f une représentation de P *en* Q si l'image f(P) est sous-ensemble de Q; si l'on a, en particulier, f(P) $=$ Q, alors f sera dite une représentation de P *sur* Q.

nécessaire pour que P soit représentable essentiellement sur Q, est l'existence des relations suivantes

$$p^r \geqq q^r \ , \qquad r = 1, 2, \ldots, \quad n - 1 \ ,$$

où p^r et q^r désignent les r-ièmes nombres de Betti de P et Q [**13**] [1].

Ce théorème, bien entendu, est valable pour des *variétés closes de la même dimension;* les exemples suivants montreront qu'il ne peut pas, sans autre, être étendu à des paires plus générales d'espaces P et Q: une circonférence P peut évidemment être représentée essentiellement sur une lemniscate Q, bien qu'on ait $p^1 = 1$, $q^1 = 2$; il existe aussi des représentations essentielles de la sphère à trois dimensions P sur la sphère à deux dimensions Q, bien qu'on ait $p^2 = 0$, $q^2 = 1$ [**16**]. Je crois cependant qu'une loi plus générale se manifeste par le théorème précité, une loi dont le contenu exact et le domaine de validité ne sont pas encore connus, mais qui pourrait s'énoncer à peu près de la façon suivante: si l'espace P a, dans un certain sens, une structure topologique « plus simple » que l'espace Q, alors P n'est pas représentable essentiellement sur Q. Mais la détermination exacte du sens de la notion de « simplicité » qui intervient ici nous manque encore. C'est précisément ici l'un des problèmes principaux que j'ai en vue. Nous indiquerons dans la suite (n° 5, n° 7) d'autres apparitions de la même loi.

3. — Restons-en pour l'instant aux variétés closes à n dimensions P et Q; alors le fait qu'une représentation de P sur Q est essentielle équivaut au fait que le *degré* de cette représentation n'est pas nul [**23; 11**]; et l'on peut joindre au théorème susmentionné sur les représentations essentielles d'autres théorèmes sur le degré de représentation qui sont, en partie, plus précis:

M. H. Kneser a démontré la formule suivante pour $n = 2$, c'est-à-dire pour les surfaces closes, où c désigne le degré d'une représentation de P sur Q et p, q les genres de P, Q [**24**]:

$$p - 1 \geqq |c| \cdot (q - 1) \qquad (\text{pour} \quad p > 0) \ .$$

[1] Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin de cet exposé.

D'autre part, comme il existe des représentations pour tout c satisfaisant à l'inégalité de M. Kneser, cette formule donne d'amples renseignements sur le rapport entre les propriétés de la forme de P et Q, d'une part, et les représentations possibles de l'autre.

On ne connaît pas de théorème aussi précis pour les dimensions supérieures. On connaît cependant certaines propriétés des variétés closes et orientables à n dimensions, par exemple le fait que voici: si l'on peut représenter, avec le degré 1, P sur Q, ainsi que Q sur P, alors tous les invariants d'homologie — les groupes de Betti et l'anneau d'intersection de M. Alexander — coïncident pour P et Q [**13**]. Le problème reste ouvert de savoir si deux variétés, représentables l'une sur l'autre avec le degré 1, sont aussi homéomorphes. Ce problème est d'ailleurs étroitement apparenté avec cet autre problème, posé par MM. Kuratowski et Ulam [**25**] et resté ouvert lui aussi: soient P et Q des variétés closes et supposons qu'il existe, pour chaque ε positif, une représentation f telle que l'ensemble $f^{-1}(q)$ pour chaque point q de Q ait un diamètre inférieur à ε; P et Q sont-elles alors homéomorphes ?

Le théorème indiqué plus haut, sur la possibilité des représentations réciproques avec le degré 1, mérite une attention particulière dans le cas où Q est la sphère S^n à n dimensions. On voit aisément que chaque variété (close et orientable) à n dimensions P peut être représentée sur S^n avec le degré 1; l'énoncé du théorème est alors le suivant: si l'on peut représenter S^n sur P avec le degré 1, alors P a les mêmes invariants d'homologie que la sphère S^n; et il est facile de montrer que, en plus, le groupe fondamental de P disparaît lui aussi [**11,** théor. VIII]. La fameuse hypothèse de Poincaré dit que la sphère S^n se distingue de toutes les autres variétés closes à n dimensions par le fait que le groupe fondamental ainsi que tous les r-ièmes groupes de Betti (pour $1 \leqq r \leqq n-1$) disparaissent; si cette hypothèse est exacte, alors P aussi est homéomorphe à la sphère. On voit que la justesse de l'hypothèse de Poincaré entraînerait aussi celle de l'hypothèse suivante, énoncée par M. Kneser (en rapport avec certaines recherches sur l'axiomatique des variétés) [**22,** p. 10]: « La seule variété close à n dimensions sur laquelle la sphère à n dimensions peut être représentée avec le degré 1, est la sphère elle-même ». Dernièrement, M. Hurewicz a annoncé une démonstration du fait que, inversement, l'hypothèse de Poincaré découle de celle de M. Kneser, que les deux sont, par conséquent, équivalentes [**21**].

4. — Je tiens d'ailleurs à faire observer que cette remarque de M. Hurewicz doit être placée dans le cadre de ses recherches systématiques sur les représentations des sphères S^n en un espace Q: celles-ci forment le noyau de sa nouvelle théorie des « groupes d'homotopie à un nombre supérieur de dimensions » [**20; 21**]; cette théorie semble représenter un progrès très important dans le domaine dont je parle ici. Malheureusement, je ne connais pas encore cette théorie assez à fond pour pouvoir l'exposer ici; je n'indiquerai par la suite qu'un de ses beaux théorèmes (N° 8).

5. — Par contre, depuis quelques années, les représentations d'un espace P en la sphère S^n ont été employées pour examiner P lui-même et cela a donné des résultats satisfaisants dans le cas *où* P *est à* n *dimensions lui aussi.* J'ai pu montrer pour commencer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un *polyèdre à* n *dimensions* P puisse être représenté essentiellement sur S^n est qu'il contienne un cycle à n dimensions (d'un domaine de coefficients quelconque) différent de zéro [**14; 15; 2,** p. 514]. Ce théorème fut étendu par M. Alexandroff à des espaces compacts arbitraires [**1,** p. 223]. M. Freudenthal enfin a porté ces recherches à leur achèvement en démontrant le fait suivant: les propriétés d'homologie à n dimensions d'un espace compact à n dimensions P sont équivalentes aux propriétés des classes d'homotopie des représentations de P en la sphère S^n; comme M. Freudenthal l'a montré, ces classes d'homotopie peuvent en effet être conçues comme éléments d'un *groupe*, et ce groupe, d'une part, le n-ième groupe de Betti de P de l'autre, se déterminent réciproquement d'une façon univoque [**9**].

Le théorème que voici de M. Borsuk mérite aussi d'être mentionné dans cet ordre d'idées, et cela autant à cause de son intuitive simplicité qu'à cause de sa démonstration élémentaire: P étant un ensemble fermé et borné de l'espace euclidien à

$n+1$ dimensions R^{n+1}, il partage R^{n+1} et ne le partage que s'il existe une représentation essentielle de P sur S^n [**3**; **2**, p. 405] [1].

6. — Ce théorème dépasse un peu le cadre des théorèmes précités: ici la dimension de P peut être supérieure à n, à savoir égale à $n+1$ (il est vrai que cette différence s'affaiblit du fait que P se trouve dans R^{n+1}). En général, on est peu renseigné sur la signification des représentations d'un espace P, à dimension supérieure à n, sur la sphère à n dimensions; les efforts pour caractériser aussi par ces représentations les groupes de Betti inférieurs de P, sont restés jusqu'à présent sans succès.

C'est uniquement dans le cas $n = 1$ qu'on peut, dans les théorèmes précités, renoncer à l'hypothèse que P aussi est à n dimensions: j'avais démontré qu'un polyèdre de dimension *arbitraire* peut être représenté essentiellement sur la circonférence, et ne peut l'être que si son premier nombre de Betti est non nul [**16**, théor. Va; *2*, p. 518]. M. Borsuk a étendu ce théorème aux espaces compacts arbitraires [**4**], et en même temps M. Bruschlinsky a démontré le fait suivant: on peut déterminer le premier nombre de Betti d'un espace compact P à partir du groupe des classes des représentations de P en un cercle S^1 [**7**] — de la même manière que, d'après le théorème de M. Freudenthal, cela peut se faire pour le nombre de Betti le plus élevé de P par les représentations de P en la sphère de dimension correspondante.

Par contre, le rôle joué par les représentations d'un espace P à N dimensions sur les sphères des dimensions $n = 2, 3, ..., N-1$ est encore totalement obscur, même pour le cas des polyèdres. D'une part il semble, déjà pour $r = 2$, extrêmement douteux qu'on puisse représenter essentiellement sur S^r chaque polyèdre P dont le r-ième nombre de Betti est positif [2]; d'autre part il est certain que des représentations essentielles de P sur S^2 peuvent

---

[1] On pourrait poser le problème de caractériser aussi des propriétés plus générales des ensembles ponctuels de l'espace R^{n+1} par des représentations sur S^n. M. Kuratowski m'a indiqué dernièrement que ce problème fut traité avec le plus grand succès par M. Eilenberg pour le cas $n = 1$: dans un mémoire à paraître prochainement M. Eilenberg construit presque toute la topologie des ensembles ponctuels plans sur la base des représentations sur la circonférence [8].

[2] Une telle représentation est possible si la dimension de P n'est pas supérieure à $r+1$ [16, théor. VII].

exister, même si le deuxième nombre de Betti disparaît: cela a lieu par exemple si P est la sphère à trois dimensions S^3 [**16**].

La question de savoir si la sphère S^N peut être représentée essentiellement sur la sphère S^n pour un couple donné N, n (avec $N > n > 1$) est encore ouverte; j'ai pu y répondre pour les cas particuliers $N = 4k - 1$, $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ et cela par l'affirmative [**17**][1]. Je considère, pour ma part, la réponse générale à cette question comme une tâche des plus importantes et des plus attrayantes: non seulement en ce qui concerne la théorie, mais aussi parce que nous devrions connaître complètement et sous chaque point de vue des figures aussi simples et aussi importantes que les sphères !

7. — Nous venons de parler de la comparaison de l'espace P avec les sphères; il serait presque plus naturel de considérer comme espace de comparaison, au lieu des sphères, les figures les plus simples possibles, les *simplexes*, et si on le fait on obtient vraiment un beau succès. Modifions tout d'abord un peu la notion d'une représentation « essentielle »: la représentation f d'un espace P sur un simplexe Q sera dite « relativement essentielle » s'il est impossible de libérer des points de Q du recouvrement par l'image de P en modifiant d'une manière continue f à l'*intérieur seulement de* Q, c'est-à-dire en ne modifiant f en aucun point dont l'image tombe sur la *frontière de* Q. Or voici l'énoncé d'un théorème de M. ALEXANDROFF: La *dimension* d'un espace compact P est le plus grand nombre n tel que P puisse être représenté relativement-essentiellement sur un simplexe à n dimensions [**1; 2,** p. 373; **19**].

Par ce théorème aussi intuitif qu'important, je terminerai la partie de ma conférence traitant de la comparaison de deux espaces à l'aide de leurs représentations réciproques.

8. — Je parlerai maintenant des représentations d'un espace en lui-même. Déjà en considérant les *surfaces* finies, on remarque une relation entre ces représentations et la forme des surfaces: P étant une surface *close*, il est — d'après un théorème connu sur le degré de représentation — impossible de la *déformer*, d'une

---

[1] M. PONTRJAGIN a récemment répondu par la négative à cette question pour chaque $N = n + 2 > 4$. (Communication de M. LEFSCHETZ au Congrès intern. des Math., Oslo, sept. 1936.)

façon univoque et continue, en une de ses propres parties; par contre cela est possible si P admet une frontière. La propriété par laquelle se caractérisent ici les surfaces closes s'énonce sous la forme générale suivante: l'espace P sera dit « *clos* dans le sens de l'homotopie » ou encore « essentiel sur lui-même » si l'identité — c'est-à-dire la représentation avec $f(x) = x$ pour chaque point x de P — est une représentation essentielle.

Cette propriété d'être « clos » me semble une notion assez immédiate et naturelle. Si l'on considère par exemple un polyèdre P, alors se pose le problème de décider à partir des propriétés combinatoires de P, si P est « clos » dans ce sens ou ne l'est pas; mais ce problème n'est pas résolu, pas même pour les polyèdres; en particulier, il ne semble pas exister des relations simples entre le groupe fondamental et les groupes de Betti d'une part, et le fait d'être clos au sens de l'homotopie d'autre part [**18**; **2**, p. 518 et suiv.].

Cependant, M. Hurewicz a résolu un problème très voisin, à savoir: quels sont les polyèdres qui peuvent être réduits *à un seul point* par une déformation univoque et continue ? La réponse est la suivante: une telle réduction du polyèdre connexe P est possible et ne l'est que si tous les r-ièmes groupes de Betti pour $r \geqq 1$ ainsi que le groupe fondamental de P disparaissent, c'est-à-dire si P coïncide par les invariants classiques de Poincaré avec un simplexe [**21**]. C'est un théorème surprenant qui jette une vive lumière sur la valeur des invariants classiques et aussi sur celle de la nouvelle théorie de l'homotopie de M. Hurewicz !

Mlle Pannwitz et moi avons considéré avec succès une autre modification du problème non résolu de caractériser la propriété d'être clos: nous appelons un espace « *labile* » si des *déformations arbitrairement petites* suffisent pour le transformer en une de ses propres parties; un espace labile n'est donc, *a fortiori*, pas clos au sens de l'homotopie. Or, la labilité d'un polyèdre P qui est partout à n dimensions peut être caractérisée par une propriété purement combinatoire, à savoir par l'existence d'une « frontière » de P — où la notion de frontière employée ici appartient entièrement au domaine classique des notions sur lesquelles repose la théorie de l'homologie. Mais je ne voudrais pas insister ici sur la définition exacte de cette notion [**18**; **2**, pp. 285 et 524].

Il est amusant et instructif de construire des exemples pour ces théorèmes; il existe notamment des polyèdres à deux dimensions qui peuvent être réduits à un point et qui sont labiles bien qu'ils ne possèdent pas d'arête libre, c'est-à-dire bien que, dans leurs décompositions en simplexes, chaque arête appartienne au moins à deux triangles [**18**].

9. — Parmi les propriétés des représentations d'un espace en lui-même, c'est l'existence ou la non-existence des *points fixes* qui a toujours retenu spécialement l'attention. Dans le cadre de notre mise en problèmes nous demanderons: quelles sont les propriétés de la forme d'un espace P qui permettent de décider si P peut ou non être transformé en lui-même sans points fixes ? La circonférence est un tel espace, tandis que les simplexes contiennent, d'après le célèbre théorème de M. Brouwer, des points fixes pour toute représentation en eux-mêmes. De quelle façon pourrait-on généraliser cette différence entre une circonférence et un simplexe ? Est-ce qu'un certain aspect « cyclique » d'une figure pourrait être caractéristique du fait qu'elle peut être transformée en elle-même sans points fixes ? On a quelques connaissances sur ce sujet mais, malheureusement, elles ne sont pas bien nombreuses.

La formule sur les points fixes de M. Lefschetz [**26**] est valable, comme je l'ai montré [**12**; **2**, p. 524], non seulement pour des variétés mais aussi pour des polyèdres arbitraires; de cette formule découle le fait que le théorème précité de M. Brouwer sur les points fixes des simplexes se laisse étendre à tous les polyèdres qui ont les mêmes nombres de Betti que les simplexes, qui sont, de ce fait, connexes et dont tous les nombres de Betti de dimension positive disparaissent [**2**, p. 532]. M. Lefschetz a montré, en outre, que ce théorème conserve sa validité si l'on remplace les polyèdres par les espaces compacts qui sont « localement connexes au sens de M. Alexander » [**27**, pp. 90 et 359]. La condition suivante est donc nécessaire pour l'existence de représentations en eux-mêmes sans points fixes de ces espaces assez généraux: pour un certain $r \geqq 1$ le r-ième nombre de Betti est différent de zéro.

Un exemple, découvert par M. Borsuk, montrera qu'on n'ose pas renoncer à l'hypothèse précitée de la connexité locale: il existe un continu dont tous les r-ièmes nombres de Betti pour $r = 1, 2, \ldots$ disparaissent et qui peut cependant être transformé en lui-même sans point fixe [**5**]. D'ailleurs, ce continu se trouve bien dans l'espace à trois dimensions mais pas dans le plan et il est douteux qu'un tel exemple existe déjà dans le plan; en d'autres termes, nous ne savons pas — et cette ignorance est remarquable ! — si l'affirmation suivante est exacte: P étant un continu plan ne décomposant pas le plan et f une représentation quelconque de P en lui-même, alors f possède un point fixe.

La condition qu'un nombre de Betti de dimension positive est différent de zéro n'est *pas suffisante* pour l'existence de représentations sans points fixes: par exemple, la variété à quatre dimensions des points complexes du plan projectif possède, pour toute représentation en elle-même un point fixe, bien que son deuxième et son quatrième nombre de Betti soient égaux à un [**13**]. C'est pour cette raison que les faits suivants, établis par M. Borsuk, sont très remarquables: tout polyèdre — et même, plus généralement, tout espace compact et localement connexe — dont le *premier* nombre de Betti ne s'annule pas peut être représenté en lui-même sans point fixe [**4**]; et la même affirmation est vraie aussi pour les polyèdres qui sont *situés dans l'espace euclidien à trois dimensions* et dont le *deuxième* nombre de Betti est différent de zéro [**6**]. Mais si nous considérons des polyèdres arbitraires, alors on ne connaît pas de critère nécessaire et suffisant pour l'existence de représentations sans points fixes et cela même pas si l'on se restreint aux variétés closes.

10. — On obtient cependant de meilleurs résultats si l'on ne considère pas des représentations arbitraires de P en lui-même, mais — comme dans le problème de la propriété d'être « clos » indiqué plus haut — des « petites transformations », c'est-à-dire des représentations où les distances entre le point et le point-image sont petites. En premier lieu, on déduit de la formule généralisée de M. Lefschetz que nous venons d'employer, que seuls les polyèdres à *caractéristique eulérienne* nulle admettent des transformations arbitrairement petites sans point fixe

[**2**, p. 532]. Dans le cas des *variétés closes* la réciproque de cette affirmation est aussi vraie, le théorème suivant est donc valable: Une variété close admet et n'admet de transformation arbitrairement petite en elle-même sans point fixe que si sa caractéristique eulérienne est nulle [**10**; **2**, p. 552]. On sait que cette condition est satisfaite pour toute variété de dimension impaire, tandis que parmi les variétés de dimension paire il n'y en a que quelques-unes qui la remplissent.

Dans une variété (dérivable [1]) la notion de « petite transformation sans point fixe » coïncide au fond avec la notion de « champ de directions »; nous pouvons donc énoncer pour les champs de directions le théorème formulé plus haut pour les petites transformations. On obtient alors une généralisation de théorèmes connus de Poincaré et de M. Brouwer sur des surfaces et des sphères à n dimensions.

11. — Le théorème sur l'existence de petites transformations sans point fixe joue un certain rôle dans les recherches sur les *variétés de groupes:* un espace de groupe admettant des transformations infinitésimales sans points fixes, sa caractéristique est de ce fait nécessairement nulle. La question de savoir quels espaces sont des espaces de groupes appartient en principe au cercle des problèmes que nous traitons ici; car, pour un espace, le fait de représenter un groupe est une propriété des transformations de l'espace sur lui-même, et seuls certains espaces la possèdent. Cependant, la théorie que nous exposa M. Cartan dans sa conférence ne peut être appelée une théorie « topologique »; elle emploie en effet des moyens beaucoup plus difficiles et beaucoup plus profonds que ceux dont il a fallu se servir pour les problèmes dont j'ai parlé. La démonstration, par exemple, du théorème que, parmi toutes les sphères, seules celles de dimensions 1 et 3 sont des espaces de groupes, exige presque tout l'appareil moderne des théories de MM. Cartan et Weyl. Ce serait une tâche extrêmement attrayante que de déduire le même fait par des moyens « élémentaires », c'est-à-dire purement topologiques. Nous sommes encore très loin de la résolution de

---

[1] Dès ici, les variétés que nous considérons doivent satisfaire à certaines conditions de dérivabilité que nous ne voulons d'ailleurs pas préciser.

ce problème; je voudrais cependant indiquer ici quelques nouveaux résultats de M. Stiefel qui nous rapprochent, peut-être, de la solution de problèmes de cet ordre [**28, 29**].

On voit aisément qu'une variété de groupes à n dimensions admet non seulement *un* champ continu de directions, mais n champs de ce genre qui sont, en chaque point, linéairement indépendants; cette circonstance est équivalente au fait suivant: la variété est « *parallélisable* », c'est-à-dire que l'on peut introduire un « parallélisme » des directions, qui satisfait aux exigences naturelles imposées à une telle notion. La question subsiste de savoir si la possibilité de ce parallélisme découle déjà de l'existence d'un unique champ de directions, c'est-à-dire de la disparition de la caractéristique. M. Stiefel a découvert le fait très surprenant que chaque variété orientable à trois dimensions est parallélisable; mais il pût montrer, d'autre part, par des exemples, qu'il faut répondre par la négation à la question que je viens d'énoncer; M. Stiefel démontre en particulier — dans le cadre de théorèmes plus généraux et plus précis — le fait suivant: Parmi les espaces projectifs réels à n dimensions pour lesquels on a $n + 1 \not\equiv 0$ mod. 16, seuls les espaces des dimensions 1, 3, 7 sont parallélisables [1]. Cette même méthode n'a pas réussi jusqu'à présent en ce qui concerne le problème de la possibilité du parallélisme des sphères.

Il est donc démontré de façon purement topologique que, parmi tous les espaces projectifs, seuls ceux des dimensions $n = 1, 3, 7$ et $16k - 1$ avec $k = 1, 2, \ldots$ peuvent éventuellement être envisagés comme des espaces de groupes. La théorie de M. Cartan décide qu'ils doivent être éliminés tous à l'exception de $n = 1$ et $n = 3$. Nous ne savons pas encore s'il existe des espaces projectifs parallélisables pour $n = 16k - 1$; l'espace projectif à sept dimensions, comme d'ailleurs aussi la sphère à sept dimensions, sont parallélisables sans être cependant espaces de groupes. On ne sait pas s'il y a, en dehors de 7, encore un autre nombre de dimensions jouissant de cette propriété.

[1] M. Ehresmann m'a indiqué dernièrement qu'il a fait, lui aussi, — dans un mémoire qui sera publié prochainement — des recherches sur la possibilité du parallélisme des espaces réels projectifs et qu'il a obtenu les mêmes résultats que M. Stiefel. Sa méthode, entièrement différente de celle de M. Stiefel, n'embrasse pas non plus les nombres de dimensions $n = 16k - 1$.

Le fait que voici est facile à montrer: pour une sphère S^n ainsi que pour un espace projectif P^n la possibilité de parallélisme est équivalente à l'existence d'un ensemble $\mathfrak{F}$ de représentations topologiques de S^n ou P^n sur eux-mêmes, ensemble qui est simplement transitif pour un point (plus exactement: $\mathfrak{F}$ est un ensemble de représentations topologiques de S^n ou P^n sur eux-mêmes et jouissant de la propriété suivante: il existe un point e tel que pour chaque point x il y ait dans $\mathfrak{F}$ une et une seule représentation f_x avec $f_x(e) = x$; en plus, f_x dépend d'une manière continue de x et les f_x doivent avoir certaines propriétés de dérivabilité). L'existence d'un tel ensemble de représentations topologiques d'un espace est un affaiblissement de la propriété d'être espace de groupe; c'est même un affaiblissement considérable; la loi associative notamment ne joue pas de rôle ici. Malgré cela, les recherches sur les espaces de groupes « affaiblis » de cette façon — et peut-être encore d'autre façon — se révéleront utiles pour le maniement purement topologique des vrais espaces de groupes.

En tous cas, la question de savoir quelles sphères et quels espaces projectifs sont parallélisables me semble extrêmement intéressante. Les nombres les plus petits de dimensions pour lesquels cette question est encore ouverte, sont $n = 5$ dans le cas des sphères, $n = 15$ dans le cas des espaces projectifs. On devrait donc s'occuper notamment de S^5 et P^{15}. C'est un problème très particulier, mais je ne trouve pas qu'en mathématiques la « généralité » soit le seul critère pour la valeur d'un problème ou d'un théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Alexandroff, Dimensionstheorie. *Math. Ann.*, 106 (1932), p. 161-238.

[2] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, 1. Band (Berlin, J. Springer, 1935).

[3] K. Borsuk, Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume. *Math. Ann.*, 106 (1932), p. 239-248.

[4] — Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie. *Fund. Math.*, 20 (1933), p. 224-231.

[5] — Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui-même sans points invariants. *Fund. Math.*, 24 (1934), p. 51-58.

[6] — Contribution à la topologie des polytopes. *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 51-58.

[7] N. Bruschlinsky, Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3. *Math. Ann.*, 109 (1934), p. 525-537.

[8] S. Eilenberg, Transformations continues en circonférence et la topologie du plan. *Fund. Math.*, 26 (1936), p. 61-112.

[9] H. Freudenthal, Die Hopfsche Gruppe. *Comp. Math.*, 2 (1935), p. 134-162.

[10] H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 96 (1926), p. 225-250.

[11] — Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Zweiter Teil. *Math. Ann.*, 102 (1929), p. 562-623.

[12] — Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. *Math. Zeitschrift*, 29 (1929), p. 493-524.

[13] — Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Journ. f. d. r. u. a. Math.*, 163 (1930), p. 71-88.

[14] — Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen. *Recueil math. de Moscou*, 37 (1930), p. 53-62.

[15] — Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre. *Comm. math. Helv.*, 5 (1933), p. 39-54.

[16] — Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, 104 (1931), p. 639-665.

[17] — Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. *Fund. Math.*, 25 (1935), p. 427-440.

[18] H. Hopf und E. Pannwitz, Über stetige Deformationen von Komplexen in sich. *Math. Ann.*, 108 (1933), p. 433-465.

[19] W. Hurewicz, Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre. *Fund. Math.*, 24 (1935), p. 144-150.

[20] — Beiträge zur Topologie der Deformationen. *Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, 38 (1935), p. 112-119; p. 521-528; 39 (1936), p. 117-126; p. 215-224.

[21] — Homotopie und Homologie. Conférence faite au Congrès des Topologues à Moscou en septembre 1935, paraîtra probablement dans le *Recueil math. de Moscou.*

[22] H. Kneser, Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deutsche Math. Vereinig.*, 24 (1925), p. 1-14.

[23] — Glättung von Flächenabbildungen. *Math. Ann.*, 100 (1928), p. 609-617.

[24] — Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. *Math. Ann.*, 103 (1930), p. 347-358.

[25] C. Kuratowski et S. Ulam, Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles. *Fund. Math.*, 20 (1933), p. 244-253.

[26] S. Lefschetz, Intersections and transformations of complexes and manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 28 (1926), p. 1-49.

[27] — *Topology* (New York, 1930).

[28] E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Comm. Math. Helv.*, 8 (1936), p. 305-353.

[29] — Ein Problem aus der linearen Algebra und seine topologische Behandlung. *Verhandl. d. Schweiz. Naturforsch. Gesellsch.*, 1935 (texte français dans *L'Ens. math.*, t. 34, p. 273-274).

LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES [1]

(Géométrie élémentaire, analytique et axiomatique. Algèbre et algèbre des vecteurs. — Géométrie différentielle. — Calcul des variations)

PAR

Karl Menger (Vienne).

Le grand progrès de la Géométrie au commencement de l'époque moderne est dû à l'introduction des méthodes analytiques par Descartes et Fermat. Cette méthode consiste en la construction de modèles arithmétiques pour les entités spatiales. Les points sont définis par des nombres (coordonnées), les courbes et les surfaces par des équations et la géométrie analytique est l'application de l'algèbre et de l'analyse à ces modèles arithmétiques.

Cette méthode a enrichi d'un nouveau monde le domaine des entités géométriques étudiées jusqu'alors et n'a cessé de fournir depuis sa découverte des problèmes sur notre espace. C'est cette idée encore qui a suggéré la plupart des généralisations de la conception d'espace: celle de Riemann et d'autres qui ont trouvé application en géométrie différentielle, par exemple celle de M. Finsler, de même que celle utilisée dans la géométrie des nombres par Minkowski. Ces espaces généralisés sont basés essentiellement sur la représentation de leurs points par des coordonnées.

---

[1] Conférence faite le 25 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

Malgré son importance historique et ses nombreux avantages on ne doit cependant pas oublier, me semble-t-il, que d'un point de vue purement géométrique l'étude des modèles arithmétiques au moyen de l'analyse n'est qu'un procédé entre plusieurs possibles; ce procédé impose par ailleurs aux recherches des restrictions assez considérables qui ne sont pas inhérentes à la nature des figures spatiales.

J'ai été ainsi conduit depuis quelques années à développer une géométrie qui se passe des modèles arithmétiques, tout en s'occupant des problèmes relatifs aux notions classiques: convexité, courbure, géodésiques, etc. Les points ne sont alors pas nécessairement définis par des coordonnées, ni les figures par des équations. La géométrie des distances ou géométrie métrique est basée sur la donnée d'un ensemble d'éléments de nature quelconque assujettis à la seule condition qu'à deux d'entre eux corresponde toujours un certain nombre. Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse d'un de ces espaces généraux que M. Fréchet a introduits dans les mathématiques pour les appliquer au calcul fonctionnel et qui, plus tard, se sont montrés extrêmement féconds pour les recherches en topologie, en particulier pour les théories de la connexité, de la dimension, des courbes.

La géométrie des distances ne fait pas partie de la topologie car elle ne s'occupe pas des transformations homéomorphes, la distance n'étant pas en général invariante dans une homéomorphie. Mais tant par l'étude des espaces généraux que par ses méthodes elle est assez voisine de la topologie générale faisant, avec cette dernière, partie de la géométrie « ensembliste » (mengentheoretische Geometrie).

Bien que récente et peu connue jusqu'à présent, la géométrie des distances est déjà si développée qu'une simple énumération de tous ses résultats serait impossible en un temps si limité. Ce que je me propose ici c'est donc seulement de mettre en évidence quelques-unes de ses liaisons nombreuses et étroites avec d'autres branches des mathématiques et j'insiste d'autant plus sur ce point qu'on fait parfois à la géométrie des ensembles le reproche de se détacher complètement des mathématiques classiques et des problèmes dont s'occupe la plupart des mathématiciens.

Nous traiterons d'abord brièvement de quelques-uns des rapports entre la géométrie métrique et la géométrie analytique élémentaire des espaces ordinaires. Des remarques concernant l'algèbre et l'algèbre des vecteurs suivront. Nous passerons ensuite à l'étude de la convexité dont la théorie générale se lie étroitement à la géométrie axiomatique de l'espace ordinaire. Puis, toujours du point de vue des distances, nous introduirons la notion de courbure qui sera qualifiée pour servir de point de départ vers une géométrie différentielle. Nous terminerons par l'étude des lignes géodésiques qui nous fournira des résultats nouveaux très généraux relatifs au Calcul des variations.

I. — Géométrie des distances et géométrie analytique élémentaire.

En géométrie analytique élémentaire on prend comme point de départ de la théorie des espaces euclidiens à n dimensions la représentation de chaque point par n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels ou complexes selon qu'il s'agit de l'espace réel ou de l'espace complexe C_n. On appelle carré de la distance des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ le nombre [1]

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2 \tag{1}$$

en se réservant de prendre comme distance la racine carrée positive de l'expression précédente dans le cas où celle-ci est non négative. Nous appellerons *espace à carrés de distances complexes* [2] un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout

---

[1] Pour les espaces *unitaires* on fixe comme distance le nombre réel

$$(y_1 - x_1)(\overline{y_1} - \overline{x_1}) + \ldots + (y_n - x_n)(\overline{y_n} - \overline{x_n})$$

en désignant par $\overline{x}$ le conjugué $\xi - i\eta$ du nombre $x = \xi + i\eta$. Il est clair que du point de vue des distances cet espace unitaire à n dimensions est identique à un espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

[2] On peut généraliser cette notion et parler d'un espace à distances empruntées à un système donné S, par exemple à un corps de nombres au sens de l'algèbre abstraite ou à un groupe abstrait. Pour des applications au calcul des variations j'ai récemment étudié des espaces dont les distances ne satisfont pas à l'axiome de symétrie (Δ_2). On pourrait appeler les espaces satisfaisant aux axiomes (Δ_1) et (Δ_2) espaces *à distances*

couple p, q de deux de ses éléments il corresponde un nombre $\overline{pq}^2$ (dit carré de la distance de p *à* q) assujetti aux conditions:

$$\overline{pp}^2 = 0 \,, \tag{Δ_1}$$

$$\overline{pq}^2 = \overline{qp}^2 \,. \tag{Δ_2}$$

Dans un espace à carrés de distances complexes tout ensemble F ne contenant qu'un nombre fini de points, disons k points $p_1, p_2, \ldots, p_k$, est complètement caractérisé par les k^2 carrés des distances des points de F entre eux, nombres qui peuvent être rangés dans une matrice. Il résulte des conditions (Δ_1) et (Δ_2) que cette matrice est symétrique et que sa diagonale principale ne contient que des zéros. Une question qui se pose de façon naturelle est la suivante: Etant donnée une matrice $\| \alpha_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ jouissant des deux propriétés mentionnées, sous quelles conditions peut-on la réaliser par les points d'un espace euclidien complexe ou réel, c'est-à-dire trouver k points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de cet espace tels que $\overline{a_i\, a_j}^2 = \alpha_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$?

Nous allons donner immédiatement la solution du problème plus général suivant [1]: Etant donné un espace à carrés de distances complexes C (c'est-à-dire une matrice de nombres en général infinie), établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse l'appliquer sur un sous-ensemble de l'espace euclidien à n dimensions, et d'abord de l'espace complexe C_n. De façon précise, nous établirons les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à chaque point de C un point et un seul de C_n de sorte que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ étant les points de C_n correspondant respectivement aux points p et q de C,

---

symétriques complexes et réserver le nom d'espace à distances complexes à des ensembles dont la définition de la distance est assujettie à la condition (Δ_1) seule.

Une étude systématique des espaces à distances non symétriques, par M. NOVAK, paraîtra dans le cahier 8 des *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums.*, Wien, 1936.

[1] La caractérisation des espaces euclidiens réels et de leurs sous-ensembles au moyen des conditions (Δ^k) et $(\Delta^k{}_0)$ se trouve dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 113. Pour une nouvelle démonstration voir *Amer. Journ. of Math.*, 53, p. 721. Des remarques sur C_2 et $E_{2,1}$ se trouvent dans *Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums*, 2, p. 34; 4, p. 13; 5, p. 10, 16; les critères de $E_{n,-n}$ dans *Tôhoku Math. Journ.*, 37, p. 475. La caractérisation générale des sous-ensembles de C_n et $E_{n,s}$ que nous allons énoncer est due à M. WALD et se trouve dans son article, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 32.

le nombre $\overline{pq}^2$ donné avec l'espace C satisfasse toujours à la condition

$$\overline{pq}^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 .$$

Appelons déterminant des points $p_1, p_2, \dots, p_k$ le nombre

$$\Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \overline{p_1p_2}^2 & \overline{p_1p_3}^2 & \dots & \overline{p_1p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_2p_1}^2 & 0 & \overline{p_2p_3}^2 & \dots & \overline{p_2p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_3p_1}^2 & \overline{p_3p_2}^2 & 0 & \dots & \overline{p_3p_k}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \overline{p_kp_1}^2 & \overline{p_kp_2}^2 & \overline{p_kp_3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Pour qu'un espace à carrés de distances complexes C *puisse être appliqué sur un sous-ensemble de* C_n *il est nécessaire et suffisant que*

(Δ_0^{n+3}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$ *pour tout système de* $n+3$ *points de* C

(Δ_0^{n+2}) $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$ *pour tout système de* $n+2$ *points de* C .

Appelons $E_{n,s}$ la partie de C_n constituée par les points $(x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n)$, les nombres $x_1, \dots, x_m$ étant réels, les nombres $x'_{m+1}, \dots, x'_n$ purement imaginaires, m étant égal à $\frac{n+s}{2}$. Posons $x'_j = ix_j$ $(j = m+1, m+2, \dots, n)$, x_j réel. Le nombre (1) devient alors

$$(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2 - (y_{m+1} - x_{m+1})^2 - \dots - (y_n - x_n)^2 . \quad (1')$$

s est la signature de cette forme quadratique. Le $E_{n,s}$ est un espace à carrés de distances complexes tel que, pour chaque couple p, q de points, $\overline{pq}^2$ soit réel.

Nous dirons que l'ensemble F des k points $p_1, p_2, \dots, p_k$ est de rang r s'il satisfait aux conditions (Δ_0^{r+2}) et (Δ_0^{r+3}) sans satisfaire (Δ_0^{r+1}), c'est-à-dire si les déterminants de tous les systèmes de $r+2$ et de $r+3$ points de F sont nuls, mais s'il existe un système $r+1$ points dont le déterminant est différent de 0.

Pour qu'un espace où $\overline{pq}^2$ est toujours réel jouisse de la propriété d'être applicable sur un sous-ensemble de $E_{n,s}$ il est suffisant (et évidemment nécessaire) que *tout système de* n + 3 *points de* E jouisse de cette même propriété; et pour qu'un système F de $n + 3$ points $p_1, p_2, \dots, p_{n+3}$ soit applicable sur un système de $n + 3$ points de $E_{n,s}$ il faut et il suffit, r désignant le rang de F, 1° que l'on ait $r \leqq n$ et que 2° parmi les systèmes de $r + 1$ points $p_1, p_2, \dots, p_{r+1}$ de F pour lesquels $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{r+1}) \neq 0$ il en existe un, tel que la suite des nombres

$$\Delta(p_1) = -1, \quad \Delta(p_1, p_2), \quad \Delta(p_1, p_2, p_3), \dots, \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{r+1})$$

ne contienne pas deux zéros consécutifs et que le nombre N des changements de signes qu'elle présente après la suppression des zéros éventuels satisfasse à l'inégalité

$$\frac{n+s}{2} + (r-n) \leqq \mathrm{N} \leqq \frac{n+s}{2} .$$

Pour $s = n\,(= m)$ l'espace $E_{n,s}$ est évidemment l'espace euclidien réel à n dimensions, le nombre (1') étant $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2$ qui est toujours positif ou nul; on peut donc prendre comme distance (non négative) la racine carrée positive de cette expression. $E_{n,n}$ jouit en outre de la propriété que ses points sont métriquement distingués, c'est-à-dire que

$$p \neq q \text{ implique } \overline{pq}^2 \neq 0 . \qquad (\Delta_3)$$

Un espace à distances non-négatives et qui distingue métriquement les points est ce que M. Fréchet avait appelé un espace E. Voici une conséquence importante de la condition (Δ_3): Une application d'un espace E sur un autre espace E conservant les distances est nécessairement biunivoque, c'est, comme nous dirons, une *congruence*. Un espace E qui peut être appliqué sur un sous-ensemble d'un espace E est donc applicable sur celui-ci au moyen d'une congruence et sera dit *congruent* à ce sous-ensemble [1].

---

[1] C'est ainsi que l'espace unitaire à n dimensions est congruent à l'espace euclidien réel à $2n$ dimensions.

Le résultat énoncé plus haut contient donc comme cas particulier le théorème suivant concernant l'espace euclidien réel $E_n (= E_{n,n})$:

Pour qu'un espace E *à distances non négatives et distinguant métriquement les points, soit congruent à un sous-ensemble de* E_n *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

(Δ_0^{n+3}) $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{n+3}) = 0$ *pour tout système de* $n + 3$ *points de* E,

(Δ_0^{n+2}) $\Delta(p_1, p_2, \ldots, p_{n+2}) = 0$ *pour tout système de* $n + 2$ *points de* E,

(Δ^k) *sgn* $\Delta(p_1, p_2 \ldots, p_k) = (-1)^{k+1}$ *ou* 0

pour tout système de k *points de* E, *où* $k = 2, 3, \ldots, n + 1$.

Remarquons qu'un espace E contenant plus de $n + 3$ points et satisfaisant aux conditions (Δ^k) pour $k = 2, 3, \ldots, n + 1$ et à (Δ_0^{n+2}) satisfait *eo ipso*[1] à la condition (Δ_0^{n+3}). Pour qu'un espace séparable E soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de Hilbert il faut et il suffit que les conditions (Δ^k) soient satisfaites pour chaque entier k.

II. — La théorie de la convexité et ses relations avec la géométrie axiomatique.

Passons à l'étude de propriétés plus géométriques de l'espace et de ses sous-ensembles. Dans ce but nous considérons un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout couple d'éléments (« points ») p, q il corresponde un nombre réel $\overline{pq}$ (« distance » de p et q) qui satisfait à la condition $\overline{pp} = 0$ pour tout p et à l'inégalité triangulaire $\overline{pq} + \overline{qr} \geqq \overline{pr}$ pour chaque triplet de points. Nous appellerons un tel ensemble un *espace triangulaire*. Particulièrement importants sont les espaces triangulaires à distances symétriques, non négatives, et qui distinguent métri-

[1] Un espace à distances complexes satisfaisant à la condition (Δ_0^{n+2}) ne satisfait pas nécessairement à la condition (Δ_0^{n+3}). On trouvera une étude des systèmes de $n + 3$ points non congruents à $n + 3$ points de E_n bien que $n + 2$ quelconques de leurs points soient congruents à $n + 2$ points de E_n dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 124. J'ai appelé de tels systèmes *pseudo-euclidiens*.

quement les points, c'est-à-dire tels que $\overline{pq} = \overline{qp} > 0$ si $p \neq q$ et $pp = 0$; ou bien, ce qui revient au même, tels que chaque triplet de points soit congruent à un triplet de points du plan (à un triangle euclidien) [1]. L'introduction de ces espaces est due à M. Fréchet. On les appelle espaces métriques ou, d'après M. Bouligand, espaces distanciés. Comme exemples d'espaces triangulaires nous avons les espaces euclidiens de toutes dimensions et l'espace de Hilbert.

Il est bien naturel lorsqu'on a une inégalité d'étudier les cas où elle devient une égalité. Dans le cas d'un espace euclidien la relation $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$ a lieu pour trois points p, q, r distincts deux à deux, lorsque q est situé sur le segment joignant p et r, donc entre p et r, et seulement dans ce cas. Posons donc comme définition pour un espace distancié général qu'un point q est point *intermédiaire* entre p et r, ou plus simplement est *entre* p et r si $p \neq q \neq r$ et $\overline{pq} + \overline{qr} = \overline{pr}$. Cette notion ne jouit pas, dans les espaces généraux, de toutes les propriétés qu'elle possède sur la ligne droite. Considérons par exemple l'espace distancié constitué par quatre points p, q, r, s ayant les distances $\overline{pq} = \overline{qr} = \overline{rs} = \overline{sp} = 1$, $\overline{pr} = \overline{qs} = 2$. Il est clair que q est entre p et r, et que r est entre q et s, sans que q ou r soient entre p et s. La relation de point intermédiaire a cependant assez d'affinités avec la relation bien connue sur la ligne droite pour que la dénomination de point situé « entre » deux autres soit justifiée. Elle jouit notamment des propriétés suivantes: Si q entre p et r, alors q entre r et p, mais r non entre p et q. Si q entre p *et* r, et r entre p et s, alors q entre p et s, et r entre q et s. L'ensemble constitué par p et q et leurs points intermédiaires est fermé.

Nous appelons *convexe* un sous-ensemble d'un espace distancié qui contient pour chaque couple de points différents p et r au moins un point q situé entre p et r. On a alors le théorème suivant: *Un sous-ensemble fermé convexe d'un espace distancié complet contient pour tout couple de points distincts* p *et* q *un segment qui les joint*, c'est-à-dire un sous-ensemble contenant

[1] Pour un espace à distances non négatives l'inégalité triangulaire équivaut à la condition (Δ^3).

p et q et congruent à un segment de la ligne droite au sens ordinaire du mot dont la longueur est égale à la distance pq [1]. On déduit immédiatement de ce théorème qu'un sous-ensemble fermé d'un espace euclidien est convexe s'il est convexe au sens classique de MINKOWSKI et seulement dans ce cas. Remarquons d'ailleurs que dans un espace distancié convexe général il peut arriver que deux points puissent être joints par plusieurs segments. La surface d'une sphère à trois dimensions dans laquelle nous prenons comme distance la longueur du plus petit arc du grand cercle qui les joint, nous en fournit un exemple. C'est un espace convexe et complet, qui contient pour tout couple de points diamétralement opposés une infinité de segments qui les joignent.

Du point de vue topologique la notion de convexité est sinon identique du moins très voisine de celle de connexité et de connexité locale. Nous n'avons pas résolu la question de savoir si l'hypothèse — pour un espace distancié compact — d'être connexe et localement connexe est non seulement nécessaire mais encore suffisante pour que l'espace soit homéomorphe à un espace distancié convexe. Indiquons trois conditions qui sont suffisantes pour qu'un espace distancié soit homéomorphe à un espace convexe: 1° Deux points quelconques peuvent être joints par un arc de longueur finie. 2° p et q étant deux points distincts, la borne inférieure des longueurs de tous les arcs joignant p et q, est > 0. 3° A tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que deux points quelconques dont la distance est $< \delta$ puissent être joints par un arc de longueur $< \varepsilon$. En faisant alors correspondre à tout couple de points p, q de D la borne inférieure des longueurs de tous les arcs joignant p et q ou, comme nous dirons, la *distance interne* de p et q, nous obtenons un espace distancié convexe D′ homéomorphe à D. (Les segments de D′ correspondent aux arcs géodésiques de D.) [2]

---

1 Les notions de point intermédiaire et de convexité et leurs théories sont développées dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 75. Une nouvelle démonstration de l'existence d'un segment sous les conditions mentionnées a été donnée par M. ARONSZAJN, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 6, p. 45.

2 Cf. mon mémoire dans le *Mathem. Annalen*, 100, p. 96. Cf. aussi HOPF und RINOW, *Comment Math. Helvet.*, 3.

La théorie de la convexité se relie à l'axiomatique de la géométrie élémentaire, en particulier aux Anordnungsaxiome de Pasch, Hilbert et de l'école américaine. L'étude des propriétés découlant de la notion de convexité permet, à partir de l'espace triangulaire complet, d'obtenir des espaces de plus en plus particularisés de ce point de vue, et finalement certaines caractérisations des espaces linéaires et euclidiens.

Nous dirons, pour esquisser ce chemin, qu'un ensemble dans un espace distancié est *extérieurement convexe* s'il contient, pour chaque couple de points p et q, au moins un point r tel que q soit entre p et r. Un ensemble fermé, à la fois convexe et extérieurement convexe dans un espace complet contient pour chaque couple de points différents une « *droite* » qui les joint, c'est-à-dire un sous-ensemble contenant p et q, congruent avec une droite au sens ordinaire du mot. Pour que tout couple de points distincts d'un espace complet, convexe et extérieurement convexe détermine une droite et une seule les joignant, il faut et il suffit que l'espace jouisse de la propriété suivante que j'ai appelée *propriété des deux triplets:* Etant donné quatre points distincts deux à deux, *l'existence de deux triplets linéaires entraîne la linéarité des deux autres triplets.* (Nous dirons que le triplet p, q, r est *linéaire* lorsqu'un de ses points est situé entre les deux autres.)

En ajoutant les conditions d'être complet, convexe et extérieurement convexe aux conditions qui caractérisent les espaces distanciés congruents aux sous-ensembles des espaces euclidiens réels (se reporter au Chapitre I), nous obtenons la caractérisation des espaces euclidiens réels eux mêmes parmi les espaces distanciés. Mentionnons encore que le point de départ de ces recherches fut un théorème de M. Biedermann [1] que nous énoncerons ici de la façon suivante: Pour qu'un espace distancié compact et convexe soit congruent à un segment, il faut et il suffit qu'il contienne plus d'un point et que tout triplet de ses points soit linéaire.

Pour parvenir graduellement des espaces convexes et extérieurement convexes aux espaces linéaires et euclidiens il suffit

---

[1] Cf. *Mathem. Annalen*, 100, p. 114.

d'exclure l'existence dans l'espace de certaines singularités simples. Il s'agit des deux figures suivantes qui ne se rencontrent pas dans les espaces linéaires:

1. La *fourchette:* somme de trois segments pq, qr, qs n'ayant en commun deux à deux que le point q situé à la fois entre p et r, et entre p et s.

2. L'*étrier:* somme de quatre segments pq, qr, rs, ps qui n'ont en commun que des extrémités et tels que s soit entre p et r, et r entre q et s.

Si les points q et r d'un étrier sont situés entre p et s, l'étrier est somme de deux segments de mêmes extrémités (à savoir de p et s), et nous parlerons d'une *lentille*, par exemple: la somme de deux demi-grand-cercles d'une sphère. Notons deux configurations particulières intéressantes: 1° Le *cercle*, ensemble congruent à un cercle au sens ordinaire où l'on a pris comme distance de deux points la longueur du plus petit arc qui s'y termine. Le cercle constitue un étrier entre deux quelconques de ses points, il constitue plus particulièrement une lentille entre deux de ses points diamétralement opposés. 2° Le *trièdre convexe*, somme de trois segments pq, qr, qs n'ayant en commun deux à deux que le point q situé à la fois entre p et r, entre p et s, entre r et s.

Les espaces distanciés sont par définition des espaces E satisfaisant à la condition (Δ^3), c'est-à-dire des espaces E dont chaque triplet de points est congruent à un triangle euclidien. M. W. A. Wilson a récemment étudié [1] les espaces E satisfaisant aux conditions (Δ^3) et (Δ^4), c'est-à-dire des espaces E dont chaque quadruplet de points est congruent à un tétraèdre euclidien — par analogie nous pourrons appeler ces espaces: espaces *tétraédraux* — et il a obtenu le résultat intéressant suivant: Pour qu'un espace séparable et complet soit congruent à un espace euclidien ou à l'espace de Hilbert il faut et il suffit qu'il soit convexe, extérieurement convexe et tétraédral. Renvoyons le lecteur en terminant à un mémoire intéressant sur la sphère à n dimensions par M. L. M. Blumenthal [2].

---

[1] *Amer. Journ. of Math.*, 54.

[2] *Amer. Journ. of Math.*, 57.

III. — Géométrie des distances et algèbre des vecteurs.

Les conditions (Δ^k) et (Δ_0^k) du chapitre I étant de nature algébrique, les résultats de cette théorie permettent des applications dans le domaine de l'algèbre. Bornons-nous ici à mentionner les beaux résultats de M. L. M. Blumenthal sur les déterminants [1]. Nous allons entrer un peu plus dans le détail en ce qui concerne l'algèbre des vecteurs [2].

Désignons par *ensemble métrique de vecteurs* un ensemble V d'éléments de nature quelconque appelés vecteurs, tel qu'à tout couple v et w de ses éléments corresponde un nombre réel (vw) assujetti aux conditions

$$(\Gamma) \qquad (vw) = (wv)$$

$$(\Gamma') \qquad v \neq w \text{ implique } (vv) + (ww) \neq 2\,(vw).$$

Le nombre (vw) sera dit : *produit scalaire des vecteurs v et w.*

Etant donné k éléments $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V, nous introduirons leur déterminant de Gram $\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k)$

$$\Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_2) & \ldots & (v_1 v_k) \\ (v_2 v_1) & (v_2 v_2) & \ldots & (v_2 v_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (v_k v_1) & (v_k v_2) & \ldots & (v_k v_k) \end{vmatrix}$$

Un exemple d'ensemble métrique de vecteurs nous est fourni par la famille des vecteurs d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, en entendant par produit scalaire de deux vecteurs le produit scalaire au sens habituel.

A quelles conditions un ensemble métrique de vecteurs V est-il isomorphe à un ensemble de vecteurs d'un espace euclidien à n dimensions E_n ? C'est-à-dire trouver les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à tout élément de V un vecteur de E_n de façon que v' et w' étant les vecteurs homologues à deux

---

[1] *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37, 38 et *Amer. Journ. Math.*, 56.

[2] On trouve la théorie suivante esquissée dans ma note: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 27.

éléments v et w quelconques de V, on ait toujours $(vw) = (v' w')$. Voici un groupe de conditions à la fois nécessaires et suffisantes:

$$(\Gamma_0^{n+1}) \quad \Gamma(v_1 v_2, \ldots, v_{n+1}) = 0$$

pour tout système de $n + 1$ vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ de V.

$$(\Gamma_0^k) \quad \Gamma\, v_1, v_2, \ldots, v_k) \geqq 0$$

pour tout système de k ($k = 1, 2, \ldots, n$) vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V.

De plus, dans le cas où V consiste en $n + 2$ vecteurs exactement, il faut adjoindre aux conditions précédentes la condition

$$(\Gamma_0^{n+2}) \qquad \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_{n+2}) = 0 .$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de se reporter à ce qui a été fait dans le chapitre I. Posons comme carré de la distance de deux éléments v et w de V le nombre $\overline{wv}^2 = (vv) + (ww) - 2(vw)$. Nous définissons ainsi un espace E, soit V'; les conditions (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) auxquelles doit satisfaire $\overline{vw}^2$ sont en effet des conséquences immédiates de (Γ) et (Γ'). Et la condition nécessaire et suffisante pour que V soit isomorphe à un ensemble de vecteurs de l'espace euclidien E_n (auxquels on a donné la même origine p_0) c'est que V' soit applicable sur l'ensemble des extrémités de ces vecteurs. On déduira alors de (Γ_0^{n+1}), (Γ^k) ($k = 1, 2, \ldots, n$) les conditions (Δ_0^{n+2}) et (Δ^k) ($k = 2, 3, \ldots, n + 1$) en tenant compte de la relation

$$\Delta(p_0, p_1, \ldots, p_k) = (-2)^k\, \Gamma(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

où v_i désigne le vecteur $\overrightarrow{p_0 p_i}$.

Dans un ensemble métrique de vecteurs satisfaisant à la condition (Γ^2) le carré de la distance de deux vecteurs est toujours non-négatif [1] et nous pourrons introduire la notion de

---

[1] On a

$$\Gamma(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} (v_1 v_1) & (v_1 v_2) \\ (v_2 v_1) & (v_2 v_2) \end{vmatrix} = (v_1 v_1)(v_2 v_2) - (v_1 v_2)^2.$$

La condition (Γ^2) n'est autre que l'inégalité de Schwarz $(v_1 v_1)(v_2 v_2) \geqq (v_1 v_2)^2$. Cette condition entraîne l'inégalité $(vv) + (ww) \geqq 2(vw)$. Pour le montrer il suffit de prouver l'impossibilité de la relation $(vv) + (ww) < 2(vw)$. Or celle-ci élevée au carré impliquerait $(vv)^2 + 2(vv)(ww) + (ww)^2 < 4(vw)^2 \leqq 4(vv)(ww)$, d'où $(vv)^2 - 2(vv)(ww) + (ww)^2 < 0$, ce qui est évidemment impossible, le premier

vecteur intermédiaire. Nous dirons que le vecteur v est *entre* les vecteurs u et w lorsqu'on a:
ou bien

$$\Gamma(u, w) \neq 0 , \quad \Gamma(u, v, w) = 0 , \quad \Gamma(u, v) + \Gamma(v, w) = \Gamma(u, w)$$

ou bien

$$\Gamma(u, w) = 0 , \; \overline{uv} + \overline{vw} = \overline{uw} ,$$

en entendant par $\overline{xy}$ la détermination positive du radical $\sqrt{\overline{xy}^2}$.

L'ensemble de vecteurs V peut être appelé *convexe* et *extérieurement convexe* lorsqu'il contient pour tout couple d'éléments u et w au moins un élément v entre u et w, et au moins un élément x tel que w soit situé entre u et x. Pour qu'un ensemble de vecteurs V soit isomorphe à l'ensemble de tous les vecteurs de E_n il faut et il suffit qu'il soit complet, convexe et extérieurement convexe, que les déterminants de Gram soient nuls pour tout système de $n + 1$ vecteurs et non négatifs pour tout système en contenant moins de $n + 1$, et enfin qu'il existe n vecteurs dont le déterminant de Gram est $\neq 0$.

Un corollaire intéressant de notre théorème est que les opérations d'addition de deux vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre peuvent être définies dans un ensemble métrique de vecteurs. En d'autres termes, *pour développer l'algèbre des vecteurs il suffit de prendre comme point de départ la seule notion du produit scalaire* au lieu des trois opérations: addition, multiplication par un nombre et multiplication scalaire, qui ont servi de bases jusqu'à présent. En effet, étant donné deux vecteurs u et w et un nombre λ nous appellerons λu le vecteur u' tel que $\Gamma(u, u') = 0$ et $(uu') = \lambda(uu)$, et nous appellerons $u + v$ le vecteur w pour lequel $\Gamma(u, v, w) = 0$, $\Gamma\left(u, \frac{w}{2}\right) = \Gamma\left(v, \frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(u, v)$ si $\Gamma(u, v) \neq 0$ et $(ww) = (uw) + (vw)$ si $\Gamma(u, v) = 0$.

L'existence et l'unicité des vecteurs u' et w et les lois ordinaires de ces opérations d'addition et de multiplication par

---

membre étant égal à $[(vv) - (ww)]^2$. La condition (Γ^2) permet donc de préciser (Γ^1) sous la forme

$$v \neq w \text{ implique } (vv) + (ww) > 2(vw) .$$

un nombre sont garanties si l'ensemble de vecteurs est complet convexe et extérieurement convexe et jouit des propriétés (Γ^k).

Les recherches de MM. WILSON et BLUMENTHAL mentionnées à la fin du Chapitre II admettent de même une traduction dans le langage de l'algèbre des vecteurs. En particulier il découle du théorème de M. WILSON (p. 358), comme l'a remarqué M. BLUMENTHAL, qu'un ensemble de vecteurs séparable et complet est isomorphe à un espace vectoriel euclidien ou hilbertien si les conditions

$$\Gamma\,(\varrho_1\,,\,\varrho_2) \geqq 0 \text{ pour tout couple } \varrho_1,\ \varrho_2 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^2)$$

$$\Gamma\,(\varrho_1\,\varrho_2\,,\,\varrho_3) \geqq 0 \text{ pour tout triplet } \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3 \text{ de vecteurs} \qquad (\Gamma^3)$$

sont satisfaites ou, ce qui revient au même, si tout triplet de vecteurs est isomorphe à un triplet de vecteurs de E_n, résultat qui a été obtenu directement par MM. FRÉCHET, v. NEUMANN et JORDAN [1].

IV. — LA COURBURE DANS LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

Nous avons, dans les chapitres précédents, traité, en nous plaçant au point de vue de la géométrie des distances, des problèmes où l'espace et ses sous-ensembles interviennent globalement. Mais cette géométrie permet aussi l'étude des *propriétés locales* des variétés spatiales, et pénètre ainsi dans un domaine où a triomphé jusqu'alors brillamment et exclusivement la méthode analytique; cette méthode s'appliquait si bien à cette étude qu'on a fini par identifier la théorie des propriétés locales des figures avec la géométrie différentielle: application de l'analyse, surtout du calcul différentiel, aux modèles arithmétiques représentant les figures. Et même M. BOULIGAND qui a eu le mérite en créant sa Géométrie infinitésimale directe d'introduire l'analyse moderne, en particulier la théorie des fonctions de variable réelle, dans l'étude des propriétés géométriques locales — se borne à l'étude d'espaces où chaque point est (ou pourrait être) caractérisé par un système de coordonnées.

[1] *Annals of Mathem.*, 36, p. 705, p. 719.

L'idée d'une géométrie différentielle sans coordonnées semble encore aujourd'hui presque absurde à la plupart des géomètres; cependant la géométrie des distances a déjà résolu le problème si important de la courbure d'une façon qui laisse pressentir, comme nous le disions dans l'introduction, que la méthode analytique, bien qu'elle ait joué jusqu'alors un rôle prépondérant, n'est ni la seule possible, ni celle présentant le plus de généralité, ni peut-être même la plus conforme à la nature géométrique des problèmes.

Soit D un espace distancié, q, r, s trois de ses points, il existe trois points q', r', s' dans le plan euclidien tels que les triplets q, r, s et q', r', s' sont congruents. Si ρ désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle q', r', s', — en convenant de poser $\rho = \infty$ si q', r', s' sont en ligne droite — nous appellerons courbure du triplet q, r, s de l'espace distancié et nous désignerons par $\varkappa\,(q, r, s)$ l'inverse de ce rayon, c'est-à-dire $\frac{1}{\rho}$. Cette courbure sera nulle quand les trois points seront linéaires (p. 357) et seulement dans ce cas; et la propriété du segment due à M. Biedermann (p. 357) peut alors s'énoncer ainsi: Pour qu'un arc — c'est-à-dire un espace triangulaire homéomorphe à un segment — soit congruent à un segment, il faut et il suffit que tout triplet de points lui appartenant ait une courbure nulle.

Cet énoncé ne correspond pas à celui de la géométrie différentielle concernant les propriétés caractéristiques de la droite, qui fait intervenir une courbure définie en chaque point. Dans un espace distancié nous pouvons, cependant, aussi introduire une courbure *locale*, et cela de la façon suivante [1]: Nous dirons que D a la *courbure* $\varkappa\,(\mathrm{p})$ *au point* p, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que pour tout triplet q, r, s de points de D, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\,\varkappa\,(q, r, s) - \varkappa\,(p)\,| < \varepsilon$.

On peut alors se demander si un arc dont la courbure est nulle en chaque point est congruent à un segment. Il n'en est pas nécessairement ainsi: Prenons pour D l'ensemble des points x

[1] Cette notion de courbure et sa théorie est développée dans mon mémoire: *Mathem. Annalen*, 103.

de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ et comme distance des points x et y le nombre

$$|x - y| \text{ si } x \text{ et } y \text{ ont le même signe,}$$

$$|x| + |y| - x^2 y^2 \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires.}$$

D est alors un espace distancié homéomorphe au segment $-1 \leqq x \leqq 1$ de la droite euclidienne, dont la courbure est nulle en chaque point. Cependant cet arc n'est pas congruent à un segment, comme le montre la considération du triplet $-1, 0, 1$ dont les points ont deux à deux la même distance.

J'ai néanmoins démontré par des méthodes purement métriques qu'*un arc appartenant à un espace euclidien dont la courbure est partout nulle est un segment*, et ainsi fut établi un théorème de géométrie différentielle sans l'usage du calcul différentiel.

Comparé avec la définition classique de la courbure, la définition métrique est plus générale dans ce sens qu'elle s'applique aux espaces distanciés généraux. Mais dans le cas des espaces euclidiens MM. Haupt et Alt ont remarqué [1] que ma définition de la courbure était plus restrictive que la définition classique. Si l'arc $y = y(x)$ du plan euclidien admet au point $p_0 = (x_0, y_0)$ une courbure $\varkappa(p_0)$ au sens précédemment mentionné — disons une courbure métrique — la dérivée seconde $y''(x_0)$ existe et la courbure classique $\dfrac{y''(x_0)}{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}$ est égale à $\varkappa(p_0)$. Inversement, un arc peut posséder au point $p_0 = (x_0, y_0)$ une courbure au sens classique $\dfrac{y''(x_0)}{[1 + y'^2(x_0)]^{3/2}}$ sans posséder une courbure métrique; celle-ci est en effet une fonction continue du point ce qui n'est pas nécessairement le cas pour la courbure classique, comme le montre l'exemple de la courbe $y = x^4 \sin \dfrac{1}{x}$ pour le point $p = (0,0)$.

M. Alt a modifié [2] de la façon suivante la notion de la courbure métrique: au lieu de considérer des triplets q, r, s où les trois points sont variables, il se borne à la considération des triplets

[1] Cf. *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 3, p. 4.

[2] Dans sa thèse présentée à Vienne. Voir aussi: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 3, p. 5 et 4, p. 4.

p, q, r où deux points seuls sont variables. Il dit que D a la courbure $\varkappa(p)$ au point p, $\varkappa(p)$ étant un nombre fini, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple de points q, r, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa(p)| < \varepsilon$. Cette définition (valable dans tout espace distancié) appliquée aux courbes d'un espace euclidien est un peu plus générale que la définition classique [1]. M. Alt a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $y = f(x)$ — où f est une fonction définie dans un voisinage de x_0 qui n'admet pas une dérivée infinie pour $x = x_0$ — possède au point $(x_0, y_0 = f(x_0))$ une courbure, à son sens, c'est que $f'(x_0)$ existe et que les deux expressions

$$\frac{\overline{f}(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{f}(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

tendent toutes deux vers une limite finie, ces deux limites étant égales [2], quand x tend vers x_0; $\overline{f}$ et $\underline{f}$ désignent respectivement la dérivée supérieure et inférieure de la fonction f (celles-ci pouvant prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$).

M. Pauc a montré récemment qu'en prenant comme définition de la dérivée seconde pour la valeur $x = x_0$, la limite finie, si elle existe, de l'expression

$$\mathrm{E}(h, k) = \frac{\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \dfrac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k}}{\dfrac{(h - k)}{2}}$$

quand h et k tendent indépendamment l'un de l'autre vers 0, cette nouvelle définition coïncide avec la définition classique lorsque $f'(x)$ existe dans un voisinage de x_0. L'existence de

---

[1] M. Gödel a proposé la définition suivante qui est encore plus générale: Disons que l'arc D a la courbure $\varkappa(p)$ au point p, si à tout $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, il correspond un $\delta > 0$ tel que, pour tout couple de points q, r, *de part et d'autre de* p, dont la distance à p est $< \delta$, nous ayons $|\varkappa(p, q, r) - \varkappa(p)| < \varepsilon$.

[2] M. Pauc a remarqué que quand $f'(x_0)$ et les limites des deux expressions mentionnées existent, ces deux limites sont nécessairement égales; si A désigne leur valeur commune, la courbure de M. Alt a comme valeur $\dfrac{|A|}{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}}$.

$f''(x_0)$ dans ce sens entraîne l'existence de $f'(x_0)$ et celle de la courbure de M. Alt qui a alors comme expression $\frac{|f''(x_0)|}{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}}$ [1].

M. Pauc a démontré par ailleurs que dans un espace euclidien, si un continu k quelconque admet en un point p_0 une courbure de Alt, un voisinage de p_0 sur k est un arc rectifiable; ce qui permet l'énoncé suivant qui nous rapproche de la définition classique: Pour qu'un continu k d'un espace euclidien possède en un point p_0 une courbure de Alt $= \varkappa(p_0)$ il faut et il suffit qu'un voisinage de p_0 sur k soit un arc rectifiable, admettant une tangente t_0 en p_0, et qu'en se limitant aux points p où la tangente t existe, l'expression $\Delta\alpha : \Delta s$ ($\Delta\alpha$ = angle tt_0, Δs = longueur de l'arc pp_0) ait une limite égale à $\varkappa(p_0)$ lorsque p tend vers p_0.

Donnons un exemple d'un arc possédant en un point une courbure de Alt sans posséder une courbure classique. Il suffit de considérer les points $p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ et $q_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) (situés sur la parabole $y = x^2$) et la somme de deux lignes polygonales $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots$ complétée par le point 0. L'arc obtenu possède en ce dernier point une courbure au sens de M. Alt, égale à 2; il ne peut posséder une courbure classique dans ce point, car la fonction $y = f(x)$ représentant cet arc possède dans tout voisinage de 0, des points où $f'(x)$ n'existe pas. La dérivée seconde au sens classique n'est pas définie pour $x = 0$, tandis qu'elle l'est au sens plus large mentionné plus haut.

Au point de vue de la métrique interne (p. 362) les arcs ne présentent qu'un intérêt assez faible. Un arc D satisfait aux trois conditions mentionnées (p. 363) s'il est rectifiable et dans ce cas seulement. Or, en faisant correspondre aux couples de points d'un arc rectifiable quelconque leur distance interne, nous obtenons un espace D′ congruent à un segment dont la longueur est égale à celle de l'arc, donc un espace dont la courbure est 0 en chaque point.

Par contre, l'intérêt de la métrique interne devient prépondérant pour les espaces de dimension supérieure, et déjà pour

[1] Il s'ensuit que la valeur A, rencontrée plus haut, n'est autre que $|f''(x_0)|$.

les surfaces. Si D est une surface comme celles que l'on considère dans la géométrie différentielle, il correspond à chaque point p de D un nombre $k(p)$ appelé la courbure totale de D au point p, à savoir le produit des deux courbures principales des sections planes de D. Ce nombre, d'après un résultat célèbre de GAUSS, ne dépend que de la métrique interne de D; si D_1 et D_2 sont deux surfaces telles que les espaces convexes D_1' et D_2', portant les métriques internes de D_1 et D_2, soient congruents, alors les nombres $k(p_1)$ et $k(p_2)$ sont toujours égaux pour deux points p_1 de D_1 et p_2 de D_2 qui se correspondent par cette congruence. On connaît, d'ailleurs, les nombreuses définitions de $k(p)$ se basant sur la métrique interne de D, dues à GAUSS et à ses successeurs. Mais n'est-il pas possible, demandais-je, de définir cette courbure par la simple considération des quadruplets de points de D, comme nous venons de faire pour la courbure des courbes ?

La plus simple généralisation de cette dernière qui se présente, ne mène pas à la solution du problème, même dans le cas où D est un sous-ensemble d'un espace euclidien; car si l'on fait alors correspondre à quatre points de D le rayon de la sphère circonscrite et si l'on fait un passage à la limite analogue à celui que nous avons employé pour les courbes, on obtient un nombre qui ne dépend pas uniquement de la métrique interne de D.

M. WALD a cependant réussi récemment à résoudre le problème au moyen de l'idée suivante [1]: Il dit que l'espace distancié D' a la *courbure de surface* $\varkappa(p)$ au point p, lorsqu'aucun voisinage de p n'est linéaire et lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\delta > 0$ tel que tout quadruplet de points q, r, s, t de D', dont les distances à p sont $< \delta$, soit congruent à un quadruplet de points de S_k avec $|k - \varkappa(p)| < \varepsilon$; S_k désigne la surface d'une sphère à trois dimensions de courbure totale $k = \frac{1}{r^2}$ (r rayon réel ou imaginaire) portant la métrique interne, donc où l'on a pris comme distance de deux points p' et p'' la longueur du plus petit arc de grand cercle passant par p'

[1] Cf. *C. R.*, 201, p. 918. Voir aussi: *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 6, p. 29 et cahier 7, p. 24.

et p''. Si D′ est une surface comme celles que l'on considère en géométrie différentielle, la courbure totale $k(p)$ en tout point p est égale à la courbure de surface $\varkappa(p)$ de D′ au point p. La définition de WALD qui ne nécessite pas la représentation des points par des coordonnées, peut donc servir à introduire de façon bien naturelle et extrêmement simple la notion importante de courbure.

Les surfaces de GAUSS sont donc des espaces compacts et convexes admettant en chaque point une courbure de surface $\varkappa(p)$ au sens de M. WALD. Mais encore plus important et plus remarquable est, me semble-t-il, le théorème inverse démontré par M. WALD.

Tout espace distancié compact et convexe qui admet une courbure de surface en chaque point, est une surface de GAUSS. En se basant sur la seule hypothèse qu'un espace distancié général est compact, convexe et admet en chaque point une courbure de surface au sens de M. WALD, celui-ci peut démontrer que l'espace est localement homéomorphe à l'intérieur d'un cercle, que deux points assez voisins peuvent toujours être joints par un seul segment, qu'on peut introduire des angles et des coordonnées polaires ρ, φ, et que la longueur d'un petit arc

$$\rho = \rho(t)\,,\ \varphi = \varphi(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$\rho(t)$ et $\varphi(t)$ étant deux fonctions dérivables de t, est égale à

$$\int_0^1 \left[\rho'^2(t) + G^2(\rho,\varphi)\,\varphi'^2(t)\right]^{\frac{1}{2}} dt\,,$$

où $G(\rho, \varphi)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2} = -\varkappa(\rho,\varphi)\,.\,G(\rho,\varphi)$$

satisfaisant aux conditions $G(0, \varphi) = 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \rho}(0, \varphi) = 1$ et où $\varkappa(\rho, \varphi)$ désigne la courbure de surface de D′ au point (ρ, φ). On a donc le théorème fondamental suivant:

Pour qu'un espace distancié compact soit une surface de

Gauss, il est nécessaire et suffisant qu'il soit convexe et admette une courbure de surface en chaque point.

Ce théorème montre que la géométrie des distances fournit une nouvelle base à l'étude des propriétés métriques locales des surfaces.

V. — Géométrie des distances et calcul des variations.

Soit donné un espace distancié. Un ensemble fini ordonné de points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ est appelé *polygone* (et polygone *fermé* si $p_1 = p_k$). Nous considérons des courbes continues dans l'espace donné. C étant l'image continue d'un intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$, nous appelons sous-polygone de C l'image $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ (par la même représentation) d'un ensemble fini ordonné de nombres $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k$ de $[\alpha, \beta]$. Par $\nu(P)$ nous désignons le plus grand des nombres $\gamma_{i+1} - \gamma_i$.

Soit donnée une fonction $F(p; q, r)$ des triplets de points $(q \neq r)$. Cette fonction permet l'introduction d'une nouvelle métrique si nous prenons pour chaque couple de points q, r, au lieu de la distance $\overline{qr}$ qu'ils ont dans D, le nombre $d(q, r) = F(q; q, r) \cdot \overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d(q, q) = 0$. Soit D(F) l'espace à distances réelles qu'on obtient ainsi. En attribuant, étant donné un point p, à q et r la distance $d_p(q, r) = F(p; q, r)\overline{qr}$ si $q \neq r$, et $d_p(q, q) = 0$ nous obtenons un autre espace à distances réelles que nous appellerons l'espace tangent $D_p(F)$ de D(F) au point p. Pour le polygone P nous considérerons outre sa longueur $l(P) = \Sigma \overline{p_i p_{i+1}}$ dans D, ses longueurs dans D(F) et dans $D_p(F)$, à savoir les nombres

$$\lambda(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p_i; p_i, p_{i+1}) \cdot \overline{p_i p_{i+1}} \cdot$$

et

$$\lambda_p(P, F) = \sum_{i=1}^{k-1} F(p; p_i, p_{i+1}) \overline{p_i p_{i+1}} \cdot$$

La borne supérieure finie ou infinie des nombres $l(P)$ pour tous les sous-polygones de C est appelée la *longueur* l(C) de C. On dit que C est *rectifiable* si l(C) est fini.

Imposons à la fonction F les conditions suivantes pour chaque courbe rectifiable C:

1. F (p; q, r) *est bornée pour tous les triplets* p, q, r *d'un voisinage de* C.

2. *L'ensemble de tous les points* p *de* C *pour lesquels l'oscillation de* F *est* > 0, *est de mesure linéaire* 0, c'est-à-dire il peut être couvert par des sphères, en nombre fini ou infini, dont la somme des diamètres soit aussi petite que l'on voudra. Par l'oscillation $\sigma(p)$ de F au point p nous entendrons la borne supérieure de tous les nombres σ pour lesquels il existe dans tout voisinage de p quatre points p', p'', q, r tels que $|F(p'; q, r) - F(p''; q, r)| \geqq \sigma$. Les points pour lesquels $\sigma(p) > 0$, sont les points de discontinuité de F par rapport à la première des trois variables.

3. *L'ensemble des points* p *de* C *pour lesquels* $\tau_C(p)$ *est* > 0 *est de mesure linéaire* 0. Par $\tau_C(p)$ nous entendons la limite pour $\rho \to 0$ de la borne supérieure des nombres $\tau(q)$ pour les points q dont la distance à p est $< \rho$. Nous désignons ici par $\tau(q)$ la borne supérieure des nombres τ pour lesquels il existe un polygone $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ avec $p_1 = q$ et tel qu'on ait

$$\lambda_p(P, F) \leqq d(p_1, p_n) - \tau\,|\,d(p_1, p_n)\,| .$$

On a $\tau(p) \geqq 0$ pour tout point p et $\tau(p) = 0$ dans le cas et seulement dans le cas où

$$F(p; p, q)\,\overline{pq} + F(p; q, r)\,\overline{qr} \gtreqless F(p; q, r)\,\overline{pr}$$

pour tout couple q, r.

4. $\tau_C(p)$ *est fini en tout point* p *de* C.

5. *Pour tout polygone fermé* P *qui est assez voisin d'un point* p *de discontinuité de* F, *on a* $\lambda(P, F) \geqq 0$.

Ces hypothèses sur la fonction F étant admises on a le théorème suivant:

Pour chaque suite $P_1, P_2, \ldots$ *de sous-polygones d'une courbe continue rectifiable pour laquelle on a lim* $\nu(P_n) = 0$, les nombres

$\lambda(P_n, F)$ *convergent vers un nombre fini. Cette limite est la même pour toutes les suites de sous-polygones de* C *assujetties à la condition que* $\nu \to 0$. *Nous la désignerons par* $\lambda(C, F)$. *Pour chaque* $\lambda > 0$ *donné,* $\lambda(C, F)$ *est une fonctionnelle semicontinue inférieurement sur l'ensemble de toutes les courbes de longueur* $\leqq \lambda$. *Si, d'ailleurs, pour chaque* $\lambda > 0$ *donné, les longueurs de toutes les courbes* C *pour lesquelles* $\lambda(C, F) \leqq \lambda$, *sont bornées, chaque classe complète de courbes rectifiables contient une courbe pour laquelle la fonctionnelle* $\lambda(C, F)$ *atteint son minimum.*

Quel est l'avantage de cette généralisation des théorèmes d'existence du calcul des variations ? Tout d'abord, la forme métrique met en évidence que l'hypothèse de la nature cartésienne de l'espace (à savoir la représentation des points par un groupe de coordonnées), hypothèse considérée jusqu'alors comme base des problèmes du calcul des variations, n'est pas liée à l'essence du problème. Dans tous les espaces distanciés se posent des questions concernant l'extremum des fonctionnelles de courbes, données par des intégrales curvilignes. Mais même en l'appliquant aux espaces euclidiens, donc au cas classique, notre théorème, outre une grande simplicité dans les démonstrations, semble apporter un progrès [1], car les conditions imposées à F même dans les profonds théorèmes de M. Tonelli sont plus restrictives que les nôtres. Considérons, pour nous en rendre compte, nos cinq hypothèses sur F dans le cas où l'espace distancié donné est un espace euclidien à n dimensions [2].

Dans les problèmes classiques, il correspond à chaque point $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de cet espace (ou d'un certain domaine) et à chaque direction $\delta = (x_1' : x_2' : \ldots : x_n')$ un nombre

$$F(p, \delta) = F(x_1, \ldots, x_n; x_1', \ldots, x_n') = \frac{1}{k} F(x_1, \ldots, x_n; kx_1', \ldots, kx_n')$$

$$\text{pour} \quad k > 0 .$$

[1] Je viens d'apprendre que dans le cas euclidien M. Bouligand a récemment (*Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 3^{me} sér., t. 19) considéré, pour les fonctions continues et quasi-régulières partout, des sommes riemaniennes ainsi que nous venons de le faire dans le cas général, et a ainsi obtenu une démonstration très élégante d'un théorème d'existence. M. Bouligand, tout en se bornant aux fonctions positivement définies, s'est bien aperçu de la portée de sa méthode. La nôtre était en germe dans des recherches sur la longueur des arcs (*Mathem. Annalen*, 103) et nous l'avons exposée dans un article de *Fundam. Mathem.*, 25, et dans une note aux *C. R. Paris*, 21.X.1935.

[2] Cf. ma note, *C. R.*, 200, p. 705.

Pour appliquer notre théorie posons pour trois points p, q, r donnés $(q \neq r)$ $F(q; q, r) = F(p, \delta_{qr})$ où δ_{qr} désigne la direction de la demi-droite partant de q et passant par r. Les hypothèses 1 et 2 sont réalisées si, pour chaque courbe rectifiable C, la fonction $F(p, \delta_{qr})$ est *bornée dans un voisinage de* C et *continue sur* C *sauf pour les points d'un ensemble de mesure linéaire* 0, c'est-à-dire d'un ensemble qu'on peut recouvrir au moyen d'une suite dénombrable de sphères dont la somme des diamètres est arbitrairement petite. La quasi-régularité $\tau(p) = 0$ de la fonction F au point p (qui par la condition 3 est postulée pour presque tous les points p) s'exprime maintenant par l'inégalité suivante valable pour chaque triplet de points p, q, r:

$$F(p, \delta_{pq})\,\overline{pq} + F(p, \delta_{qr})\,\overline{qr} \geq F(p, \delta_{pr})\,\overline{pr}\,.$$

Pour voir la signification de cette propriété, nous désignons, pour chaque droite orientée δ passant par p, par e_δ le point de δ dont la distance à p est égale à $\dfrac{1}{|F(p, \delta)|}$ et qui est situé sur le rayon positif ou négatif de δ suivant le signe de $F(p, \delta)$, c'est-à-dire nous construisons l'*indicatrice* E de F au point p dans le sens où, pour des fonctions définies, M. Carathéodory l'a introduite. Pour que F soit quasi-régulière au point p, il faut et il suffit alors, comme l'a démontré M. Alt, qu'il existe une collinéation π qui transforme l'hypersurface indicatrice E du point p, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points e_δ, en une surface convexe à $n - 1$ dimensions $\pi(E)$ telle que $\pi(p)$ soit situé à l'intérieur de $\pi(E)$ et que $\pi(e_\delta)$ soit situé sur le semi-rayon positif de $\pi(\delta)$ par rapport à $\pi(p)$. Il est clair que la régularité de F au point p signifie la convexité projective de l'hypersurface indicatrice E du point p. Si $F(p, \delta)$ est non négative pour chaque droite δ passant par p, la convexité projective n'est rien d'autre que la convexité au sens ordinaire.

Remarquons en terminant que la méthode exposée permet aussi[1] d'étendre le champ des courbes de comparaison et l'introduction des courbes non rectifiables dans le calcul des variations[2].

[1] Cf. ma Note *C. R. Paris*, t. 202, p. 1648.

[2] Je tiens à remercier M. Pauc de son aide dans la rédaction de cet article et pour plusieurs remarques qu'il m'a communiquées à ce sujet.

LE 10e CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

Oslo, 13-18 juillet 1936

par H. FEHR.

La Norvège a donné à la Science deux des plus grands mathématiciens du XIXe siècle, Niels Henrik ABEL (1802-1829) et Sophus LIE (1842-1899). Elle possède à l'heure actuelle une élite de géomètres dont les travaux sont très appréciés dans le monde entier. Aussi est-ce aux applaudissements unanimes de l'assemblée, qu'à la séance de clôture du Congrès de Zurich, le 13 septembre 1932, les mathématiciens accueillirent l'invitation présentée par le Professeur Guldberg de se rendre à Oslo en 1936.

Le Congrès s'est tenu à Oslo, du 13 au 18 juillet, conformément au programme que nous avons reproduit dans un précédent fascicule (34me année, nos 5-6, p. 377-379). Plus de cinq cents mathématiciens, accompagnés de près de deux cents membres de leurs familles et représentant 35 pays, ont répondu à l'appel du Comité d'organisation présidé d'abord par le regretté Alf GULDBERG, puis par le Professeur STÖRMER.

La participation au Congrès doit être considérée comme très satisfaisante si l'on tient compte des difficultés économiques et politiques du temps présent. Les restrictions budgétaires atteignent non seulement les particuliers, mais encore de nombreuses institutions qui, par le passé, pouvaient prendre à leur charge tout ou partie des frais de leurs délégués. Au dernier moment, les mathématiciens russes ont été empêchés de quitter leur pays, alors que bon nombre d'entre eux avaient annoncé des communications. L'Italie s'est abstenue officiellement en raison des sanctions.

D'éminents géomètres ont été invités à faire des conférences générales sur les progrès récents dans les principaux domaines des mathématiques. Plus de deux cents communications ont été présentées dans les séances de sections.

Organisé avec soin, le Congrès d'Oslo laissera le meilleur souvenir à tous les participants, tant au point de vue des travaux scientifiques qu'à celui des relations personnelles entre savants cultivant le même domaine de la science.

Réceptions et excursions. — Le contact entre congressistes a été largement facilité par les nombreuses réceptions officielles, les réceptions privées et les excursions. C'est par une réception à l'Aula de l'Université que le Congrès a débuté le lundi 13 juillet, à 20 heures.

Le lendemain, à 17 h. 30, S. M. LE ROI a reçu les membres du Congrès au Palais Royal. En traversant la belle promenade publique qui se trouve devant le palais, les invités ont pu admirer le monument élevé en 1902 à la mémoire de Niels Henrik ABEL [1].

Le mercredi soir, Dîner de gala offert par la Ville d'Oslo à l'Hôtel Bristol.

Le jeudi, de 16 à 24 heures, excursion sur le fjord d'Oslo avec le paquebot transatlantique, *Stavanger-Fjord*, de la « Norske Amerikalinje ». S. A. R. LE PRINCE HÉRITIER, Président d'honneur du Congrès, et S. A. R. LA PRINCESSE HÉRITIÈRE ont bien voulu prendre part à l'excursion. A 18 h., un dîner était servi dans les quatre belles salles à manger du transatlantique.

Rappelons aussi les réceptions et les excursions organisées par le Comité des dames pour les familles des congressistes.

Des excursions plus vastes à travers la Norvège ont eu lieu après le Congrès sous les auspices de l'Agence de voyage Bennett.

SÉANCES GÉNÉRALES

Séance solennelle d'ouverture.

La séance solennelle d'ouverture a eu lieu à l'Aula, le mardi 14 juillet, en présence de S. M. LE ROI. Le Gouvernement était représenté par M. Halvdan KOHT, Ministre des Affaires étrangères et M. Nils HJELMTVEIT, Ministre de l'Instruction publique.

M. le Prof. C. STÖRMER, Président du Comité d'organisation, souhaite la bienvenue aux congressistes et remercie S. M. LE ROI ainsi que les représentants des autorités gouvernementales et municipales d'avoir bien voulu, par leur présence, rehausser l'éclat de la séance d'ouverture. Il y voit un témoignage de l'intérêt que le pays tout entier porte aux sciences mathématiques. Il tient à rappeler la mémoire de son regretté collègue, M. le Prof. Alf GULDBERG, premier président du Comité d'organisation, décédé le 15 février 1936, dans sa 70^{me} année.

M. H. KOHT, Ministre des Affaires étrangères, apporte les souhaits de bienvenue du Gouvernement. Il est heureux de voir réunis dans la capitale norvégienne tant de savants venus de toutes les parties du monde pour y exposer les résultats de leurs recherches.

M. le Prof. FUETER, Président du Congrès de Zurich, propose de confier la présidence du Congrès à M. le Prof. C. STÖRMER, qui est nommé par acclamations.

---

[1] Voir *L'Ens. Math.*, 4^e année, 1902, p. 445-447.

Sur la proposition de M. STÖRMER, M. le Prof. Edgar B. SCHIELDROP est nommé Secrétaire-général du Congrès. L'assemblée désigne ensuite les *vice-présidents* chargés de présider les séances générales. Ce sont MM. Harald BOHR (Copenhague), T. CARLEMAN (Stockholm), M. FUJIWARA (Tohoku), Gaston JULIA (Paris), Salomon LEFSCHETZ (Princeton, U.S.A.), F. LINDELÖF (Helsingfors), K. MENGER (Vienne), G. POLYA (Zurich), Erhard SCHMIDT (Berlin), J. A. SCHOUTEN (Delft), W. SIERPINSKI (Varsovie) et E. T. WHITTAKER (Edinburgh).

Pour la première fois le Congrès est appelé à décerner les deux *Prix internationaux de Mathématiques* consistant en deux médailles en or et destinées à récompenser deux jeunes savants qui se sont particulièrement distingués par leurs recherches. On sait que ces prix sont assurés par un fonds, géré par l'Institut royal canadien et constitué par le solde des sommes réunies par feu le Prof. FIELDS en faveur du Congrès de Toronto (1924). Soumis préalablement au Comité de l'Union internationale Mathématique, les statuts de cette fondation ont été approuvés par le Congrès de Zurich.

M. le Prof. C. CARATHÉODORY (Munich) rapporte au nom de la Commission chargée de se prononcer sur le choix des lauréats. Les deux *Médailles Fields* sont attribuées, l'une, au mathématicien finlandais M. L. AHLFOHRS, élève du Prof. Nevanlinna, pour ses importantes contributions à la Théorie des fonctions, l'autre, à M. J. DOUGLAS, jeune savant américain de la Harvard University, pour sa résolution du Problème de Plateau. M. le Prof. E. CARTAN, remplaçant M. SEVERI, président de la Commission Fields, remet les médailles aux deux lauréats.

Conférences générales.

Les conférences générales ont débuté le mardi matin 14 juillet, à 10 heures, par un exposé de M. STÖRMER sur ses belles recherches concernant les orbites des électrons et les applications aux raies cosmiques et aux aurores boréales (Programme for the quantitative discussion of electron orbits in the field of a magnetic dipole, with application to cosmic rays and kindred phenomena).

Puis vint la conférence de M. FUETER, intitulée « Die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen », dans laquelle il donne un aperçu de ses récents travaux.

Le mercredi 15 juillet a eu lieu l'inauguration d'un *Buste de Sophus Lie* offert à l'Université d'Oslo et présenté par M. J. Sejersted BÖDTKER, président du Comité d'initiative. A cette occasion, M. E. CARTAN a fait une très belle conférence intitulée « Quelques aperçus sur le rôle de la théorie des groupes de Sophus Lie dans le développement de la géométrie moderne ».

Les conférences se sont poursuivies tous les matins jusqu'au samedi 18 juillet. Nous devons nous borner à en donner la liste:

C. L. Siegel (Frankfurt a. M.), Analytische Theorie der quadratischen Formen.
O. Veblen (Princeton), Spinors and projective Geometry.
J. Nielsen (Copenhague), Topologie der Flächenabbildungen.
E. Hecke (Hamburg), Neuere Fortschritte in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen.
O. Neugebauer (Copenhague), Ueber vorgriechische Mathematik und ihre Stellung zur griechischen.
C. W. Oseen (Stockholm), Probleme der geometrischen Optik.
V. Bjerknes (Oslo), New Lines in Hydrodynamics.
H. Hasse (Göttingen), Ueber die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern.
G. D. Birkhoff (Cambridge, Mass.), On the Foundations of Quantum Mechanics.
L. J. Mordell (Manchester), Minkowski's Theorems and Hypotheses on Linear Forms.
L. Ahlfors (Helsingfors), Geometrie der Riemannschen Flächen.
J. G. van der Corput (Groningen), Diophantische Approximationen.
S. Banach (Lwow), Le rôle de la théorie des opérations de l'analyse.
M. Fréchet (Paris), Mélanges mathématiques.
N. Wiener (Cambridge, Mass.), Tauberian Gap Theorems.
Ö. Ore (New Haven, Conn.), The Decomposition Theorems Algebra.

Séance de clôture.

Résolutions.

Le samedi 18 juillet, à 17 heures, les congressistes se sont réunis une dernière fois dans l'Aula de l'Université, sous la présidence de M. le Prof. Störmer, assisté de M. le Prof. Schieldrop, Secrétaire général, pour prendre connaissance des résolutions et donner leur avis sur le choix du siège du prochain congrès.

I. — On sait qu'à la suite de l'opposition manifestée par quelques mathématiciens à l'égard de l'*Union Internationale Mathématique*, une commission avait été constituée à Zurich pour étudier à nouveau les rapports entre les mathématiciens des différents pays et pour faire rapport au Congrès d'Oslo. Elle était composée de MM. Severi, président, Alexandroff, Blaschke, Bohr, Féjèr, Julia, Mordell, Terradas, de la Vallée-Poussin, Veblen, et Zaremba. M. C. Julia, rapporteur, donne lecture du texte adopté par la commission:

« La Commission nommée par le Congrès de Zurich a vivement regretté l'absence de son président M. Severi. Elle n'a pu, pour diverses raisons, arriver à un accord unanime sur la question d'une organisation internationale des mathématiciens. Elle souhaite que dans l'avenir la question posée puisse recevoir une solution. »

II. — La Section VIII propose le maintien de la *Commission internationale de l'Enseignement mathématique.* — M. H. Fehr rapporte au nom de la section.

La Commission a été constituée à Rome, en 1908, à la suite d'une résolution du quatrième Congrès international des Mathématiciens; elle a été confirmée en 1912 à Cambridge, en 1928 à Bologne et en 1932 à Zurich. Présidée successivement par MM. Félix Klein, D.-E. Smith et J. Hadamard, elle a publié de nombreuses études d'un grand intérêt sur l'enseignement des mathématiques dans les principaux pays. Au moment où, dans d'autres domaines, la coopération internationale rencontre encore des obstacles, nous sommes heureux de pouvoir faire constater ici que les travaux de la Commission ont pu se poursuivre dans un excellent esprit de compréhension et de collaboration.

A l'ordre du jour de la réunion d'Oslo figurait la présentation, par les délégations nationales, des rapports sur *Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique.* Après avoir pris connaissance de ces rapports, la Section VIII a décidé, à l'unanimité, de soumettre la résolution suivante à l'approbation du Congrès:

Le Congrès invite la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique à poursuivre ses travaux. Les objets à mettre à l'étude seront fixés par le Comité Central. (Adopté à l'unanimité.)

III. — *Médaille Fields.* — Deux médailles en or seront distribuées au prochain congrès à deux mathématiciens qui se seront distingués par leurs travaux. Sur la proposition du Comité du Congrès, la Commission de la Médaille Fields est composée comme suit: M. Hardy, président, et MM. Alexandroff, Hecke, Julia, Levi-Civita; suppléants: MM. Lefschetz et Nevanlinna.

IV. — *Lieu du prochain congrès.* — M. le Prof. Eisenhart, parlant au nom de l'« American Mathematical Society », invite le Congrès à venir aux Etats-Unis en 1940, le choix de la ville étant laissé aux soins de la Société Mathématique américaine

« The American Mathematical Society hereby extends to the International Congress of Mathematicians now in session in Oslo an invitation to hold the next congress in the United States of America, the place of meeting to be determined later by the Society. This invitation is presented by the official delegates of the Society in accordance with action taken by the Council of the Society, viz. Chairman, L. P. Eisenhart, G. D. Birkhoff, H. F. Blichfeldt, S. Lefschetz, M. Morse, V. Snyder, O. Veblen, N. Wiener. »

Cette invitation est acceptée par acclamations.

* * *

M. J. A. SCHOUTEN remercie, au nom des congressistes, le Gouvernement norvégien, les autorités municipales d'Oslo, le Comité d'organisation et les divers comités de l'accueil qu'ils ont fait aux mathématiciens étrangers et à leurs familles. Il tient à les féliciter de l'excellente organisation du Congrès. (Applaudissements prolongés).

Après avoir exprimé sa reconnaissance à tous ceux qui, par leurs travaux, ont contribué à la réussite des séances générales et des séances de sections, le président déclare clos le dixième Congrès international des mathématiciens.

SÉANCES DES SECTIONS

Liste des communications.

Section I: Algèbre et Théorie des Nombres.

Présidence: MM. Nagell, Rella, Jarnik, Gut.

WEYL, *Princeton, N. J.* — Faktorensysteme und Riemannsche Matrizen.

MAHLER, *Groningen.* — Pseudobewertungen.

KRAITCHIK, *Bruxelles.* — Les grands nombres premiers.

GUT, *Zürich.* — Über Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern.

NAGELL, *Uppsala.* — Sur la grandeur des diviseurs premiers d'une classe de polynomes cubiques.

BERGSTRÖM, *Uppsala.* — Die Berechnung einer Basis eines kubischen Körpers nach G. T. Woronoj.

JARNIK, *Prague.* — Zur Theorie der Diophantischen Approximationen.

MORDELL, *Manchester.* — Note on the four integer cubes problem.

FUJIWARA, *Tohoku.* — Ein Problem aus der Theorie der Diophantischen Approximationen.

PETTERSON, *Hässelby Villastad.* — Eine Irreduzibilitätsmethode ganzzahliger Polynome.

RIESZ, *Lund.* — Volumes mixtes et facteurs invariants dans la théorie des modules.

LUBELSKI. — Verallgemeinerung des Galoisschen Satzes über algebraische Auflösbarkeit.

NEUMANN, *Cambridge, England.* — Identical relations in groups.

PÓLYA, *Zürich.* — Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Permutationsgruppen und chemische Verbindungen.

RADO, *Cambridge, England.* — Some recent results in combinatorial analysis.

KORINEK, *Praha.* — La décomposition d'un groupe en produit direct des sous-groupes.

HIRSCH, *Cambridge, England.* — On a class of infinite soluble groups.

PICCARD, *Neuchâtel.* — Les substitutions qui sont des transformées réciproques.

BURCKHARDT, *Zürich.* — Über lineare inhomogene Substitutionsgruppen.

BRUN, *Trondheim.* — Über die Möglichkeit für π eine Gesetzmässigkeit in den Dezimalen zu entdecken.
HOFREITER, *Wien.* — Über die Approximation von komplexen Zahlen.
RELLA, *Wien.* — Über den absoluten Betrag von Matrizen.
TAUSSKY, *Cambridge, England.* — Some problems of topological algebra.
OLDENBURGER, *Chicago.* — Non-singular multilinear forms and non-singular p-ic forms.
MANDELBROJT, *Clermont-Ferrand.* — Sur le théorème de Grace.
ERDÖS, *Budapest.* — On some additive properties of integers.
RIESZ, *Lund.* — Modules réciproques.
BIRKHOFF, *Garrett, Cambridge, Mass.* — Order and the inclusion relation.

Section II: Analyse.

II *a.*

Présidence: MM. Mandelbrojt, Menger, Bateman, Brelot.

DRACH, *Paris.* — Sur « l'Intégration logique » des équations dynamiques.
TAMBS LYCHE, *Trondheim.* — Sur la solution d'une équation différentielle du premier ordre.
RIESZ, *Lund.* — Intégrale de Riemann-Liouville et solution invariantive du problème de Cauchy pour l'équation des ondes.
MENGER, *Wien.* — Metric methods in calculus of variations.
MORSE, *Princeton.* — Functional topology and abstract variational theory.
LEPAGE, *Bruxelles.* — Sur les équations de Monge-Ampère provenant du calcul des variations.
WAZEWSKI, *Cracovie.* — Une propriété de caractère intégral de l'équation

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - A(x, y)\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0 .$$

BIRKHOFF, *Garrett Cambridge, Mass.* — Product integration of non-linear differential equations.
ÁSGEIRSSON, *Island.* — Ein Mittelwertsatz für Lösungen der partiellen Differentialgleichung $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right) = 0$, angewandt für zwei Potentialfunktionen.
DUSL, *Praha.* — Sur les noyaux des équations intégrales homogènes pour quelques classes de polynômes.
WIDDER, *Cambridge, Mass.* — An integral equation of Stieltjes.
BARNETT and MENDEL, *Cincinnati.* — On an integral equation quadratic in the unknown function.
BADESCU, *Cluj.* — Sur une série de Laurent identiquement nulle.
ZAREMBA, *Cracovie.* — Sur une propriété des caractéristiques des équations aux dérivées partielles, linéaires et du deuxième ordre.
SCHAUDER, *Lwów.* — Nichtlineare partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus.
JANET, *Caen.* — Sur les systèmes de deux équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues.

Riesz, *Lund.* — Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green.

Frostman, *Lund.* — Le principe de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques.

Perkins, *Hanover, New Hampshire.* — Mean value theorems, with applications in the theory of harmonic, subharmonic and superharmonic functions.

Mazur und Schauder, *Lwów.* — Über ein Prinzip in der Variationsrechnung.

Sternberg, *Jérusalem.* — Erweiterte Integralgleichungen.

II *b.*

Présidence: MM. Saxer, Milloux, Speiser, Selberg.

Speiser, *Zürich* — Zur geometrischen Funktionentheorie.

Milloux, *Bordeaux.* — Sur quelques points de la théorie des fonctions méromorphes dans un cercle.

Ullrich, *Giessen.* — Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre.

Cartwright, *Cambridge, England.* — On analytic functions with non-isolated essential sigularities.

Selberg, *Oslo.* — Abelsche Integrale und endlichvieldeutige analytische Funktionen.

Junnila, *Helsinki.* — Über das Anwachsen einer analytischen Funktion in gegebenen Punktfolgen.

Paatero, *Helsinki.* — Über analytische Transformationen welche zwei Paare von Randbogen ineinander überführen.

Peschl, *Jena.* — Über die Schlichtheit analytischer Funktionen.

Cooper, *Belfast.* — A class of divergent series.

Obrechkoff, *Sofia.* — Sur les fonctions méromorphes qui sont limites des fonctions rationnelles.

Planas Corbella, *Zaragoza.* — Sur quelques propriétés différentielles des riemanniennes des fonctions analytiques de plusieurs variables.

Behnke, *Münster (Westf.).* — Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität.

Walker, *Starkville.* — The higher singularities of algebraic curves.

Tacklind, *Uppsala.* — Sur les classes quasi-analytiques des solutions de l'équation de la chaleur.

Flamant, *Strasbourg.* — Familles compactes de fonctions dans les classes quasi-analytiques *(D)*.

Siddigi, *Hyderabad.* — On the theory of an infinite system of non-linear integral equations.

Murci Ahmed, *Le Caire.* — On the uniformation of algebraic curves.

Potron, *Paris.* — Irréductibilité de certaines intégrales abéliennes aux transcendantes élémentaires.

Mayr, *Graz.* — Über die Lösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen.

Devisme, *Tours* (lue par M. Paul Delens). — Sur une généralisation des polynômes de Gegenbauer.

San Juan, *Madrid.* — Sur le problème de Watson.

II *c*.

Présidence: MM. Tchakaloff, Cramér, Karamata, Nörlund.

NYSTRÖM, *Helsinki.* — Instrumentelle Auswertung von Stieltjesintegralen.
TCHAKALOFF, *Sofia.* — Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendungen.
WEINSTEIN, *Genève.* — Einige Ungleichungen für Doppelintegrale.
MULHOLLAND, *Newcastle.* — The length of a curve and the area of a curved surface as continuous functionals.
RACLIS, *Bucarest.* — Sur le calcul aux différences.
McSHANE, *Charlottesville.* — A non-absolutely convergent integration process.
SINGH, *Lucknow.* — On some properties of a non-differentiable function.
GILLIS, *Sunderland.* — Some combinatorial properties of measurable linear sets.
MAZUR und ORLICZ, *Lwów.* — Polynomische Operationen in abstrakten Räumen.
YOUNG, *Cambridge, England.* — Remarks on the convergence problem of Fourier series of periodic and almost periodic functions, and on Parseval's equation.
TODD, *Belfast.* — Transfinite superposition of absolutely continuous functions.
OFFORD, *Cambridge, England.* — The uniqueness of the representation of a function by a trigonometric integral.
LEJA, *Warszawa.* — Sur les séries de polynômes homogènes de deux variables.
OBRECHKOFF, *Sofia.* — Sur quelques classes de polynômes et sur le développement en séries suivant ces polynômes.
KARAMATA, *Beograd.* — Über allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren.
KACZMARZ, *Lwów.* — On the orthogonal series.
MAZUR, *Lwów.* — Einige Probleme aus der Limitierungstheorie.
YOUNG, *Cambridge, England.* — An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration.
STONE, *Cambridge, Mass.* — Some remarks on linear functionals.
KOTHE, *Münster in W.* — Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten in linearen topologischen Räumen.
SIERPINSKI, *Warzawa.* — Sur un problème concernant les fonctions de première classe.

Section III: Géométrie et Topologie.

III *a*.

Présidence: MM. Veblen, Nielsen, Newman, Straszewicz, Freudenthal.

ZARANKIEWICZ, *Warszawa.* — Zur lokalen Zerschneidung des Raumes.
SZPILRAJN, *Warszawa.* — La dimension et la mesure.
MARTY, *Marseille.* — Sur la théorie du groupe fondamental.
WHITEHEAD, *Oxford.* — Equivalent sets of elements in a free group.

NEWMAN, *Cambridge* & WHITEHEAD, *Oxford.* — On the group of a certain Linkage.
KÉRÉKJÁRTO, *Szeged.* — Topologie des transformations.
BORSUK, *Varsovie.* — Über Addition der Abbildungsklassen.
HAANTJES, *Delft.* — Halblineare Transformationen.
GEPPERT, *Giessen.* — Über den gemischten Inhalt zweier Bereiche.
RATIB et WINN, *Le Caire.* — Généralisation d'une réduction restreinte de M. Errera, relative au théorème des quatres couleurs.
MOTZKIN, *Jerusalenm.* — Contribution à la théorie des graphes.
RAFAEL, *Liege.* — Asynthetic property of the nine inflexion points of an ordinary plain cubic.
MOTZKIN, *Jerusalem.* — Sur le produit des espaces métriques.
FREUDENTHAL, *Amsterdam.* — Teilweise geordnete lineare Räume.
SYNGE, *Toronto.* — On the connectivity of spaces of positive curvature.
TORRANCE, *Cleveland.* — Tangent lines and planes in topological spaces.
PONTRJAGIN, *Moscou,* lue par M. Lefschetz, *Princeton.* — Sur les transformations des sphères en sphères.
KAUFMANN, *Cambridge, England.* — On homologies in general spaces.
EILENBERG, *Warszawa.* — Sur les espaces multicohérents.
THÉBAULT, *Le Mans.* — Sur une nouvelle sphère associée au tétraèdre.
COURANT, *New-York.* — Über das Problem von Plateau.
STOILOW, *Cernauti.* — Sur la définition des surfaces de Riemann.
MORLEY, *Baltimore.* — Planar positions.
BYDZOVSKY, *Prague.* — Décomposition d'une transformation quadratique involutive dans l'espace à n dimensions.
PAPAÏOANNOU, *Athènes.* — Sur les courbes ayant le même axe anharmonique.

III *b.*

Présidence: MM. Blaschke, Tzitzéica, Cartan, Kérékjárto.

SNYDER, *Ithaca, N. Y.* — Certain Cremona transformations in S_n belonging multiply to a nonlinear line complex.
GODEAUX, *Liége.* — Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique.
HAENZEL, *Karlsruhe.* — Neue Eigenschaften der linearen Strahlenkongruenz.
BIRKHOFF, *Garrett, Cambridge, Mass.* — Generalized convergence.
SCHOUTEN, *Delft.* — Über die Theorie des geometrischen Objektes.
GOLAB, *Cracovie.* — Über das Anholonomitätsobjekt von *Schouten* und *van Dantzig.*
BLASCHKE, *Hamburg.* — Integralgeometrie.
VAN DANTZIG, *Wassenaar.* — Über den Tensorialkalkül.
HLAVATY, *Praha.* — Invariants conformes, géométrie de M. Weyl et celle de M. König.
BOULAD BEY, *Le Caire.* — Sur les formes des équations à trois variables représentables par des abaques coniques à simple alignement.
BOULAD BEY, *Le Caire.* — Sur la symétrie nomographique et les formes canoniques des équations à quatre variables représentables par des abaques à double alignement.
FENCHEL, *Kobenhavn.* — Beiträge zur Théorie der konvexen Körper.
MUSSELMAN, *Cleveland.* — Circles connected with three or more lines.

BARBILIAN, *Bucarest.* — Die von einer Quantic induzierte Riemannsche Metrik.
LOCHER, *Winterthur.* — Struktur der Axiome der projektiven Geometrie.
KÉRÉKJARTO, *Szeged.* — Sur la géométrie hyperbolique.
MORITZ, *Seattle, Wash.* — A Napier theorem for quadrantal triangles.
MENGER, *Wien.* — New ways in differential geometry.
TZITZÉICA, *Bucarest.* — Sur la géométrie différentielle de l'équation de Laplace.
GIVENS, *Princeton, N. Y.* — Tensor coordinates of linear spaces.
PANTAZI, *Bucarest.* — Sur certains réseaux projectivement déformables.
HUREWICZ, *Amsterdam.* — Lokaler Zusammenhang und stetige Abbildungen.

Section IV: Calcul des Probabilités. Assurances. Statistique mathématique.

Présidence: MM. Elderton, Riebesell, Bowley, Steffensen.

GULDBERG, *Oslo.* — Über das Urnen-Schema von Polya. (Im wesentlichen nach einer hinterlassenen Untersuchung von Prof. Dr. Alf Guldberg.)
BOWLEY, *Haslemere.* — The standard deviation of Gini's mean difference.
MOLINA, *New York.* — Laplacian expansion for Hermitian-Laplace functions of high order.
RIEBESELL, *Berlin.* — Die mittlere Abweichung bei nichtnormaler Verteilung und ihre Bedeutung in der Versicherungspraxis.
BOREL, *Paris.* — Quelques remarques sur l'application du calcul des probabilités aux jeux de hasard.
BOWLEY, *Haslemere.* — On slightly asymetrical frequency curves.
BRELOT, *Alger.* — Sur l'influence des erreurs de mesure en statistique.
FELLER, *Stockholm.* — Existenzsätze für stochastische Prozesse.
MILICER-GRUZEWSKA, *Warszawa.* — On the probable error of a function of a finite number of equivalent variables.
ONICESCU, *Bucarest.* — Les chaînes statistiques.
WOLD, *Stockholm.* — On multi-dimensional distributions.
GUMBEL, *Lyon.* — Die grössten Werte einer Verteilung.
GUMBEL, *Lyon.* — Das Grenzalter.
CRAMÉR, *Stockholm.* — Some theorems connected with the « Central Limit Theorem » in probability.
LUKÁCS, *Wien.* — Über gewisse Funktionen der Kommutationswerte, die vom Alter unabhängig sind.
MEIDELL, *Oslo.* — Integration zusammengesetzter Funktionen mit Anwendung auf versicherungsmathematische Probleme.
POTRON, *Paris.* — Conditions des équilibres production-consommation et prix-salaires.
RIDER, *St. Louis.* — Certain moment functions for Fisher's k-statistics in samples from a finite population.
WOLD, *Stòckholm.* — On the mean difference at random samples.
SAKELLARIOU, *Athènes.* — Über eine allgemeine Formel der Sozialversicherungsmathematik.
ALT, *Wien.* — Über die Messbarkeit des Nutzens.
BOEHM, *Berlin.* — Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode zur Analyse von wirtschaftlichen Zeitreihen.
COPELAND, *Ann Arbor.* — Sequences with after-effect.

FRÉCHET, *Paris.* — Sur quelques idées modernes dans la Théorie des probabilités.

FRISCH, *Oslo.* — Price index comparisons between structually different markets.

LINDER, *Bern.* — Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen.

Section V: Physique mathématique. Astronomie.

Présidence: MM. Milne, Oséen, Hartree, Lemaître.

VAN DANTZIG, *Wassenaar.* — Über das Verhältnis von Geometrie und Physik.

MILNE, *Oxford.* — The inverse square law of gravitation.

McCREA, *London.* — Some astrophysical problems concerning the scattering of light.

RUSE, *Edinburgh.* — On the geometry of the electro-magnetic six vector, the electromagnetic energy tensor, the Hertzian tensor and the Dirac equations.

CONWAY, *Dublin.* — Quaternion view of the electron wave equation.

NOETHER, *Tomsk.* — Über elektrische Drahtwellen.

ROSSELAND, *Oslo.* — On the construction of a differential analyzer.

HARTREE, *Manchester.* — Application of the differential analyzer to the solution of partial differential equations.

THOMPSON, *Oxford.* — The mechanical instability of the crystal lattice.

LEMAÎTRE, *Louvain.* — Results of calculations of asymptotic trajectories in the field of a magnetic dipole with applications to cosmic radiation.

VALLARTA, *Cambridge, Mass.* — Results of calculations of asymptotic trajectories in the field of a magnetic dipole with applications to cosmic radiation.

SVOBODA, *Praha,* lue par M. Horák. — Les essais expérimentaux des méthodes pour calculer le radiant du courant météorique des trajets observés.

HORÁK, *Praha.* — Sur l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante.

J. TUOMINEN, *Helsinki.* — Resultate numerischer Berechnungen einiger Sternmodelle.

SYNGE, *Toronto.* — Limitations on the behaviour of an expanding universe.

DRUMAUX, *Gand.* — La vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques.

BREMEKAMP, *Delft.* — Über die Carsonsche Integralgleichung.

Section VI: Mécanique.

Présidence: MM. Filon, Drach.

MERLIN, *Gand.* — Sur certains mouvements des fluides parfaits.

VÂLCOVICI, *Bucarest.* — Sur le sillage derrière un obstacle circulaire.

BATEMAN, *Pasadena.* — Associated Airy functions in elasticity and hydrodynamics.

GRAN OLSSON, *Trondheim.* — Beitrag zur Biegetheorie kreisförmiger Platten veränderlicher Dicke.

NEMÉNYI, *Köbenhavn.* — Beiträge zur Membran-theorie der Schalen.

OMARA, *Le Caire.* — Sur les actions dynamiques d'un courant translo-circulation sur un profil à points de rebroussement.

MÉTRAL, *Paris*. — Démonstrations nouvelles de propriétés du gyroscope.

LE ROUX, *Rennes*. — La mécanique invariante.

WAVRE, *Genève*. — Remarques sur la détermination des corps à partir de leur potentiel newtonien.

HAMEL, *Berlin*. — Räumliche Strahlen mit konstanter Geschwindigkeit.

REISSNER, *Berlin*. — Erzwungene Schwingungen eines massebehafteten elastischen Halbraumes. (Beitrag zur Theorie der Baugrundforschung.)

Section VII. Philosophie et Histoire des mathématiques.

Présidence: MM. Fraenkel, Spiess.

PÉTER, *Budapest*. — Über rekursive Funktionen der zweiten Stufe.

CAVAILLES, *Paris*. — Formalisme et expression d'une structure mathématique.

SKOLEM, *Bergen*. — Eine Bemerkung zum Entscheidungsproblem.

ERRERA, *Bruxelles*. — Sur la notion de compatibilité et les rapports entre l'intuitionisme et le formalisme.

SPIESS, *Basel*. — Die wissenschaftliche Korrespondenz der Mathematiker Bernoulli.

LOCHER, *Winterthur*. — Goethes Stellung zur Mathematik.

ARCHIBALD, *Providence, R. I.* — New information concerning James Joseph Sylvester.

GANDZ, *New York*. — The invention of the decimal fractions and the exposition of the exponential calculus by Immanuel Bonfils (c. 1350).

SINGH, *Lucknow*. — The history of magic-squares in India.

HEEGAARD, *Oslo*. — Zahlen in einem Papyrusfetzen in der Osloer-Papyrus-Sammlung ?

VOGEL, *München*. — Zur Tradition der babylonischen Mathematik.

JELITAI, *Budapest*. — Zur Geschichte der Mathematik in Ungarn.

Section VIII: Enseignement.

Présidence: M. H. Fehr.

VIII *a*.

Commission internationale de l'Enseignement mathématique:

1. Rapport sommaire sur la Commission par H. FEHR, secrét.-général.
2. Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique dans les divers pays. Rapports présentés par les délégations nationales [1].
3. Discussions sur ces rapports.
4. Séance administrative.

VIII *b*.

Présidence: M. Boulad Bey.

FAIRTHORNE, *Farnborough, Hants*. — The demonstration of qualitative properties of differential equations by means of cinematograph films. (With film.)

PRZIBRAM, *Wien*. — Beliebiges Wurzelziehen als Rechnungsart ohne Logarithmen.

[1] Ces rapports seront reproduits *in extenso* dans un prochain fascicule de *L'Enseignement Mathématique*.