

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1935)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EXEMPLES PARTICULIERS ET THÉORIE GÉNÉRALE DANS LE CALCUL DES VARIATIONS  
**Autor:** Carathéodory, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26611>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# EXEMPLES PARTICULIERS ET THÉORIE GÉNÉRALE DANS LE CALCUL DES VARIATIONS <sup>1</sup>

PAR

C. CARATHÉODORY (Munich).

---

En répondant à l'honneur que vous m'avez fait — et dont je suis infiniment touché — de faire une conférence à Berne à l'occasion de la célébration du XXV<sup>me</sup> anniversaire de notre Société Mathématique, j'ai pensé qu'il ne serait pas inopportun de parler du Calcul des Variations. Il s'agit, en effet, d'une branche de l'Analyse qui, à son origine, est due presque exclusivement à des mathématiciens suisses, aux deux grands BERNOULLI et à l'immortel EULER. Ces trois mathématiciens ont commencé par ne traiter que des exemples particuliers, comme le problème de la brachistochrone, celui des isopérimètres généralisés ou comme le problème des géodésiques. Et lorsque Euler a développé la première théorie générale qu'il a consignée quelques années après dans son ouvrage « *Methodus inveniendi lineas curvas...* », publié en 1744 à Lausanne, il a bourré ce livre d'exemples; et ce sont ces exemples si variés et si instructifs qui rendent encore aujourd'hui la lecture de l'ouvrage d'Euler particulièrement attrayante.

Un siècle plus tard c'est encore l'étude d'un exemple particulier, celui de la surface minima de rotation, qui a rendu parfaitement intelligibles les résultats généraux qu'avait obtenus JACOBI.

Et l'on peut affirmer que le charme exercé de tout temps par

---

<sup>1</sup> Conférence faite à Berne, le 12 mai 1935, à l'occasion du XXV<sup>me</sup> anniversaire de la Société mathématique suisse. — Traduction rédigée par l'auteur.

le Calcul des Variations, sur tant d'esprits de premier ordre, est dû en grande partie au rôle qu'ont joué et que jouent jusqu'à ce jour les problèmes particuliers pour le développement de cette théorie. Ce sont, dans beaucoup de cas, des exemples judicieusement choisis qui permettent de guider nos idées dans l'un ou l'autre sens.

Le problème le plus simple du Calcul des Variations dans le plan consiste, sous sa forme classique développée depuis les travaux de LAGRANGE, à chercher une courbe joignant deux points fixes *donnés* pour laquelle une certaine intégrale curviligne atteint sa valeur minimum. Or, il y a des problèmes de cette espèce qui sont tout à fait réguliers et pour lesquels, dans certains cas, le minimum n'est jamais atteint.

Considérons, par exemple <sup>1</sup>, la représentation conforme des deux plans  $(x, y)$  et  $(\xi, \eta)$  l'un sur l'autre donnée par la formule

$$\xi + i\eta = e^{x+iy} . \quad (1)$$

A chaque courbe  $x(t), y(t)$  du premier plan correspond une courbe  $\xi(t), \eta(t)$  du second et l'on trouve facilement (*l. c.*, § 368-370) qu'il faut écrire

$$\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = e^x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} . \quad (2)$$

Si donc l'intégrale curviligne à rendre minimum est donnée par la formule

$$\int e^x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt , \quad (3)$$

la valeur de cette intégrale prise le long d'une courbe quelconque du plan des  $(x, y)$  est égale à la longueur ordinaire de l'image de cette courbe dans le plan des  $(\xi, \eta)$ . Les extrémales du problème considéré seront par conséquent représentées dans le plan des  $(\xi, \eta)$  par des droites.

Or, le point  $\xi = \eta = 0$  n'est l'image d'aucun point situé à distance finie dans le plan des  $(x, y)$ . Et comme toutes les courbes du plan des  $(x, y)$  qui joignent les deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$

<sup>1</sup> Tous les exemples qui suivent, sauf le dernier, sont tirés de mon livre *Variationsrechnung u. partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* (Leipzig, Teubner, 1935), qui vient de paraître et dont une analyse bibliographique, due à M. A. Buhl, se trouve dans le présent fascicule de *L'Ens. math.*

sont représentées par des courbes qui *enlacent* le point  $\xi = \eta = 0$ , dès que  $|y_2 - y_1| > \pi$ , le problème du minimum n'a jamais de solution, dès que  $|y_2 - y_1| \geq \pi$ .

Si RIEMANN avait connu ce problème, il est probable qu'il aurait hésité à poser en principe que l'intégrale de Dirichlet peut toujours être rendue minimum.

Cet exemple montre en particulier qu'on a avantage à revenir à l'ancienne méthode d'Euler pour la définition des extrémales (*l. c.*, § 219).

Mettons maintenant le problème (3) sous forme ordinaire en posant

$$f(x, y, y') = e^x \sqrt{1 + y'^2} ; \quad (4)$$

on voit facilement, en se servant des extrémales du problème (3), qu'il y a des points *aussi rapprochés l'un de l'autre qu'on le veut* qu'il n'est pas possible de joindre par une extrémale de la forme  $y = y(x)$ .

C'est là la raison pour laquelle MM. S. BERNSTEIN, L. TONELLI et McSHANE, qui se sont occupés de problèmes du Calcul des Variations mis sous forme ordinaire, ont dû prendre des précautions qui, si l'on n'était pas averti, doivent paraître assez factices.

Prenons en second lieu (*l. c.*, § 371) à la place de la représentation conforme (1) la suivante

$$\xi + i\eta = \frac{1}{\alpha} (x + iy)^\alpha , \quad (5)$$

$\alpha$  étant un nombre positif  $> 1$ . On trouve de la même manière que précédemment

$$\sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} . \quad (6)$$

Les extrémales du problème du Calcul des Variations qui appartient à la fonction sous l'intégrale

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (\alpha > 1) \quad (7)$$

ont été calculées par EULER (*Meth. inv.*, p. 53), mais le problème aux limites pour cette question n'a jamais été traité complètement avant M. TONELLI (*Fondam.*, II, p. 430). Ici c'est le point origine  $x = y = 0$  qui occasionne les singularités du problème. Tous les éléments linéaires portés par ce point sont singuliers d'après la terminologie de mon livre; d'après la terminologie de M. Tonelli le point lui-même est quasirégulier, mais il n'est pas seminormal.

Quoiqu'il en soit l'existence d'un seul point de cette espèce a pour effet de rapetisser le domaine couvert par les extrémales régulières passant par un point quelconque, quelle que soit sa distance de l'origine. On le voit en procédant d'une façon tout à fait analogue à celle suivie pour le problème (3). D'ailleurs les problèmes (3) et (7) ont beaucoup d'analogies; on peut transformer le second dans le premier par un passage à la limite. Une différence subsiste cependant: pour le problème (7) il existe toujours une courbe rectifiable et une seule, joignant deux points donnés *quelconques*, pour laquelle le minimum absolu de l'intégrale est atteint. Mais cette courbe n'est pas toujours une des extrémales analytiques. Il se peut qu'elle consiste en deux segments rectilignes formant un chemin brisé passant par l'origine.

En greffant sur la représentation conforme (5) une seconde transformation biunivoque du plan des  $(x, y)$  en lui-même, on obtient des exemples encore plus instructifs. Posons par exemple (*l. c.*, § 372) :

$$x = r \cos (\theta - \ln r) , \quad y = r \sin (\theta - \ln r) , \quad (8)$$

les variables  $r$  et  $\theta$  étant considérées comme coordonnées polaires d'un nouveau plan. On trouve alors pour la fonction sous l'intégrale la valeur

$$F = r^{\alpha-2} \sqrt{r^2 \dot{r}^2 + (r \dot{\theta} - r^2 \dot{\theta})^2} ; \quad (9)$$

on obtient ici dans certains cas comme courbe pour laquelle la plus petite valeur possible de l'intégrale est effectivement atteinte, deux spirales logarithmiques qui se raccordent à leur

point asymptote. Le problème ne possède donc aucune extrémale contenant un des éléments linéaires passant par l'origine bien que certaines extrémales passent effectivement par ce point.

En modifiant un peu notre méthode (*l. c.*, § 373), c'est-à-dire en mettant à la place des relations (8)

$$x = r \cos \left( \theta - \frac{1}{r r^2} \right), \quad y = r \sin \left( \theta - \frac{1}{r r^2} \right), \quad (10)$$

on calcule la fonction

$$F = r^{a-4} \sqrt{r^4 (\dot{r})^2 + (r \dot{r} + r^2 r^2 \dot{\theta})^2} \quad (11)$$

qui nous donne une métrique de Riemann, pour laquelle aucune ligne rectifiable joignant certains points du plan ne peut être une géodésique du problème. Il existe cependant dans tous les cas des courbes de Jordan (de longueur infinie) qui répondent à la question.

Pour certains problèmes très simples qui sont même tout à fait réguliers dans tous les points du plan, il se peut que, si l'on cherche le minimum absolu, il n'y ait pas même de courbe de Jordan qui réponde à la question. On peut considérer le problème (3) sous cet aspect, mais il est plus intéressant de construire des problèmes du même genre pour lesquels toutes les courbes dont on a à se servir restent à distance finie. Il suffit en effet de poser

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + 2 \frac{y \dot{x} - x \dot{y}}{1 + x^2 + y^2} \quad (12)$$

et l'on calcule très aisément (*l. c.*, § 395-397) qu'un point A intérieur au cercle  $x^2 + y^2 = 1$  ne peut jamais être joint à un point B situé à l'extérieur de ce cercle par une courbe de Jordan pour laquelle l'intégrale prise par rapport à (12) ait la plus petite valeur possible. Car il faudrait pour obtenir cette valeur, intégrer le long de deux courbes spiriformes passant respectivement par A et par B, qui toutes les deux s'approchent asymptotiquement (en faisant une infinité de tours) du cercle unité. Il est impossible de raccorder ces deux courbes entre elles.

Cette singularité s'explique par le fait que la fonction  $F$  s'annule quand on décrit le cercle unité dans le sens positif et est toujours plus grande que zéro lorsqu'on intègre le long de tout autre courbe choisie à volonté.

Les exemples (3) et (12) nous apprennent qu'un problème du Calcul des variations peut être régulier aux environs de chaque point du plan sans que pour cela il existe toujours une solution pour le problème du minimum absolu. Mais il se peut aussi que le problème du minimum absolu entre deux points donnés ait *toujours* une solution et que cette solution soit même déterminée de façon univoque, sans que le problème donné soit régulier aux environs de chaque point. Un exemple simple qui rend compte de ce fait qu'on n'avait jamais soupçonné nous est donné par le problème de ZERMELO qui consiste à chercher les brachistochrones de la navigation aérienne. J'en ai fait une étude approfondie dans mon livre (§§ 276-287 et 458-460). Si la vitesse du vent est supérieure à celle de l'aéronef, celui-ci sera emporté et ne pourra, par ses propres moyens, se diriger que dans certaines directions contenues à l'intérieur d'un angle. Toutefois, il est très facile d'imaginer des cas où, en faisant certains détours, l'aéronef peut toujours atteindre un but fixé à l'avance. C'est ce qu'on voit sur la figure, à la page 242, de mon livre dans laquelle toutes les trajectoires brachistochrones qui correspondent à une distribution particulièrement simple du vent sont dessinées pour un port d'attache déterminé.

Pour terminer je veux vous proposer un problème en relation avec ma dissertation inaugurale de 1904, mais beaucoup plus simple que ceux que j'avais étudiés à cette époque. *Il s'agit de trouver la forme d'un fil de longueur donnée qu'on pose sur la vitre d'une fenêtre après en avoir fixé les extrémités, de façon que l'ombre de ce fil projetée sur le parquet soit la plus longue ou la plus courte possible.*

On peut résoudre ce problème presque en entier avec les méthodes élémentaires qu'on enseigne dans les lycées.

Il faut d'abord déterminer sur la vitre de la fenêtre la direction des axes d'une ellipse découpée par un cylindre dont les génératrices sont parallèles aux rayons du soleil et dont la base sur le sol de la chambre est circulaire.

Si l'on prend les axes des coordonnées parallèles aux axes de cette ellipse, le problème est équivalent au suivant: l'intégrale

$$\int \sqrt{\alpha \dot{x}^2 + \beta \dot{y}^2} dt \quad (13)$$

doit être rendue minimum (ou maximum) pour toutes les courbes de longueur donnée joignant deux points A et B fixés à l'avance.

Donnons, pour commencer, au fil une forme polygonale quelconque. Un calcul algébrique très facile montre qu'on peut successivement allonger l'ombre du fil tout en diminuant le nombre des côtés du polygone. Si on laisse varier le point final dans un demi-plan ne contenant pas le point A mais dont le bord contient le point B et est parallèle au petit axe de l'ellipse déterminée plus haut, l'ombre sera maximum lorsque le fil est complètement tendu et joint le point donné A avec un point B du bord du demi-plan. On obtient une solution du problème en remplaçant une partie du fil tendu par un segment rectiligne symétrique par rapport à une parallèle au grand axe de l'ellipse choisie de telle façon que l'extrémité du fil brisé passe par B.

Ce problème possède toujours une infinité de solutions polygonales et même des solutions non analytiques qu'on obtient en se servant des propriétés des fonctions sommables.

On démontre enfin par un raisonnement classique que toutes les autres courbes joignant A et B et possédant la longueur demandée ne peuvent jamais répondre à la question.