

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1935)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA NOTION DE RECOUVREMENT  
**Autor:** Threlfall, W.  
**Kapitel:** 9. — Groupes à deux paramètres.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26610>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 9. — GROUPES À DEUX PARAMÈTRES.

Appliquons maintenant notre procédé de construction aux groupes d'ordre 2<sup>1</sup>. Un groupe d'ordre 2 est engendré par deux transformations infinitésimales  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . D'après le deuxième théorème principal, il existe une relation de la forme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} ;$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont les constantes de structure que nous venons de désigner par  $c_{ik}^l$  dans le cas des groupes d'ordre  $n$ . On peut satisfaire dans ce cas simple aux deux conditions de l'anneau infinitésimal pour tout couple  $\alpha, \beta$ . Il suffit de poser  $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}$ , et l'identité de Jacobi est satisfaite d'elle-même.

De combien de manières essentiellement différentes peut-on choisir  $\alpha$  et  $\beta$ ? Nous verrons qu'il n'y en aura que deux.

I<sup>er</sup> cas: Les deux coefficients sont nuls:  $\alpha = \beta = 0$ .

On a alors

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 . \quad (\text{I})$$

II<sup>me</sup> cas: Un coefficient au moins, disons  $\alpha$ , est différent de 0. Il est alors possible d'introduire de nouveaux vecteurs fondamentaux

$$\mathbf{u}' = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} , \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\alpha} .$$

En les introduisant dans la relation de définition de l'anneau infinitésimal, il vient

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \mathbf{u}' \quad (\text{II})$$

(I) et (II) sont donc les seuls anneaux infinitésimaux essentiellement différents. De même il n'y aura donc que deux groupes d'ordre 2 simplement connexes, différents.

On trouve aisément pour le premier une réalisation par des transformations linéaires. Le fait que le symbole du crochet s'annule exprime la permutabilité des transformations infi-

<sup>1</sup> B. VON KERÉKJÁRTÓ, Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen. *Abhandl. Math. Semin. Hamburg Univ.*, 8 (1930), p. 107-114.

nitésimales de base,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . Il s'en suit que tout le groupe est abélien. Or, les translations du plan

$$\left. \begin{array}{l} x' = x + a \\ y' = y + b \end{array} \right\} \quad (I')$$

forment un groupe abélien d'ordre 2.

Et cette réalisation est déjà la réalisation régulière que seule nous avions jusqu'ici considérée. Le plan des  $a$  et  $b$  est la variété-groupe,  $a = b = 0$  l'élément unité.

Pour obtenir une réalisation du deuxième cas rappelons-nous le groupe suivant de transformations linéaires à une variable

$$x' = ax + b \quad (a > 0) \quad (II')$$

Ce groupe d'ordre 2 n'est pas abélien; il est donc différent du groupe des translations, et comme il existe au plus deux groupes simplement connexes d'ordre 2, le groupe considéré doit appartenir au deuxième anneau infinitésimal. Ceci se voit d'ailleurs immédiatement. Car comme transformations infinitésimales engendrant le groupe on peut choisir deux transformations qui sont données sur la droite des  $x$  par

$$\frac{dx}{da} = x = X, \quad \frac{dx}{db} = 1 = Y.$$

Le symbole du crochet en déduit la transformation infinitésimale

$$(XY) = \frac{\delta X}{\delta x} Y - \frac{\delta Y}{\delta x} X = 1 = Y.$$

La variété-groupe est le demi-plan des  $a, b$  ( $a > 0$ ), et l'élément unité  $E$  le point  $a = 1, b = 0$ . Les vecteurs de support  $E$  correspondant aux deux transformations infinitésimales, nous les désignons par

$$-\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}$$

pour tomber directement sur la forme (II):

$$-(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Il n'y a dans ce groupe, l'élément unité excepté, aucun élément permutable avec tous les autres. Le centre est formé du seul élément unité, il n'a donc pas de sous-groupes invariants discontinus. Par conséquent, pour le groupe de germe (II), le groupe simplement connexe est le seul groupe qui existe.

Il en est autrement du cas (I). Ici, le sous-groupe invariant discontinu peut être formé ou bien du seul élément unité, ou bien du groupe discontinu de translations dans une, ou dans deux directions. On arrivera respectivement aux domaines fondamentaux des fonctions ou simplement périodiques ou doublement périodiques. Le groupe facteur relatif au sous-groupe invariant discontinu sera dans les deux cas

$$\left. \begin{array}{l} x' \equiv x + a \pmod{1} \\ y' = x + b \end{array} \right\} \text{groupe du cylindre}$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} x' \equiv x + a \pmod{1} \\ y' \equiv y + b \pmod{1} \end{array} \right\} \text{translations du tore.}$$

La variété-groupe est dans le premier cas un cylindre infini dans les deux directions, dans le deuxième le tore. Nous avons vu plus haut que le tore était la seule surface fermée susceptible d'être une variété-groupe; nous venons de voir qu'en effet le tore est une variété-groupe. Il y a donc en tout trois groupes différents de germe (I).