

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NOTION DE RECOUVREMENT
Autor: Threlfall, W.
Kapitel: 6. — Problème des formes spatiales
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Riemann dans le sens expliqué plus haut¹. Mais on a besoin d'une démonstration spéciale pour être sûr que toute surface de recouvrement est une surface de Riemann elle-même, engendrée par une fonction analytique.

6. — PROBLÈME DES FORMES SPATIALES.

Les formes spatiales de deux et de plusieurs dimensions sont en rapport immédiat avec les surfaces de Riemann. Une forme spatiale est une variété à n dimensions munie d'une métrique de Riemann, qui dans le voisinage de tout point est congruente à celle d'un espace ou bien sphérique ou euclidien ou hyperbolique. On distinguera donc les différents cas des *formes spatiales sphériques, euclidiennes et hyperboliques*.

Nous avons de nouveau le théorème: Une variété de recouvrement d'une forme spatiale est encore une forme spatiale, puisqu'il est possible de calquer la métrique de la variété fondamentale sur la variété de recouvrement.

Il suffira donc d'étudier les deux points suivants pour trouver toutes les formes spatiales:

- I° *Les formes spatiales simplement connexes,*
- II° *Leurs groupes discontinus de transformations congruentes sans point fixe.* Nous appellerons ces groupes aussi les groupes discontinus de mouvements².

La première question qui est l'analogue du problème d'uniformisation est résolue par le théorème de H. Hopf³ qui dit: Il n'existe pour toutes les dimensions que trois formes spatiales simplement connexes, à savoir: l'espace sphérique, l'espace euclidien, l'espace hyperbolique. La démonstration de ce théorème ne présente pas autant de difficultés que celle du théorème d'uniformisation. Faisons l'hypothèse, qui sera réduite à l'absurde, qu'il existe deux formes spatiales \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 euclidiennes, simplement connexes. Nous menons à partir d'un point O_1 de \mathfrak{M}_1 toutes les lignes géodésiques possibles et nous

¹ H. WEYL, *loc. cit.*

² D'après M. E. Cartan ce sont les groupes d'holonomie; c. f. E. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*. Paris, 1928, p. 72.

³ H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Ann.*, 95 (1925), p. 313-339.

faisons de même pour un point O_2 de \mathfrak{M}_2 . Nous construisons une représentation de \mathfrak{M}_1 sur \mathfrak{M}_2 en représentant O_1 sur O_2 et les lignes géodésiques sur les lignes géodésiques. On peut démontrer que cette représentation est congruente.

Quant aux groupes discontinus de mouvements des formes spatiales simplement connexes dont les autres formes spatiales sont les domaines de discontinuité, nous n'avons de résultats complets que pour les espaces à deux et à trois dimensions. Pour les formes à trois dimensions on connaît à fond les formes spatiales sphériques et euclidiennes¹, alors que nous n'avons que des exemples de formes hyperboliques².

C'est la notion de surface de Riemann qui a posé le problème des formes spatiales: il suffit d'exiger de la représentation conforme du voisinage d'un point qu'elle soit en plus congruente. Mais le rôle profond du problème de formes spatiales ne repose pas sur cette relation avec la théorie des fonctions; au contraire, il est en relation avec le problème cosmologique de l'espace; on peut en effet se demander à quel type de variété l'espace de notre intuition et de la physique appartient? Le rôle privilégié qu'a joué la métrique sphérique, euclidienne et hyperbolique et qui d'ailleurs paraissait arbitraire se voit éclairé du même coup. Car ces trois variétés sont justement les seules variétés simplement connexes où l'on puisse faire de la géométrie au sens ordinaire, c'est-à-dire les seules variétés qui admettent un groupe continu de transformations topologiques respectant les conditions de mobilité de Lie-Helmholtz.

7. — VARIÉTÉS-GROUPES.

Une variété à n dimensions \mathfrak{M} est dite *groupe continu* lorsque, à chaque couple de points A et B donnés dans cet ordre

¹ H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *l. c.*

W. THRELFALL u. H. SEIFERT, Topologische Untersuchung der Discontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. I. *Math. Ann.*, 104 (1930), p. 1-70; II. *Math. Ann.*, 107 (1932), p. 543-586.

W. HANTZSCHE u. H. WENDT, Dreidimensionale euklidische Raumformen. *Math. Ann.*, 110 (1934), p. 593-611.

W. NOWACKI, Die dreidimensionalen geschlossenen und offenen euklidischen Raumformen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 7, 1934, p. 81.

² C. WEBER u. H. SEIFERT, Die beiden Dodekaederräume, *Math. Ztschr.*, 37 (1933), p. 238-253.

F. LOEBELL, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinschen Räume negativer Krümmung. *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83 (1931).