

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NOTION DE RECOUVREMENT
Autor: Threlfall, W.
Kapitel: 3. — Existence de la variété universelle DE RECOUVREMENT.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

représentation continue G de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur \mathfrak{M} ayant les propriétés suivantes :

R1: *Tout point P de \mathfrak{M} est l'image d'un point de $\overline{\mathfrak{M}}$ au moins.*

R2: *Il existe des voisinages $\mathfrak{B}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{B}(\overline{P}_2)$, ... des points \overline{P}_1 , \overline{P}_2 , ... situés au-dessus d'un point P , qui sont représentés topologiquement sur un même voisinage $\mathfrak{B}(P)$ de P .*

R3: *Soit Q un point de $\mathfrak{B}(P)$ et \overline{Q} un point situé au-dessus de Q ; \overline{Q} appartient alors à l'un des voisinages $\mathfrak{B}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{B}(\overline{P}_2)$, ...*

R1 signifie que $\overline{\mathfrak{M}}$ recouvre \mathfrak{M} complètement, R2 que la relation entre \mathfrak{M} et $\overline{\mathfrak{M}}$ est localement topologique, R3 que $\overline{\mathfrak{M}}$ n'a pas de frontière; c'est-à-dire que, étant donné dans la variété fondamentale une courbe partant d'un point O , on peut la calquer sur $\overline{\mathfrak{M}}$ de telle sorte qu'elle parte d'un quelconque des points situés au-dessus de O , sans jamais toucher une frontière, ce qui aurait lieu par exemple au point P_1 , considéré tout à l'heure.

3. — EXISTENCE DE LA VARIÉTÉ UNIVERSELLE DE RECOUVREMENT.

La question suivante se pose: Etant donnée une variété \mathfrak{M} , combien possède-t-elle de variétés de recouvrement différentes? Il est possible de répondre complètement à cette question, lorsqu'on connaît le groupe fondamental de \mathfrak{M} dans toute sa structure. La réponse est donnée par le théorème suivant: « Les variétés de recouvrement correspondent biunivoquement aux sous-groupes du groupe fondamental, ou plutôt aux classes de sous-groupes conjugués. » *En ce cas deux variétés de recouvrement de \mathfrak{M} ne seront pas différentes, si elles admettent une représentation topologique l'une sur l'autre, telle que les images des points situés au-dessus d'un même point soient elles-mêmes situées au-dessus de ce point.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration complète du théorème ¹, mais nous nous bornerons à un cas spécial, particu-

¹ Voir H. SEIFERT et W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig, 1934), chap. VIII. On y trouve aussi les détails supprimés dans la démonstration du texte.

lièrement important: le théorème d'existence et d'unicité de la variété universelle de recouvrement, c'est-à-dire:

Toute variété \mathfrak{M} possède une variété de recouvrement simplement connexe et une seule, qu'on appelle le recouvrement universel $\hat{\mathfrak{M}}$. Rappelons que simplement connexe signifie qu'il est possible de resserrer sur un point tout chemin fermé; il est permis que le chemin se recoupe au cours de la déformation.

Admettons tout d'abord que nous ayons déjà construit une variété de recouvrement simplement connexe $\hat{\mathfrak{M}}$ de \mathfrak{M} . Nous choisissons sur \mathfrak{M} un point fixe O et sur $\hat{\mathfrak{M}}$ un point \bar{O} au-dessus de O . Menons un chemin quelconque ω allant de O à P ; nous pourrons le calquer sur $\hat{\mathfrak{M}}$ et il conduira là du point \bar{O} à un point bien déterminé \bar{P} . Tout chemin ω partant de O détermine de cette manière univoquement un point P de $\hat{\mathfrak{M}}$. Quand deux chemins ω_1 et ω_2 détermineront-ils le même point \bar{P} ? Ce sera certainement le cas lorsqu'il sera possible de déformer ω_1 en ω_2 en maintenant O et P fixes. Car, puisqu'il est possible de calquer la déformation sur $\hat{\mathfrak{M}}$, ω_1 et ω_2 devront conduire tous deux au point \bar{P} (fig. 4).

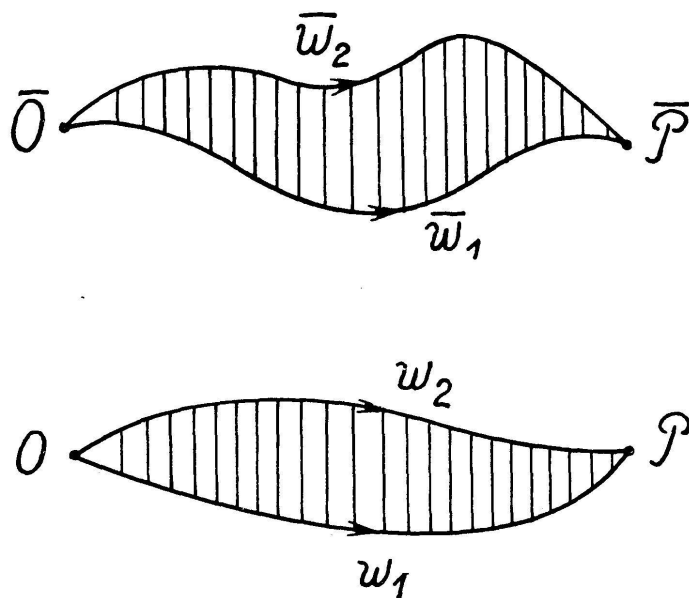


Fig. 4.

Si, au contraire, ω_1 et ω_2 ne peuvent être déformés l'un dans l'autre, $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ ne conduiront pas au même point. Car admettons que les deux chemins conduisent de \bar{O} à \bar{P} ; il sera alors possible, puisque par hypothèse $\hat{\mathfrak{M}}$ est simplement connexe, de les

déformer l'un dans l'autre. Cette déformation, nous la recalquons sur \mathfrak{M} ; on devrait donc, contrairement à l'hypothèse, pouvoir déformer ω_1 en ω_2 . Les points de $\hat{\mathfrak{M}}$ correspondent donc biunivoquement aux classes de chemins de \mathfrak{M} , déformables l'un dans l'autre.

Nous allons utiliser inversement ce résultat pour construire une variété de recouvrement simplement connexe. Nous choisissons sur \mathfrak{M} un point fixe O et nous menons à partir de O tous les chemins possibles conduisant à tous les points possibles de \mathfrak{M} . Nous répartirons tous ces chemins en classes. Deux chemins a et b appartiendront à la même classe si premièrement ils conduisent au même point P et secondement s'il est possible de les déformer l'un dans l'autre, en maintenant O et P fixes.

Ce sont ces classes de chemins que nous introduirons par définition comme les *points* de la variété de recouvrement $\hat{\mathfrak{M}}$ à construire. C'est ici que nous utilisons le caractère abstrait de notre définition de la variété. Il y aura, en général, plusieurs classes de chemins $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ qui correspondront au même point P de \mathfrak{M} . Nous dirons que $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ sont situés au-dessus de P . De plus nous devons définir maintenant ce qu'on entend par *voisinage* des points introduits, car sans cela l'ensemble de points $\hat{\mathfrak{M}}$ ne serait pas une variété. Soit \bar{P} un point de $\hat{\mathfrak{M}}$, c'est-à-dire une classe de chemins conduisant de O à un point P de \mathfrak{M} . Nous considérons un voisinage sphérique $\mathfrak{B}(P)$, et menons à partir de P tous les chemins conduisant à tous les points de $\mathfrak{B}(P)$ et ceci sans sortir de $\mathfrak{B}(P)$. Soit $\delta = PQ$ un de ces chemins et a un élément de la classe \bar{P} (fig. 5); parcourons

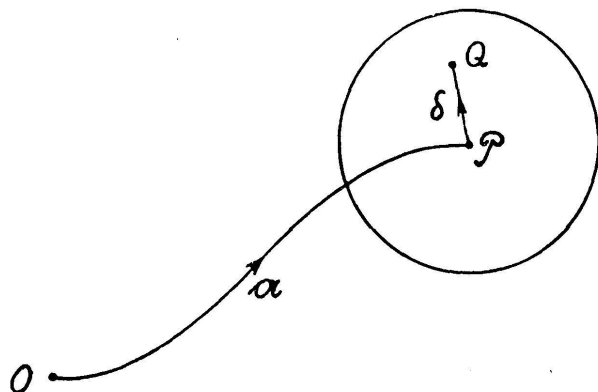


Fig. 5.

d'abord le chemin α , puis δ , et nous obtiendrons ainsi un chemin $\alpha\delta$ auquel correspondra un point bien déterminé \bar{Q} de $\hat{\mathfrak{M}}$. Les points ainsi construits sur les points de $\mathfrak{B}(P)$ formeront un voisinage $\mathfrak{B}(\bar{P})$. La définition est telle qu'à des chemins voisins sur \mathfrak{M} correspondent des points voisins de $\hat{\mathfrak{M}}$. Il est clair que les points de $\mathfrak{B}(\bar{P})$ correspondent biunivoquement aux points de $\mathfrak{B}(P)$ et que de plus cette correspondance de $\mathfrak{B}(\bar{P})$ à $\mathfrak{B}(P)$ conserve les voisinages. $\mathfrak{B}(\bar{P})$ est donc homéomorphe à $\mathfrak{B}(P)$ et par conséquent homéomorphe à l'intérieur d'une sphère à n dimensions. La condition M2 du § 1 est donc satisfaite. Pour satisfaire à M1, nous dirons aussi que tout sous-ensemble de $\hat{\mathfrak{M}}$ contenant $\mathfrak{B}(\bar{P})$ est un voisinage de \bar{P} . Finalement il est possible de relier deux points de $\hat{\mathfrak{M}}$ par une courbe. Une des extrémités de la courbe est donnée par un chemin OP et l'autre par un chemin OQ . Le fait qu'il est possible de relier les points \bar{P} \bar{Q} veut dire qu'il est possible de déformer OP en OQ d'une manière continue. Mais il suffit pour cela de contracter ces deux chemins sur le point O . $\hat{\mathfrak{M}}$ est donc bien une variété.

Nous allons démontrer maintenant que $\hat{\mathfrak{M}}$ est une variété de recouvrement de \mathfrak{M} . L'axiome R1 est satisfait, puisqu'il est possible de relier par un chemin tout point P de \mathfrak{M} au point O . La classe de chemins correspondante est un point au-dessus de P . L'existence des voisinages $\mathfrak{B}(P)$, $\mathfrak{B}(\bar{P}_1)$, $\mathfrak{B}(\bar{P}_2)$, ... découle immédiatement de leur construction. R3 est également satisfait. Soit Q un point de $\mathfrak{B}(P)$ et \bar{Q} un point au-dessus de Q ; \bar{Q} est donc déterminé par un chemin $OQ = \omega$. Si nous relierons par un chemin ν dans $\mathfrak{B}(P)$ le point Q au point P , le chemin $\omega \cdot \nu$ détermine un point \bar{P} au-dessus de P . \bar{Q} est alors dans le voisinage $\mathfrak{B}(\bar{P})$; car le chemin $\omega \nu \nu^{-1}$ définit un point \bar{Q}' au-dessus de Q , appartenant au voisinage $\mathfrak{B}(\bar{P})$. Mais, puisqu'il est possible de déformer $\omega \nu \nu^{-1}$ en ω , on a $\bar{Q}' = \bar{Q}$.

Il reste à montrer que $\hat{\mathfrak{M}}$ est simplement connexe. Une courbe fermée \bar{k} de $\hat{\mathfrak{M}}$ est engendrée par une suite continue de chemins de \mathfrak{M} partant de O et aboutissant aux points d'une courbe fermée k (fig. 6). Or, si nous contractons uniformément tous ces chemins sur le point O , cela revient à déformer la courbe \bar{k} en un point.

Nous avons donc construit une variété de recouvrement

simplement connexe d'un caractère spécial. Le caractère spécial consiste en ce que les points étaient des classes de chemins. Puisque nous avons démontré maintenant l'existence de la variété, nous pouvons nous débarrasser de son caractère spécial

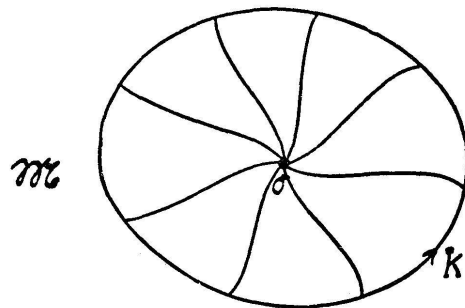


Fig. 6.

et nous entendrons dorénavant par $\hat{\mathcal{M}}$ de nouveau une variété abstraite. Il est en outre permis dans tous les cas de se figurer cette variété de recouvrement comme une variété ponctuelle qui est au-dessus de \mathcal{M} .

4. — UNICITÉ DE LA VARIÉTÉ DE RECOUVREMENT UNIVERSELLE.

La démonstration d'unicité de la variété de recouvrement universelle se fait alors de la manière suivante:

Considérons deux variétés de recouvrement simplement connexes $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{M}}'$ de \mathcal{M} . Soit encore une fois O un point fixe de \mathcal{M} , \bar{O} resp. \bar{O}' un point quelconque sur $\hat{\mathcal{M}}$ resp. sur $\hat{\mathcal{M}}'$, situés tous deux au-dessus de O . Nous allons construire une représentation de $\hat{\mathcal{M}}$ sur $\hat{\mathcal{M}}'$.

Soit \bar{P} un point quelconque de $\hat{\mathcal{M}}$. Nous menons un chemin $\bar{O}\bar{P} = \bar{u}$ (fig. 7), nous le calquons en un chemin $OP = u$ sur \mathcal{M} et nous recalquons ce dernier en un chemin $\bar{O}'\bar{P}' = \bar{u}'$ de $\hat{\mathcal{M}}'$. Ce procédé est possible, puisque la représentation G de $\hat{\mathcal{M}}'$ sur $\hat{\mathcal{M}}$ est localement topologique; nous renonçons ici à la démonstration rigoureuse.

Nous avons abouti ainsi à un point \bar{P}' bien déterminé, qui sera l'image de \bar{P} . Ce point est indépendant du chemin \bar{u} choisi. Car, $\hat{\mathcal{M}}$ étant simplement connexe, deux chemins \bar{u} et