Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1935)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Autor: Levi-Civita, T.

Kapitel: 7. — Fonctions lagrangiennes définissant le mouvement DES CENTRES DE GRAVITÉ.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26607

différentielles du mouvement, omettre la constante additive 1, et en surplus multiplier par une constante arbitraire $-\frac{1}{\xi_h}$, dont on disposera avantageusement un peu plus avant. Notre fonction lagrangienne sera donc

$$\mathcal{L}'_h = -\frac{1}{\xi_h}\left(\frac{ds}{dx^0} - 1\right)$$

ce qui, d'après (23), peut s'écrire

$$\xi_h \mathcal{L}'_h = \mathcal{H}'_h + \Lambda'_h \,, \tag{24}$$

où, en envisageant spécifiquement le point P_h,

$$\mathcal{H}'_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_{P_h} \tag{25}$$

constitue la partie prépondérante du premier ordre, tandis que

$$\Lambda'_h = \frac{1}{2}\mathcal{H}'^2_h + \gamma_{P_h}\beta_h^2 - 4\varpi_h\beta_h^2 - 4\gamma_h \underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 + \theta_h \,, \tag{26}$$

comprenant, comme on le vérifie aisément, tous les autres termes, est du second ordre.

7. — Fonctions lagrangiennes définissant le mouvement des centres de gravité.

Le centre de gravité d'un corps donné est par sa définition un point fictif, dépendant de la distribution des masses dans le corps à l'instant envisagé. Il n'a pas par conséquent caractère nécessairement substantiel, c'est-à-dire qu'en général il n'adhère pas, pendant un mouvement du corps, à une particule matérielle bien déterminée. Ceci arrive parfois, notamment pour les corps solides et pour une classe de mouvements de systèmes continus remplissant une certaine condition (égalité de deux vecteurs à tout instant [1]); non en tout cas.

Ceci posé, reprenons les fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}'_h (h = 0, 1)$ du

[1] Voir ma note: Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro, *Acta Pontificiae Academiae Scientiarum*, T. LXXXVIII, 1935, pp. 151-155.

numéro précédent. A la suite de nos admissions et du postulat géodésique s'appliquant aux éléments *matériels*, elles définissent, à vrai dire, les accélérations (non précisément des centres de gravité P_h), mais de deux points matériels, l'un appartenant à C_0 et l'autre à C_1, coïncidant à l'instant envisagé avec P_0, P_1 et possédant à cet instant leur même vitesse. A notre ordre d'approximation, il serait parfaitement équivalent de caractériser le mouvement des points (encore plus fictifs) P_0^*, P_1^*, possédant à un instant quelconque les accélérations susdites et coïncidant à l'instant initial avec P_0, P_1. Mais les équations, définissant le mouvement des points auxiliaires P_h^*, qu'on tirerait des fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}'_h$, présentent l'inconvénient essentiel (provenant des γ_{P_h} dans les termes du premier ordre) que tout n'y est pas encore réduit ni réductible à dépendre exclusivement des deux points P_0^* et P_1^*. On parviendra toutefois à surmonter cette difficulté aussi, en passant justement aux centres de gravité. Nous allons voir en effet que, dans notre approximation, la connaissance des $\mathcal{L}'_h$ permet d'aboutir sans calculs aux véritables fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}_h$ des centres de gravité.

Pour s'en rendre compte, il convient d'abord de rappeler une circonstance fondamentale dans la Théorie de la Relativité générale: c'est que toutes ses formules et conclusions redonnent en première approximation les lois classiques.

En particulier, si l'on fixe l'attention sur la fonction lagrangienne $\mathcal{L}'_h = \mathcal{N}'_h + \Lambda'_h$ définissant (dans la manière spécifiée plus haut) le mouvement des points P_h^*, on y reconnait immédiatement que $\mathcal{N}'_h$ est le *terme newtonien* (puisqu'on en tirerait, au facteur constant $\frac{1}{c^2}$ près, les équations du mouvement newtonien), tandis que Λ'_h constitue la *correction einsteinienne*, c'est-à-dire le terme complémentaire donnant lieu à cette correction pour le mouvement des points P_h^*. D'une manière plus précise. il nous faudra retenir que Λ'_h donne lieu justement aux corrections einsteiniennes des composantes, divisées par c^2, de l'accélération newtonienne de P_h^*.

Or les points fictifs P_h^* sont en quelque sorte intermédiaires entre des points substantiels de nos corps et leurs centres de gravité. Si ces corps étaient animés d'une simple translation, P_h et P_h^* coïncideraient à tout instant, possédant dès lors la même Λ_h'. L'admission A_3) du n° 5, que les mouvements des deux corps se réduisent *grossièrement* à des translations, implique que les Λ_h' *restent* sensiblement (c'est-à-dire à des termes près d'ordre supérieur au second) *les mêmes* qu'il s'agisse des P_h^* ou des centres de gravité P_h. Notre but étant de calculer les fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}_h$ de ces derniers, nous nous trouvons, d'après ce qu'on vient de dire, dans la situation favorable d'en connaître déjà l'expression explicite Λ_h' de la correction einsteinienne. Il ne nous reste partant que la tâche bien aisée d'assigner le terme newtonien $\mathfrak{N}_h$ de

$$\xi_h \mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \Lambda_h' \,. \tag{24'}$$

Pour cela, il suffit de reprendre les équations newtoniennes [(4) du n° 2], définissant le mouvement des centres de gravité P_0 et P_1. Elles admettent, comme il résulte de (5), la fonction lagrangienne

$$\frac{1}{2} v_h^2 + U_h \,,$$

qui peut être multipliée par une constante arbitraire, par exemple par $\frac{1}{c^2}$, sans altérer les équations différentielles. Il est ainsi loisible de regarder, à l'approximation newtonienne, comme fonction lagrangienne du mouvement du centre de gravité P_h

$$\mathfrak{N}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h \,. \tag{25'}$$

Ajoutons que, dans chacun des trois binômes lagrangiens qu'on tire de $\mathfrak{N}_h$, figure (isolément et avec le coefficient 1) la composante correspondante de l'accélération de P_h, divisé par c^2, comme il arrivait pour $\mathfrak{N}_h'$ à l'égard de P_h^*. C'est tout ce qu'il faut pour conclure que *la fonction lagrangienne du mouvement du centre de gravité* P_h *est*

$$\xi_h \mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \Lambda_h' \,, \tag{24'}$$

où

$$\mathfrak{N}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h \,, \tag{25'}$$

Λ'_h *a l'expression* (26), *avec la valeur* (21) *de* θ_h, *et* ξ_h *est une constante dont on peut encore disposer.* On va le faire dans un moment.

8. — Artifice permettant de sauver le principe d'effacement en seconde approximation — Modification des masses.

Ce qui provient, pour chaque corps, des actions qui lui sont intérieures figure dans nos fonctions lagrangiennes (24′) uniquement par l'intermédiaire des quatre constantes ϖ_h et η_h, définies par les formules (19) et (22). Mettons ces constantes en évidence, en écrivant, d'après (17), $\gamma_h + \varpi_h$ au lieu de γ_{P_h}, dans les expressions (21), (25) et (26) de θ_h, $\mathfrak{M}'_h$ et Λ'_h. Il vient

$$\theta_h = -\varpi_h^2 + 2\gamma_h\eta_{h+1} + 2\varpi_h\beta_h^2 - \gamma_h^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + \\ + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d^2_{h+1}r}{dx^{0^2}},$$

$$\Lambda'_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 - \frac{1}{2}\varpi_h\beta_h^2 + \gamma_h(\varpi_h + 2\eta_{h+1}) + \Lambda_h, \tag{26'}$$

où l'on a posé

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h\right)^2 + \gamma_h\beta_h^2 - 4\gamma_h\underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 - \\ - \gamma_h^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d^2_{h+1}r}{dx^{0^2}}. \tag{27}$$

Il s'en suit, en revenant à (24′), (25′), et en y remplaçant Λ'_h par sa valeur (26′),

$$\xi_h\mathcal{L}_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\varpi_h\right)\beta_h^2 + \left(1 + \varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h + \Lambda_h. \tag{28}$$

Maintenant attribuons à la constante ξ_h la valeur $1 - \frac{1}{2}\varpi_h$ et divisons par ξ_h en omettant la constante purement additive $-\frac{1}{2}\varpi_h^2/\xi_h$. A des termes négligeables près, il vient

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h + \Lambda_h.$$