

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1935)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE  
**Autor:** Levi-Civita, T.  
**Kapitel:** 7. — Fonctions lagrangiennes définissant le mouvement DES CENTRES DE GRAVITÉ.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26607>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

différentielles du mouvement, omettre la constante additive 1, et en surplus multiplier par une constante arbitraire  $-\frac{1}{\xi_h}$ , dont on disposera avantageusement un peu plus avant. Notre fonction lagrangienne sera donc

$$\mathcal{L}'_h = -\frac{1}{\xi_h} \left( \frac{ds}{dx^0} - 1 \right)$$

ce qui, d'après (23), peut s'écrire

$$\xi_h \mathcal{L}'_h = \mathcal{U}'_h + \Lambda'_h, \quad (24)$$

où, en envisageant spécifiquement le point  $P_h$ ,

$$\mathcal{U}'_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_{P_h} \quad (25)$$

constitue la partie prépondérante du premier ordre, tandis que

$$\Lambda'_h = \frac{1}{2} \mathcal{U}_h'^2 + \gamma_{P_h} \beta_h^2 - 4 \varpi_h \beta_h^2 - 4 \gamma_h \underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 + \theta_h, \quad (26)$$

comprenant, comme on le vérifie aisément, tous les autres termes, est du second ordre.

## 7. — FONCTIONS LAGRANGIENNES DÉFINISSANT LE MOUVEMENT DES CENTRES DE GRAVITÉ.

Le centre de gravité d'un corps donné est par sa définition un point fictif, dépendant de la distribution des masses dans le corps à l'instant envisagé. Il n'a pas par conséquent caractère nécessairement substantiel, c'est-à-dire qu'en général il n'adhère pas, pendant un mouvement du corps, à une particule matérielle bien déterminée. Ceci arrive parfois, notamment pour les corps solides et pour une classe de mouvements de systèmes continus remplissant une certaine condition (égalité de deux vecteurs à tout instant<sup>1</sup>); non en tout cas.

Ceci posé, reprenons les fonctions lagrangiennes  $\mathcal{L}'_h (h = 0, 1)$  du

<sup>1</sup> Voir ma note: Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro, *Acta Pontificiae Academiae Scientiarum*, T. LXXXVIII, 1935, pp. 151-155.

numéro précédent. A la suite de nos admissions et du postulat géodésique s'appliquant aux éléments *matériels*, elles définissent, à vrai dire, les accélérations (non précisément des centres de gravité  $P_h$ ), mais de deux points matériels, l'un appartenant à  $C_0$  et l'autre à  $C_1$ , coïncidant à l'instant envisagé avec  $P_0$ ,  $P_1$  et possédant à cet instant leur même vitesse. A notre ordre d'approximation, il serait parfaitement équivalent de caractériser le mouvement des points (encore plus fictifs)  $P_0^*$ ,  $P_1^*$ , possédant à un instant quelconque les accélérations susdites et coïncidant à l'instant initial avec  $P_0$ ,  $P_1$ . Mais les équations, définissant le mouvement des points auxiliaires  $P_h^*$ , qu'on tirerait des fonctions lagrangiennes  $\mathcal{L}'_h$ , présentent l'inconvénient essentiel (provenant des  $\gamma_{P_h}$  dans les termes du premier ordre) que tout n'y est pas encore réduit ni réductible à dépendre exclusivement des deux points  $P_0^*$  et  $P_1^*$ . On parviendra toutefois à surmonter cette difficulté aussi, en passant justement aux centres de gravité. Nous allons voir en effet que, dans notre approximation, la connaissance des  $\mathcal{L}'_h$  permet d'aboutir sans calculs aux véritables fonctions lagrangiennes  $\mathcal{L}_h$  des centres de gravité.

Pour s'en rendre compte, il convient d'abord de rappeler une circonstance fondamentale dans la Théorie de la Relativité générale: c'est que toutes ses formules et conclusions redonnent en première approximation les lois classiques.

En particulier, si l'on fixe l'attention sur la fonction lagrangienne  $\mathcal{L}'_h = \mathcal{U}'_h + \Lambda'_h$  définissant (dans la manière spécifiée plus haut) le mouvement des points  $P_h^*$ , on y reconnaît immédiatement que  $\mathcal{U}'_h$  est le *terme newtonien* (puisque'on en tirerait, au facteur constant  $\frac{1}{c^2}$  près, les équations du mouvement newtonien), tandis que  $\Lambda'_h$  constitue la *correction einsteinienne*, c'est-à-dire le terme complémentaire donnant lieu à cette correction pour le mouvement des points  $P_h^*$ . D'une manière plus précise, il nous faudra retenir que  $\Lambda'_h$  donne lieu justement aux corrections einsteiniennes des composantes, divisées par  $c^2$ , de l'accélération newtonienne de  $P_h^*$ .

Or les points fictifs  $P_h^*$  sont en quelque sorte intermédiaires entre des points substantiels de nos corps et leurs centres de

gravité. Si ces corps étaient animés d'une simple translation,  $P_h$  et  $P_h^*$  coïncideraient à tout instant, possédant dès lors la même  $\Lambda'_h$ . L'admission  $A_3$ ) du n° 5, que les mouvements des deux corps se réduisent *grossièrement* à des translations, implique que les  $\Lambda'_h$  *restent* sensiblement (c'est-à-dire à des termes près d'ordre supérieur au second) *les mêmes* qu'il s'agisse des  $P_h^*$  ou des centres de gravité  $P_h$ . Notre but étant de calculer les fonctions lagrangiennes  $\mathcal{L}_h$  de ces derniers, nous nous trouvons, d'après ce qu'on vient de dire, dans la situation favorable d'en connaître déjà l'expression explicite  $\Lambda'_h$  de la correction einsteinienne. Il ne nous reste partant que la tâche bien aisée d'assigner le terme newtonien  $\mathcal{U}_h$  de

$$\xi_h \mathcal{L}_h = \mathcal{U}_h + \Lambda'_h . \quad (24')$$

Pour cela, il suffit de reprendre les équations newtoniennes [(4) du n° 2], définissant le mouvement des centres de gravité  $P_0$  et  $P_1$ . Elles admettent, comme il résulte de (5), la fonction lagrangienne

$$\frac{1}{2} v_h^2 + U_h ,$$

qui peut être multipliée par une constante arbitraire, par exemple par  $\frac{1}{c^2}$ , sans altérer les équations différentielles. Il est ainsi loisible de regarder, à l'approximation newtonienne, comme fonction lagrangienne du mouvement du centre de gravité  $P_h$

$$\mathcal{U}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h . \quad (25')$$

Ajoutons que, dans chacun des trois binômes lagrangiens qu'on tire de  $\mathcal{U}_h$ , figure (isolément et avec le coefficient 1) la composante correspondante de l'accélération de  $P_h$ , divisé par  $c^2$ , comme il arrivait pour  $\mathcal{U}'_h$  à l'égard de  $P_h^*$ . C'est tout ce qu'il faut pour conclure que *la fonction lagrangienne du mouvement du centre de gravité  $P_h$  est*

$$\xi_h \mathcal{L}_h = \mathcal{U}_h + \Lambda'_h , \quad (24')$$

où

$$\mathcal{U}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h , \quad (25')$$

$\Lambda'_h$  a l'expression (26), avec la valeur (21) de  $\theta_h$ , et  $\xi_h$  est une constante dont on peut encore disposer. On va le faire dans un moment.

8. — ARTIFICE PERMETTANT DE SAUVER LE PRINCIPE D'EFFACEMENT EN SECONDE APPROXIMATION — MODIFICATION DES MASSES.

Ce qui provient, pour chaque corps, des actions qui lui sont intérieures figure dans nos fonctions lagrangiennes (24') uniquement par l'intermédiaire des quatre constantes  $\varpi_h$  et  $\eta_h$ , définies par les formules (19) et (22). Mettons ces constantes en évidence, en écrivant, d'après (17),  $\gamma_h + \varpi_h$  au lieu de  $\gamma_{1h}$ , dans les expressions (21), (25) et (26) de  $\theta_h$ ,  $\mathcal{L}'_h$  et  $\Lambda'_h$ . Il vient

$$\theta_h = -\varpi_h^2 + 2\gamma_h \eta_{h+1} + 2\varpi_h \beta_h^2 - \gamma_h^2 + 2\gamma_0 \gamma_1 + 2\gamma_h \beta_{h+1}^2 + \frac{f m_{h+1}}{2c^2} \frac{d_{h+1}^2 r}{dx^{0^2}},$$

$$\Lambda'_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 - \frac{1}{2}\varpi_h \beta_h^2 + \gamma_h(\varpi_h + 2\eta_{h+1}) + \Lambda_h, \quad (26')$$

où l'on a posé

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h\right)^2 + \gamma_h \beta_h^2 - 4\gamma_h \beta_0 \times \beta_1 - \gamma_h^2 + 2\gamma_0 \gamma_1 + 2\gamma_h \beta_{h+1}^2 + \frac{f m_{h+1}}{2c^2} \frac{d_{h+1}^2 r}{dx^{0^2}}. \quad (27)$$

Il s'en suit, en revenant à (24'), (25'), et en y remplaçant  $\Lambda'_h$  par sa valeur (26'),

$$\xi_h \mathcal{L}_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\varpi_h\right)\beta_h^2 + (1 + \varpi_h + 2\eta_{h+1})\gamma_h + \Lambda_h. \quad (28)$$

Maintenant attribuons à la constante  $\xi_h$  la valeur  $1 - \frac{1}{2}\varpi_h$  et divisons par  $\xi_h$  en omettant la constante purement additive  $-\frac{1}{2}\varpi_h^2/\xi_h$ . A des termes négligeables près, il vient

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h + \Lambda_h.$$