

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1935)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE  
**Autor:** Levi-Civita, T.  
**Kapitel:** 6. — Expression du  $ds^2$  pour le champ de deux coups EN MOUVEMENT DONNÉ L'OPERATEUR  $\frac{d_h}{dx^0}$ .  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26607>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

A<sub>4</sub>) Pour chacun des deux corps le centre de gravité P<sub>h</sub> n'est pas trop éloigné du (ou d'un) centre de gravitation G<sub>h</sub>; plus précisément, la distance P<sub>h</sub>G<sub>h</sub> est assez petite pour que, en P<sub>h</sub>, l'attraction g<sub>h</sub> du corps C<sub>h</sub> (nulle rigoureusement en G<sub>h</sub>) soit une fraction assez petite (ici encore quelques centièmes au plus) de l'attraction F<sub>h</sub> exercée par l'autre corps.

Alors il est permis de négliger, comme étant d'ordre supérieur au premier, tout terme du type

$$\beta^2 \frac{g_h}{F_h}, \quad \gamma \frac{g_h}{F_h}, \text{ etc.} \quad (h = 0,1).$$

**REMARQUE.** — Il n'est pas inutile d'avertir que, à cause de A<sub>3</sub>), dans l'ordre d'approximation adopté, il suffit que A<sub>4</sub>) soit vérifiée à l'instant initial. Elle reste alors automatiquement satisfaite pour t > 0. En effet, d'après A<sub>3</sub>), nos corps se comportent sensiblement comme des solides, et alors, à la même échelle, P<sub>h</sub> et G<sub>h</sub> gardent à tout instant les mêmes positions relatives dans le corps respectif. Il s'en suit en particulier que le centre de gravité P<sub>h</sub> est substantiel, c'est-à-dire affecte toujours la même particule matérielle.

**RÈGLE PRATIQUE.** — En vue du calcul effectif, il y a lieu de retenir que, dans n'importe quelle relation, l'évaluation des termes correctifs (généralement d'ordre 1; ou, exceptionnellement, d'ordre ν + 1, si par hasard l'ordre minimum est ν) se fait comme si les corps C<sub>0</sub>, C<sub>1</sub> étaient rigoureusement indéformables, animés, chacun pour son compte, de simple translation, et chacun exerçant une attraction nulle sur son centre de gravité.

## 6. — EXPRESSION DU $ds^2$ POUR LE CHAMP DE DEUX CORPS EN MOUVEMENT DONNÉ — L'OPÉRATEUR $\frac{d_h}{dx^0}$ .

Il faut expliciter les coefficients g<sub>ik</sub>, qui, comme on l'a rappelé au numéro précédent, sont nécessairement de la forme

$$g_{ik} = g_{ik}^0 - 2\gamma_{ik} \quad (15)$$

où les  $g_{ik}^0$  sont les coefficients ( $\pm 1, 0$ ) de (14) et les  $\gamma_{ik}$  des petites corrections à regarder comme du premier ordre au plus.

Il est bien connu, et d'ailleurs aisé à vérifier, que, pour tenir compte, dans les équations du mouvement, des termes d'ordre immédiatement supérieur à l'approximation newtonienne, il suffit de calculer la partie prépondérante d'ordre minimum de tous les  $\gamma_{ik}$ , excepté  $\gamma_{00}$ , pour lequel il faut expliciter non seulement le premier ordre, mais aussi le second.

Nous désignerons par  $x_h^i$  ( $h = 0, 1; i = 1, 2, 3$ ) les coordonnées des centres de gravité  $P_h$ ; par  $\beta_{h|i}$  les composantes  $\frac{dx_h^i}{dx^0}$  de leurs vitesses römeriennes, qui ne sont pas autre chose que des vitesses ordinaires divisées par  $c$ ;  $\beta_h$  représentera en conformité la valeur absolue de ladite vitesse vectorielle römerienne  $\underline{\beta}_h$ .

D'autre part,  $V$  étant le potentiel newtonien des deux corps, rapporté, comme d'habitude, à l'unité de masse du point attiré, nous poserons

$$\frac{V}{c^2} = \gamma . \quad (16)$$

Naturellement  $\gamma$  est la somme (divisée par  $c^2$ ) de deux potentiels, l'un provenant de  $C_0$  et l'autre de  $C_1$ . En envisageant en particulier les déterminations de  $\gamma$  aux points  $P_h$ , nous poserons

$$\gamma_{P_h} = \gamma_h + \varpi_h , \quad (17)$$

où  $\gamma_h$  provient de l'autre corps  $C_{h+1}$ , et, d'après A<sub>2</sub>) et (2), se réduit à

$$\gamma_h = \frac{1}{c^2 m_h} U = \frac{f}{c^2} \frac{m_{h+1}}{r} , \quad (18)$$

tandis que, d'après (7),

$$\varpi_h = \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu' d\tau'}{r(P_h, Q')} \quad (19)$$

est le potentiel newtonien au point  $P_h$  du corps  $C_h$  lui-même, divisé par  $c^2$ .

Il importe de remarquer que ces  $\varpi_h$  jouent le rôle de *constantes*, puisqu'elles sont effectivement telles toutes les fois qu'on peut traiter comme invariables les corps  $C_h$ , ce qui arrive en particulier dans l'application de la règle pratique du numéro précédent.

L'intégration approchée des équations gravitationnelles, que je ne puis pas même ébaucher, donne, pour un point quelconque  $P$ ,

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} \gamma_P \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (20a)$$

où l'on entend par  $\delta_{ik}$  les symboles de Kronecker, c'est-à-dire 1 pour  $i = k$ , 0 pour  $i \neq k$ .

Ensuite, en supposant que  $P$  appartient au corps  $C_h$ , et même qu'il coïncide initialement (en position et vitesse) avec le centre de gravité  $P_h$ , on constate, moyennant les hypothèses  $A_2$ ,  $A_3$ ) et la règle pratique qui en découle, que, dans tout terme d'ordre supérieur au premier, on peut confondre  $P$  avec  $P_h$ ; et alors on trouve:

$$\gamma_{0i} = \gamma_{i0} = -2\varpi_h \beta_{h|i} - 2\gamma_h \beta_{h+1|i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (20b)$$

$$\gamma_{00} = \gamma_P + \theta_h, \quad (20c)$$

où  $\gamma_h$ ,  $\varpi_h$  ont les significations (18), (19) et où  $\theta_h$  est d'ordre 2. On a précisément

$$\begin{aligned} \theta_h = & -\gamma_{P_h}^2 + \frac{fm_{h+1}}{2c^2} \frac{d_{h+1}^2 r}{dx^{0^2}} + \\ & + 2\gamma_0 \gamma_1 + 2\varpi_h \beta_h^2 + 2\gamma_h \beta_{h+1}^2 + 2\gamma_h (\varpi_h + \eta_{h+1}) \quad (h = 0, 1), \end{aligned} \quad (21)$$

en indiquant pour abréger par  $\eta_h$  les constantes numériques que voici

$$\eta_h = \frac{f}{mc^2} \int_{C_h} \mu d\tau \int_{C_h} \frac{\mu' d\tau'}{r(Q, Q')}, \quad (22)$$

et par  $\frac{d_h}{dx^0}$  une dérivation temporelle dépendant exclusivement du mouvement du point  $P_h$ , où l'on doit par conséquent regarder comme constant tout ce qui se rapporte à  $P_{h+1}$ .

Commençons maintenant à remplacer les  $g_{ik}$ , dans

$$ds^2 = \sum_0^3 g_{ik} dx^i dx^k$$

par leurs valeurs (15). On a

$$ds^2 = ds_0^2 - 2 \sum_0^3 \gamma_{ik} dx^i dx^k ,$$

d'où, si l'on tient compte des (20),

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^0^2 (1 - 2\gamma_P - 2\theta_h) - (1 + 2\gamma_P) \sum_1^3 dx^i^2 + \\ + 8dx^0 \sum_1^3 (\bar{\omega}_h \beta_{h|i} + \gamma_h \beta_{h+1|i}) dx^i . \end{aligned}$$

Divisons par  $dx^0^2$  et écrivons  $\beta^2$  au lieu de

$$\sum_1^3 \left( \frac{dx^i}{dx^0} \right)^2 ,$$

en remarquant ici encore que, dans les termes d'ordre supérieur, on peut remplacer  $\frac{dx^i}{dx^0}$  par  $\beta_{h|i}$ , et  $\gamma_P$  par  $\gamma_{P_h}$ . Il vient

$$\left( \frac{ds}{dx^0} \right)^2 = 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \beta^2 + \gamma_P \right) - 2\gamma_{P_h} \beta_h^2 + 8\bar{\omega}_h \beta_h^2 + 8\gamma_h \underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} - 2\theta_h .$$

Le terme en parenthèses est du premier ordre, les trois suivants du second ordre, et le signe  $\times$  entre les deux vecteurs  $\underline{\beta_0}$  et  $\underline{\beta_1}$  signifie produit scalaire. On en tire, au troisième ordre près,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx^0} = 1 - \left( \frac{1}{2} \beta^2 + \gamma_P \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_{P_h} \right)^2 - \\ - \gamma_{P_h} \beta_h^2 + 4\bar{\omega}_h \beta_h^2 + 4\gamma_h \underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} - \theta_h , \quad (23) \end{aligned}$$

ce qui est, d'après (12), l'expression de la fonction lagrangienne définissant le mouvement du point P :  $P_h$  peut y être traité comme identique à P. On peut, sans altérer les équations

différentielles du mouvement, omettre la constante additive 1, et en surplus multiplier par une constante arbitraire  $-\frac{1}{\xi_h}$ , dont on disposera avantageusement un peu plus avant. Notre fonction lagrangienne sera donc

$$\mathcal{L}'_h = -\frac{1}{\xi_h} \left( \frac{ds}{dx^0} - 1 \right)$$

ce qui, d'après (23), peut s'écrire

$$\xi_h \mathcal{L}'_h = \mathcal{H}'_h + \Lambda'_h , \quad (24)$$

où, en envisageant spécifiquement le point  $P_h$ ,

$$\mathcal{H}'_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_{P_h} \quad (25)$$

constitue la partie prépondérante du premier ordre, tandis que

$$\Lambda'_h = \frac{1}{2} \mathcal{H}'_h^2 + \gamma_{P_h} \beta_h^2 - 4 \bar{\omega}_h \beta_h^2 - 4 \gamma_h \underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 + \theta_h , \quad (26)$$

comprenant, comme on le vérifie aisément, tous les autres termes, est du second ordre.

## 7. — FONCTIONS LAGRANGIENNES DÉFINISSANT LE MOUVEMENT DES CENTRES DE GRAVITÉ.

Le centre de gravité d'un corps donné est par sa définition un point fictif, dépendant de la distribution des masses dans le corps à l'instant envisagé. Il n'a pas par conséquent caractère nécessairement substantiel, c'est-à-dire qu'en général il n'adhère pas, pendant un mouvement du corps, à une particule matérielle bien déterminée. Ceci arrive parfois, notamment pour les corps solides et pour une classe de mouvements de systèmes continus remplissant une certaine condition (égalité de deux vecteurs à tout instant<sup>1)</sup>; non en tout cas.

Ceci posé, reprenons les fonctions lagrangiennes  $\mathcal{L}'_h (h = 0, 1)$  du

<sup>1</sup> Voir ma note: *Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro*, *Acta Pontificiae Academiae Scientiarum*, T. LXXXVIII, 1935, pp. 151-155.