Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE
Autor: Levi-Civita, T.
Kapitel: 4. — Rappel des deux principes fondamentaux de la relativité générale.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26607

Ceci suffit pour montrer qu'en général $u_{h|Q}$, loin d'être négligeable vis-à-vis de U_h, est beaucoup plus grand, à cause du facteur R/D, ordinairement très grand dans le cas des corps célestes. On pourra se permettre d'effacer tout bonnement $u_{h|Q}$ devant U_h, seulement dans le cas évident *a priori*, où la masse m_h du corps envisagé serait infiniment petite (corps d'épreuve); ou du moins tellement petite par rapport à m_{h+1} qu'il devienne loisible de négliger le produit des deux rapports m_h/m_{h+1} et R/D. Quoi qu'il en soit, on pourra reconnaître que, dans l'approximation, qui sera bien précisée au nº 5, l'influence relativistique des potentiels intérieurs n'est pas si profonde qu'on pourrait le croire à première vue, et se laisse saisir sans calculs gênants.

4. — Rappel des deux principes fondamentaux de la relativité générale.

La conception dominante de la Relativité générale est l'interdépendance entre les phénomènes — dans notre cas, simplement l'existence et le mouvement des corps célestes — et la nature géométrique de l'espace-temps où ils se passent. Quelles que soient les coordonnées de temps et d'espace x^0, x^1, x^2, x^3, auxquelles on se rapporte, la forme du ds^2 englobant la métrique à quatre dimensions est

$$ds^2 = \sum_{ik}{}_0^3 g_{ik}\, dx^i\, dx^k \,, \tag{10}$$

les g_{ik} étant des fonctions des x fournies par les circonstances physiques à travers les célèbres équations de gravitation dues à Einstein. C'est le *principe gravitationnel.*

L'autre loi (formulée par Einstein, avant même d'avoir reconnu les liens des g_{ik} avec la matière et son mouvement) est le *principe géodésique.* Il affirme que, dès qu'on a affaire à une métrique (10), le mouvement de tout élément matériel est caractérisé par une *ligne géodésique propre de ce* ds². Sous l'aspect analytique c'est comme dire que les mouvements propres (le long desquels $ds^2 > 0$) sont définis par le principe variationnel

$$\delta \int ds = 0 \,. \tag{11}$$

La variation qui doit s'annuler se rapporte, dans l'image géométrique quadridimensionnelle, au passage de la ligne *horaire* dont il s'agit à toute autre ligne infiniment voisine, ayant mêmes extrémités. Il faut donc attribuer, dans (11), aux quatre coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3, des accroissements infiniment petits, sauf la condition de s'annuler aux extrémités. Mais on démontre [1] qu'on peut se passer de faire varier x^0, puisque, de ce fait, le premier membre de (11) subit une variation, qui s'annule en conséquence des conditions provenant de la variation des trois coordonnées d'espace x^1, x^2, x^3. Ceci posé, attribuons à (11) une forme équivalente, mais plus avantageuse pour les comparaisons éventuelles avec l'ancienne mécanique. Pour cela il convient avant tout de séparer, dans la somme

$$\sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g_{ik}\, dx^i dx^k ,$$

les termes dont les deux indices i, k, ou un seul, sont zéro. On a ainsi de (10)

$$\frac{ds^2}{(dx^0)^2} = g_{00} + \sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^k}{dx^0} ,$$

et, en posant

$$\mathcal{L} = \frac{ds}{dx^0} = \sqrt{g_{00} + \sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^k}{dx^0}} , \qquad (12)$$

on peut écrire la loi du mouvement (11) sous la forme

$$\delta \int \mathcal{L}\, dx^0 = 0 , \qquad (11')$$

en y regardant en surplus x^0 comme un paramètre non soumis à variation.

---

[1] Voir par exemple mes *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, Zanichelli, 1928), p. 4.