Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1935)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Autor: Levi-Civita, T.

Kapitel: 3. — Potentiel newtonien d'un corps en un point intérieur. Ordre de grandeur.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26607

avec la convention évidente de regarder identiques les indices h de même parité.

Dans (5) la variation doit être effectuée entre des limites fixes, et peut être bornée aux coordonnées d'espace x_h^i $(i = 1, 2, 3)$ du point P_h, ou, indifféremment, s'étendre aussi à t, puisque la contribution provenant de la variation de t s'annule identiquement, dès qu'on égale à zéro la variation provenant des coordonnées.

Il serait encore possible de réunir les deux formules variationnelles (5), correspondant à $h = 0$ et $h = 1$, dans une seule; mais ceci, qui est très important en Mécanique classique pour aboutir enfin à un système canonique unique, n'a pas d'intérêt ici, une simplification analogue n'étant pas à prévoir en Relativité.

Il importe au contraire, au point de vue spéculatif, de fixer un aspect limite de *d*). Tant que C_0 et C_1 sont des corps naturels, et par là même doués d'une certaine extension, *d*) est nécessairement une hypothèse approchée. Mais l'approximation est d'autant plus grande que le rapport D/R est petit. A la limite, pour le cas abstrait où les corps seraient réduits à de simples points matériels, la condition *d*) se trouve remplie automatiquement. Par conséquent la traduction du problème par les équations différentielles (4) devient *rigoureuse* pour le cas limite des points matériels.

Nous verrons bientôt qu'il n'en est pas de même en Relativité générale. Dans son cadre on arrive aussi à des équations différentielles ordinaires, ayant même degré d'approximation pour le cas réel des corps célestes, mais on ne peut plus passer à la limite, certains paramètres devenant infinis, pour des dimensions évanouissants des corps C, si leurs masses restent finies.

Le point matériel, cette pierre angulaire de la Mécanique classique, ne se laisse réaliser en Mécanique einsteinienne que pour des masses infiniment petites.

3. — Potentiel newtonien d'un corps en un point intérieur. Ordre de grandeur.

Avant d'aborder la mise en équation du problème des deux corps, dans les mêmes circonstances intuitives, mais au point de vue de la Relativité générale, je voudrais comparer les valeurs des potentiels newtoniens à l'intérieur et à l'extérieur des masses attirantes. Il n'y a rien de nouveau, mais il convient de s'en entretenir un petit moment pour plus de souplesse dans la suite. Dans le schème newtonien, envisagé tout à l'heure, on a pu s'en passer, puisque le principe de réaction *b*) permet d'éliminer rigoureusement, pour chaque corps C_h, les forces intérieures. Au contraire, en Relativité générale, il n'y a plus de principe de réaction, ce qui fait prévoir en particulier qu'on devra renoncer à l'ignorance préalable (évidemment très commode) des actions intérieures. Dès lors, il faut les analyser de plus près, pour retenir seulement les résidus inévitables. A ce point de vue, il convient de reprendre nos deux corps C_0 et C_1, et, en fixant par exemple l'attention sur C_h, d'en envisager aussi le potentiel intérieur. Ce sera, en un point quelconque Q de C_h lui-même,

$$u_{h|Q} = f \int_{C_h} \frac{\mu' \, d\tau'}{r(Q, Q')} \tag{7}$$

en désignant par μ' la densité au point Q' de C_h et par $d\tau'$ un élément de volume environnant. Le dénominateur $r(Q, Q')$ est au plus D, de sorte que

$$u_{h|Q} > f \frac{m_h}{D} . \tag{8}$$

D'autre part le potentiel extérieur (provenant du corps C_{h+1}) est, au point P_h, d'après *d*) et (6),

$$U_h = f \frac{m_{h+1}}{r} . \tag{9}$$

En employant le signe $\sim$ pour indiquer que deux quantités ont même ordre de grandeur, et, en rappelant la signification de R, on pourra retenir

$$U_h \sim f \frac{m_{h+1}}{R} .$$

Par conséquent, quel que soit le point Q à l'intérieur de C_h, on a

$$\frac{u_{h|Q}}{U_h} \underset{\sim}{>} \frac{m_h}{m_{h+1}} \cdot \frac{R}{D} .$$

Ceci suffit pour montrer qu'en général $u_{h|Q}$, loin d'être négligeable vis-à-vis de U_h, est beaucoup plus grand, à cause du facteur R/D, ordinairement très grand dans le cas des corps célestes. On pourra se permettre d'effacer tout bonnement $u_{h|Q}$ devant U_h, seulement dans le cas évident *a priori*, où la masse m_h du corps envisagé serait infiniment petite (corps d'épreuve); ou du moins tellement petite par rapport à m_{h+1} qu'il devienne loisible de négliger le produit des deux rapports m_h/m_{h+1} et R/D. Quoi qu'il en soit, on pourra reconnaître que, dans l'approximation, qui sera bien précisée au nº 5, l'influence relativistique des potentiels intérieurs n'est pas si profonde qu'on pourrait le croire à première vue, et se laisse saisir sans calculs gênants.

4. — Rappel des deux principes fondamentaux de la relativité générale.

La conception dominante de la Relativité générale est l'interdépendance entre les phénomènes — dans notre cas, simplement l'existence et le mouvement des corps célestes — et la nature géométrique de l'espace-temps où ils se passent. Quelles que soient les coordonnées de temps et d'espace x^0, x^1, x^2, x^3, auxquelles on se rapporte, la forme du ds^2 englobant la métrique à quatre dimensions est

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \,, \qquad (10)$$

les g_{ik} étant des fonctions des x fournies par les circonstances physiques à travers les célèbres équations de gravitation dues à Einstein. C'est le *principe gravitationnel.*

L'autre loi (formulée par Einstein, avant même d'avoir reconnu les liens des g_{ik} avec la matière et son mouvement) est le *principe géodésique.* Il affirme que, dès qu'on a affaire à une métrique (10), le mouvement de tout élément matériel est caractérisé par une *ligne géodésique propre de ce* ds². Sous l'aspect analytique c'est comme dire que les mouvements propres (le long desquels $ds^2 > 0$) sont définis par le principe variationnel

$$\delta \int ds = 0 \,. \qquad (11)$$