Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE
Autor: Levi-Civita, T.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26607

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE [1]

PAR

T. LEVI-CIVITA (Rome).

Je me propose d'abord de préciser les circonstances sous lesquelles, en admettant les principes de la Relativité générale, on peut, comme en Mécanique ordinaire, ramener le problème du mouvement de deux corps célestes à celui de deux points (fictifs), remplaçant, chacun, un de ces corps. A une certaine approximation, dite communément *seconde*, les résultats à signaler sont les suivants:

1⁰ On aboutit effectivement à un système différentiel du même ordre que dans le cas classique.

2⁰ On peut encore appliquer, toute réduction faite, la règle, dite d'effacement, d'après laquelle chaque corps influe, sur le mouvement du point fictif qui le remplace, seulement par l'intermédiaire de certaines constantes globales (à peu près masse et énergie potentielle newtonienne): toutefois avec une différence profonde sur la Mécanique ordinaire. C'est que, d'après cette dernière, les points matériels correspondent (comme, à tout autre égard, les liaisons sans frottement) à un aspect limite du phénomène, dont on peut (théoriquement du moins) s'approcher autant que l'on veut, en supposant que les dimensions des corps soient petites vis-à-vis de leur distance. Au contraire, en Relativité, il s'agit d'approximations, parfaitement vala-

[1] Conférence faite le 30 avril 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques*, organisées par l'Université de Genève.

bles pour le système planétaire, mais qui seraient dénuées de sens asymptotiquement, c'est-à-dire pour des corps dont les dimensions tendraient à s'évanouir, la masse restant finie.

3° Une fois arrivé aux équations différentielles, il suffit de les transformer, à la manière classique, pour reconnaître sans calculs que les corrections relativistiques sont, au point de vue qualitatif, de même espèce que celles découvertes par EINSTEIN et DE SITTER dans le cas du centre fixe (une des masses négligeable vis-à-vis de l'autre). Tout se réduit donc à établir l'expression quantitative de ces corrections, pour préparer la comparaison avec les observations astronomiques.

Je développerai ailleurs ce dernier point.

1. — GÉNÉRALITÉS DESCRIPTIVES.

Pour se rendre compte de la nature mécanique et mathématique du problème des deux corps en Relativité générale, il convient peut-être de fixer au préalable l'aspect astronomique de la question, indépendamment des lois mécaniques sur lesquelles on va s'appuyer pour le poser mathématiquement. Il s'agit de deux corps C_0 et C_1, assez éloignés pour qu'on puisse, étant donnée la petitesse des dimensions vis-à-vis des distances mutuelles, se contenter de connaître, pour chacun d'eux, la position à tout instant d'un seul point, par exemple, du centre de gravité.

L'autre prémisse essentielle (qu'on devra ensuite traduire mécaniquement suivant les principes de Newton ou d'Einstein) est qu'on veut concentrer l'attention sur le phénomène pur, tel qu'il se présente parfois en Astronomie, lorsque les corps envisagés se trouvent en présence l'un de l'autre, mais sont, ou se conçoivent, isolés des autres corps célestes, et soustraits à toute influence étrangère qu'on puisse présumer capable d'en modifier le mouvement.

Ceci posé, rappelons d'abord la mise en équation d'après les principes newtoniens.

2. — Position classique du problème. — Corps éloignés. Système différentiel usuel.

D'après Newton tout élément matériel, de masse dm, sollicité par une force totale $dm\,\mathbf{F}$, c'est-à-dire $\mathbf{F}$ par unité de masse, possède par là même une accélération (vectorielle, rapportée à des axes galiléens) $\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Faisons la somme des équations

$$dm\,\mathbf{a} = dm\,\mathbf{F}$$

se rapportant aux différents éléments d'un corps C_h ($h = 0, 1$). D'après la définition de son centre de gravité P_h, le premier membre n'est que le produit de la masse m_h du corps C_h par l'accélération $\frac{d^2P_h}{dt^2}$ de P_h. Dans la somme des seconds membres, les forces intérieures disparaissent, et ce qui reste est la résultante $\mathbf{F_h}$ des forces extérieures au corps C_h, d'où les équations vectorielles

$$m_h \frac{d^2P_h}{dt^2} = \mathbf{F_h} \qquad (h = 0,\ 1)\ . \tag{1}$$

Cette élimination rigoureuse des forces intérieures, provenant du principe de réaction, ne subsistera plus en Relativité, et il faudra se contenter de quelque remplacement approché.

Jusqu'ici on a fait intervenir:

a) la loi du mouvement ($\mathbf{a} = \mathbf{F}$);

b) le principe de réaction.

Il faut maintenant invoquer

c) la loi newtonienne de gravitation.

Elle permet d'expliciter les forces $\mathbf{F_h}$, et conduit à un système différentiel, intégrable par voie élémentaire, dès que les corps sont assez éloignés. On veut dire par ceci que, en désignant par D la plus grande dimension linéaire des corps C_h et par R la plus petite des distances entre un point de C_0 et un point de C_1, on suppose que, si non D/R,

d) $(D/R)^2$ soit tout à fait négligeable.

On démontre, d'après cela, dans la théorie du potentiel newtonien, que, r indiquant la distance $\overline{P_0P_1}$, f la constante de gravitation, et

$$U = f\frac{m_0 m_1}{r} \tag{2}$$

le potentiel (mutuel) des deux points matériels P_0 et P_1, la résultante des forces extérieures s'exerçant sur C_h n'est que

$$\mathbf{F_h} = \operatorname{grad}_h U \ , \tag{3}$$

le gradient avec l'indice h se rapportant au point P_h.

Les équations (1) prennent partant la forme

$$m_h \frac{d^2 P_h}{dt^2} = \operatorname{grad}_h U \qquad (h = 0,1) \ , \tag{4}$$

où les seconds membres ne dépendent que de la position des deux points P_0 et P_1. C'est, peut-on dire (on n'a qu'à projeter sur des axes fixes), le système différentiel classique, définissant le mouvement absolu dans le problème des deux corps. L'intégration du système remonte, elle aussi, à Newton. On passe au mouvement relatif, et on arrive aux formules résolutives à l'aide des intégrales des forces vives et des aires, etc. Il faudra s'en souvenir pour y rattacher enfin, comme des perturbations, les conséquences de la conception relativiste. Mais il y a encore beaucoup de chemin à franchir; et, pour le moment, il convient plutôt d'ajouter deux remarques suggérées par les équations (4). La première se rapporte à la possibilité (principe d'Hamilton) de remplacer, pour chaque point P_h, l'équation vectorielle (4) du mouvement par le principe variationnel

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v_h^2 + U_h \right) dt = 0 \ , \tag{5}$$

v_h désignant la valeur absolue de la vitesse du point P_h et U_h le potentiel unitaire agissant sur P_h, qui s'écrit, d'après (2),

$$U_h = \frac{1}{m_h} U = f\frac{m_{h+1}}{r} \qquad (h = 0,1) \ , \tag{6}$$

avec la convention évidente de regarder identiques les indices h de même parité.

Dans (5) la variation doit être effectuée entre des limites fixes, et peut être bornée aux coordonnées d'espace x_h^i $(i = 1, 2, 3)$ du point P_h, ou, indifféremment, s'étendre aussi à t, puisque la contribution provenant de la variation de t s'annule identiquement, dès qu'on égale à zéro la variation provenant des coordonnées.

Il serait encore possible de réunir les deux formules variationnelles (5), correspondant à $h = 0$ et $h = 1$, dans une seule; mais ceci, qui est très important en Mécanique classique pour aboutir enfin à un système canonique unique, n'a pas d'intérêt ici, une simplification analogue n'étant pas à prévoir en Relativité.

Il importe au contraire, au point de vue spéculatif, de fixer un aspect limite de *d*). Tant que C_0 et C_1 sont des corps naturels, et par là même doués d'une certaine extension, *d*) est nécessairement une hypothèse approchée. Mais l'approximation est d'autant plus grande que le rapport D/R est petit. A la limite, pour le cas abstrait où les corps seraient réduits à de simples points matériels, la condition *d*) se trouve remplie automatiquement. Par conséquent la traduction du problème par les équations différentielles (4) devient *rigoureuse* pour le cas limite des points matériels.

Nous verrons bientôt qu'il n'en est pas de même en Relativité générale. Dans son cadre on arrive aussi à des équations différentielles ordinaires, ayant même degré d'approximation pour le cas réel des corps célestes, mais on ne peut plus passer à la limite, certains paramètres devenant infinis, pour des dimensions évanouissants des corps C, si leurs masses restent finies.

Le point matériel, cette pierre angulaire de la Mécanique classique, ne se laisse réaliser en Mécanique einsteinienne que pour des masses infiniment petites.

3. — Potentiel newtonien d'un corps en un point intérieur. Ordre de grandeur.

Avant d'aborder la mise en équation du problème des deux corps, dans les mêmes circonstances intuitives, mais au point de vue de la Relativité générale, je voudrais comparer les valeurs des potentiels newtoniens à l'intérieur et à l'extérieur des masses attirantes. Il n'y a rien de nouveau, mais il convient de s'en entretenir un petit moment pour plus de souplesse dans la suite. Dans le schème newtonien, envisagé tout à l'heure, on a pu s'en passer, puisque le principe de réaction *b*) permet d'éliminer rigoureusement, pour chaque corps C_h, les forces intérieures. Au contraire, en Relativité générale, il n'y a plus de principe de réaction, ce qui fait prévoir en particulier qu'on devra renoncer à l'ignorance préalable (évidemment très commode) des actions intérieures. Dès lors, il faut les analyser de plus près, pour retenir seulement les résidus inévitables. A ce point de vue, il convient de reprendre nos deux corps C_0 et C_1, et, en fixant par exemple l'attention sur C_h, d'en envisager aussi le potentiel intérieur. Ce sera, en un point quelconque Q de C_h lui-même,

$$u_{h|Q} = f \int_{C_h} \frac{\mu' \, d\tau'}{r(Q, Q')} \tag{7}$$

en désignant par μ' la densité au point Q' de C_h et par $d\tau'$ un élément de volume environnant. Le dénominateur r (Q, Q') est au plus D, de sorte que

$$u_{h|Q} > f \frac{m_h}{D} . \tag{8}$$

D'autre part le potentiel extérieur (provenant du corps C_{h+1}) est, au point P_h, d'après *d*) et (6),

$$U_h = f \frac{m_{h+1}}{r} . \tag{9}$$

En employant le signe $\sim$ pour indiquer que deux quantités ont même ordre de grandeur, et, en rappelant la signification de R, on pourra retenir

$$U_h \sim f \frac{m_{h+1}}{R} .$$

Par conséquent, quel que soit le point Q à l'intérieur de C_h, on a

$$\frac{u_{h|Q}}{U_h} \gtrsim \frac{m_h}{m_{h+1}} \cdot \frac{R}{D} .$$

Ceci suffit pour montrer qu'en général $u_{h|Q}$, loin d'être négligeable vis-à-vis de U_h, est beaucoup plus grand, à cause du facteur R/D, ordinairement très grand dans le cas des corps célestes. On pourra se permettre d'effacer tout bonnement $u_{h|Q}$ devant U_h, seulement dans le cas évident *a priori*, où la masse m_h du corps envisagé serait infiniment petite (corps d'épreuve); ou du moins tellement petite par rapport à m_{h+1} qu'il devienne loisible de négliger le produit des deux rapports m_h/m_{h+1} et R/D. Quoi qu'il en soit, on pourra reconnaître que, dans l'approximation, qui sera bien précisée au nº 5, l'influence relativistique des potentiels intérieurs n'est pas si profonde qu'on pourrait le croire à première vue, et se laisse saisir sans calculs gênants.

4. — Rappel des deux principes fondamentaux de la relativité générale.

La conception dominante de la Relativité générale est l'interdépendance entre les phénomènes — dans notre cas, simplement l'existence et le mouvement des corps célestes — et la nature géométrique de l'espace-temps où ils se passent. Quelles que soient les coordonnées de temps et d'espace x^0, x^1, x^2, x^3, auxquelles on se rapporte, la forme du ds^2 englobant la métrique à quatre dimensions est

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx^i\, dx^k \,, \tag{10}$$

les g_{ik} étant des fonctions des x fournies par les circonstances physiques à travers les célèbres équations de gravitation dues à Einstein. C'est le *principe gravitationnel.*

L'autre loi (formulée par Einstein, avant même d'avoir reconnu les liens des g_{ik} avec la matière et son mouvement) est le *principe géodésique.* Il affirme que, dès qu'on a affaire à une métrique (10), le mouvement de tout élément matériel est caractérisé par une *ligne géodésique propre de ce* ds². Sous l'aspect analytique c'est comme dire que les mouvements propres (le long desquels $ds^2 > 0$) sont définis par le principe variationnel

$$\delta \int ds = 0 \,. \tag{11}$$

La variation qui doit s'annuler se rapporte, dans l'image géométrique quadridimensionnelle, au passage de la ligne *horaire* dont il s'agit à toute autre ligne infiniment voisine, ayant mêmes extrémités. Il faut donc attribuer, dans (11), aux quatre coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3, des accroissements infiniment petits, sauf la condition de s'annuler aux extrémités. Mais on démontre [1] qu'on peut se passer de faire varier x^0, puisque, de ce fait, le premier membre de (11) subit une variation, qui s'annule en conséquence des conditions provenant de la variation des trois coordonnées d'espace x^1, x^2, x^3. Ceci posé, attribuons à (11) une forme équivalente, mais plus avantageuse pour les comparaisons éventuelles avec l'ancienne mécanique. Pour cela il convient avant tout de séparer, dans la somme

$$\sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx^i dx^k ,$$

les termes dont les deux indices i, k, ou un seul, sont zéro. On a ainsi de (10)

$$\frac{ds^2}{(dx^0)^2} = g_{00} + \sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^k}{dx^0} ,$$

et, en posant

$$\mathcal{L} = \frac{ds}{dx^0} = \sqrt{g_{00} + \sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i} \frac{dx^i}{dx^0} + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^k}{dx^0}} , \qquad (12)$$

on peut écrire la loi du mouvement (11) sous la forme

$$\delta \int \mathcal{L}\, dx^0 = 0 , \qquad (11')$$

en y regardant en surplus x^0 comme un paramètre non soumis à variation.

---

[1] Voir par exemple mes *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, Zanichelli, 1928), p. 4.

5. — Spécification des hypothèses permettant de simplifier le calcul. Règle pratique.

L'application des généralités qui précèdent à un problème bien déterminé quelconque exige évidemment la combinaison des deux principes, gravitationnel et géodésique, qui se traduisent analytiquement dans l'intégration: d'équations aux dérivées partielles le premier, d'équations différentielles ordinaires le second; même le plus souvent enchevêtrées les unes aux autres.

Il y a un cas, qu'on peut appeler *problème du centre fixe* (un seul corps à structure complètement symétrique et une masse infiniment petite qui se meut dans son champ), où non seulement les équations gravitationnelles sont indépendantes des équations du mouvement mais où on a même pu les intégrer rigoureusement et résoudre ensuite le problème jusqu'au bout. C'est ce qui a réussi à Schwarzschild peu après que Einstein en eut donné une solution approchée.

En concept, le problème des deux, ou même d'un nombre quelconque de corps peut être envisagé comme un cas particulier de la mécanique (newtonienne ou einsteinienne que ce soit) d'un milieu continu, où l'on aurait affaire à une distribution de matière remplissant, avec des vides éventuels, tout l'espace, cette matière étant soumise à sa propre gravitation. A ce point de vue tout revient, d'après Einstein, à caractériser, en fonction de x^0, x^1, x^2, x^3, non seulement la métrique de l'espace-temps, c'est-à-dire les dix coefficients g_{ik} du ds^2, mais encore la congruence des lignes horaires, décrites par les différents éléments de matière (lignes de courant lorsqu'on considère séparément l'espace et le temps). Une congruence est définie analytiquement par les paramètres $\lambda^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, ou bien par les moments λ_i de ses lignes. Ces quatre nouvelles inconnues se réduisent d'ailleurs à trois, puisqu'elles sont liées aux g par l'identité

$$\sum_{i\,0}^{3} \lambda_i \lambda^i \equiv \sum_{ik\,0}^{3} g_{ik} \lambda^i \lambda^k \equiv \sum_{ik\,0}^{3} g^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1 .$$

Si l'on introduit en outre la densité $\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ de la distribution de la matière à un instant donné x^0, et la constante universelle c (vitesse de la lumière dans le vide), $\mu/c^2 = \varepsilon$ représentera, d'après la proportionnalité entre matière et énergie, la densité de l'énergie, et le tenseur énergétique aura les composantes

$$T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) ,$$

en négligeant tout effort intérieur, c'est-à-dire en supposant que la matière est désagrégée. Ces T_{ik} sont les seconds membres des 10 équations gravitationnelles, qui renferment de la sorte 14 inconnues: les dix g, trois des λ et ε.

Pour que le problème devienne déterminé on n'a qu'à invoquer le principe géodésique, c'est-à-dire à associer aux 10 équations gravitationnelles les 4 équations

$$\sum_0^3{}_j \lambda_{i|j} \lambda^j = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

($\lambda_{i|j}$ dérivées covariantes par rapport au ds^2), exprimant que toute ligne horaire est géodésique. Cette position du problème devrait être illustrée par beaucoup de remarques; mais je dois forcément glisser, en me bornant à avertir qu'un tel point de vue a été effectivement utilisé sous un aspect particulier, très important. Je fais allusion aux recherches concernant l'univers en expansion dynamique de Friedman — Lemaître — Einstein — Eddington — De Sitter — Tolman, etc., où tout est symétrique par rapport à un centre. Les variables indépendantes se réduisent alors à deux, et les équations aux dérivées partielles essentiellement à deux, avec autant d'inconnues [1]. Dans ces conditions, il a été possible, comme pour le cas Einstein-Schwarzschild, rappelé ci-dessus, d'intégrer rigoureusement.

---

[1] Voir notamment, pour la position *mathématique* du problème général de l'Univers en expansion:

G. C. McVittie, The mass-particle in an expanding universe, *Monthly notices of the R. A. S.*, vol. 93, 1933, pp. 325-339;

J. L. Synge, On the expansion or contraction of a symmetrical cloud under the influence of gravity, *Proc. of the National Academy of Sciences*, vol. 20, 1934, pp. 635-640; et trois notes de M. C. Tolotti dans les *Rendiconti de l'Academie des Lincei*, vol. XXI, 1935, pp. 326-331, 488-492, 571-575.

Il ne me paraît pas probable qu'une chance pareille puisse se présenter aux mathématiciens de notre époque dans l'étude du véritable problème des deux corps ou de quelque aspect réel du problème de plusieurs corps. Faute de mieux, on ne peut que tâcher de se procurer en attendant des solutions suffisamment approchées pour bien fixer toutes les inégalités qui peuvent être, maintenant, ou dans quelques siècles, susceptibles de vérification par les observations. C'est ce qui a été fait, depuis une vingtaine d'années, par M. DROSTE [1], et, d'une manière plus détaillée, par le regretté DE SITTER [2] pour le cas des n corps, mais en négligeant systématiquement les potentiels intérieurs. Ceci est légitime — sans doute les auteurs cités ne l'ont pas ignoré, mais c'est M. MARCEL BRILLOUIN [3] qui l'a fait remarquer explicitement — tant qu'il s'agit de former le ds^2 et les équations du mouvement d'un corps *petit*, dans le champ de masses en mouvement donné; mais il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit de caractériser le mouvement d'un système continu, même dans le cas typique de deux corps éloignés, de masses comparables. La raison essentielle en a été indiquée au nº 3, car c'est bien le potentiel newtonien qui joue un rôle prépondérant, aussi en tenant compte de la correction relativiste, comme on sait, et comme on va d'ailleurs le reconnaître dans nos formules.

Ayant en vue le problème des deux corps, il y aura lieu de reprendre, pour $n = 2$, la méthode approchée de DROSTE-DE SITTER [4], mais sans effacer *a priori* ce qui provient, pour chacun des deux corps, de ce corps lui-même; au contraire, en tâchant d'en saisir les conséquences irréductibles, et en même temps évitant les complications inessentielles à l'aide de quelques hypothèses qualitatives complémentaires, à côté de l'approximation principale, provenant de la petitesse des vitesses des

[1] The field of n moving centres in Einstein's theory of gravitation, *Ak. van Vet. te Amsterdam*, Vol. XIX, 1916, pp. 447-455.

[2] On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, *Monthly Notices of the R.A.S.*, Vol. LXVII, 1916, pp. 155-184.

[3] Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel, *Comptes rendus*, T. 175, 1922, pp. 1008-1012.

[4] Voir notamment J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, T. II (Paris, Gauthier-Villars, 1930), chap. X et XI.

corps célestes vis-à-vis de celle de la lumière, employée par EINSTEIN et par tous ses continuateurs.

Il importe évidemment de bien préciser les considérations préalables d'ordre de grandeur sous lesquelles nous allons aborder, simplifier et résoudre le problème.

En premier lieu, comme on l'a dit dès le début, on se contente d'arriver, dans les équations différentielles du mouvement, à la seconde approximation. Rappelons ce qu'on entend par ceci.

Dans les problèmes qui nous intéressent, l'ordre de grandeur des quantités mécaniques, notamment de l'énergie cinétique et potentielle, est celui de notre système planétaire. Pour les mouvements de ce système, v^2 (carré de la vitesse, c'est-à-dire double de l'énergie cinétique réduite à l'unité de masse) est très petit vis-à-vis de c^2, carré de la vitesse de la lumière, et il en est de même pour la valeur V du potentiel newtonien du système, soit à l'extérieur, soit même à l'intérieur du Soleil, des planètes, ou des satellites. L'ordre de grandeur des rapports

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}, \qquad \gamma = \frac{V}{c^2} \tag{13}$$

est 10^{-8} dans le cas de la Terre et pas trop différent pour les autres corps du système solaire.

On dira du *premier ordre* les termes ayant cet ordre de grandeur. Et la première source de simplification sera:

A_1) *Se contenter du premier ordre, en négligeant tout terme d'ordre supérieur.*

(Je choisis la lettre A dans cette spécification d'hypothèses, parce que A est l'initiale soit d' « approximation », soit d' « admission ».) Bien entendu il faudra, comme toujours dans ce type de réductions, procéder *cum grano salis*. On aura bien le droit, dans une formule quelconque, de négliger β^3, ou $\beta\gamma$, etc. devant l'unité; au contraire, si par hasard, dans une relation rigoureuse, il n'y a pas de termes d'ordre zéro (comparables à l'unité), mais que les termes prépondérants soient d'un certain ordre minimum ν, il faudra retenir, avec eux, tout ce qui ne dépasse pas l'ordre $\nu + 1$. L'advertance est bien banale, mais elle doit rester présente à l'esprit au cours des calculs.

D'autre part, dans le but de simplifier autant que possible, il est naturellement avantageux de se rapporter à des coordonnées appropriées. Dans les cas qui nous intéressent ici, le ds^2 reste très proche du ds_0^2 de la relativité restreinte (absence de matière et de toute autre circonstance physique influant sur la métrique de l'espace-temps). Un tel ds_0^2, rapporté au temps römerien x^0 ($= ct$, où t désigne le temps ordinaire) et à des coordonnées cartésiennes x^1, x^2, x^3, a la forme pseudo-euclidienne

$$ds_0^2 = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}) \, . \tag{14}$$

On doit donc admettre — ce n'est au fond qu'un aspect préliminaire de l'approximation A_1) — que les métriques (10) se rapportant aux questions susdites comportent des coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 (qui pourraient être mieux caractérisées sous l'aspect géométrique) très proches de l'espèce pseudo-cartésienne, dans ce sens que *les coefficients* g_{ik} *diffèrent des valeurs* $\overset{0}{g}_{ik}$ ($\pm$ 1 ou zéro) *correspondant à* (14) *par des quantités*

$$-2\gamma_{ik}$$

du premier ordre au moins; les γ_{0i} *étant même d'ordre non inférieur à* 3/2.

Ce n'est pas encore assez pour aboutir enfin à un nombre fini d'équations différentielles ordinaires. Il en serait d'ailleurs de même dans la position classique du problème des deux corps, puisque chacun de leurs centres de gravité P_h ressent les attractions de tout élément de l'autre corps C_{h+1}, et on peut remplacer ces dernières par une force dépendant uniquement de la position de P_{h+1}, seulement en introduisant quelque hypothèse supplémentaire, notamment l'hypothèse *d*) du n° 2. Comme la Mécanique ordinaire n'est qu'un cas limite de la Mécanique einsteinienne, il est bien clair que, pour atteindre le même but, il faudra, aussi en Relativité générale, se poser (à fort peu près) dans les mêmes conditions, et par conséquent:

A_2) *Négliger toute quantité de l'ordre* $(D/R)^2$.

Les approximations A_1) et A_2) sont assurément le fondement du calcul; mais elles ne suffisent pas à elles seules pour atteindre le but. Je les ai complétées, en admettant au préalable deux autres circonstances, qui sont d'ailleurs des plus raisonnables au point de vue astronomique. Je suppose ultérieurement:

A_3) *Le mouvement de chacun des corps se réduit* grossièrement *à une translation.*

Voici le sens à attribuer à l'adverbe « grossièrement ». Partons de la définition de mouvement de translation d'un corps C_h. C'est un mouvement dans lequel les points du corps sont, à un instant quelconque, animés tous d'une même vitesse vectorielle, disons de la vitesse $\mathbf{v_h}$ du centre de gravité P_h. Pratiquement on pourra naturellement regarder comme translation tout mouvement pour lequel, vis-à-vis de v_h (longueur du vecteur $\mathbf{v}_h$), est négligeable la valeur absolue de la différence vectorielle $\Delta\mathbf{v}$ entre les vitesses au même instant de deux points quelconques de C_h; donc le rapport $\dfrac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h}$.

Nous ne prétendons pas que ce rapport soit négligeable par lui-même, comme on l'a supposé pour $(D/R)^2$ ou β^3, mais seulement qu'il ne dépasse jamais quelques centièmes (ordre de grandeur 10^{-2}), de manière que l'on puisse omettre, comme quantité d'ordre supérieur au premier, tout produit du type

$$\beta^2\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h}, \qquad \gamma\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h}, \text{ etc.}$$

C'est bien ce qui arrive pour les planètes. D'abord leurs déformations sont négligeables, et elles se comportent par conséquent comme des corps rigides. A la vérité leur mouvement n'est pas purement translatoire; il se compose de translation et de rotation. Toutefois, pour un point quelconque du corps, la vitesse due à la rotation atteint seulement quelques centièmes de la vitesse commune de translation. Par exemple, dans le cas de la Terre, la vitesse due à la rotation (un tour par jour) a la valeur maximum d'un demi kilomètre par seconde; tandis que la vitesse de translation est 30 km./sec.; donc

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_h} \sim 2\cdot\frac{1}{60} = 0{,}03 .$$

C'est l'ordre de grandeur pour notre système planétaire.

Ceci posé, remarquons qu'un mouvement rigoureusement de translation est en particulier rigoureusement rigide; on prévoit partant qu'un mouvement peu différent d'une translation soit par là même peu différent d'un mouvement rigide. C'est ce qui arrive en effet, pourvu qu'on ajoute quelque petite spécification à la condition cinématique concernant $\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\varrho_h}$ $(h = 0{,}1)$. Il suffit, par exemple, en envisageant la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point quelconque Q du corps C_h comme fonction de sa position initiale M et du temps t, de supposer convenablement limitées les dérivées du déplacement

$$Q - M = \int_0^t \mathbf{v}(M, t)\, dt$$

par rapport aux coordonnées de M. Il serait aisé de préciser, mais je ne puis pas m'arrêter sur ces détails. Il me faut au contraire épuiser les préliminaires en quelques mots, pour esquisser ensuite la solution du problème.

La dernière admission se rapporte aux centres de gravité P_0 et P_1, qui doivent être, *à fort peu près*, *centres de gravitation* des corps respectifs. Rappelons la définition de *centre de gravitation* et expliquons l'*à peu près*. On sait [1] — et on le reconnaît d'ailleurs immédiatement par la considération du maximum du potentiel intérieur $u_{h|Q}$ (nº 3) — qu'il existe au moins un point G_h où u_h atteint son maximum, et où par conséquent les dérivées de u_h s'annulent, et avec elles l'attraction exercée par le corps C_h sur le point G_h. Ce centre de gravitation G_h ne coïncide pas nécessairement avec le centre de gravité P_h. C'est ce qui arrive certainement si le corps C_h possède un centre de symétrie, mais en général il n'en est rien, et alors l'attraction newtonienne de C_h sur son centre de gravité P_h n'est pas nulle. Or il est très avantageux (je crois même indispensable pour notre but) de pouvoir calculer la correction einsteinienne comme si la dite attraction sur P_h était rigoureusement nulle. Et c'est justement pour cela qu'il convient d'introduire la quatrième et dernière admission:

---

[1] Voir une note de M. FENICI dans les *Rendicònti* de l'Académie des Lincei, Vol. XXI, 1935, pp. 493-498.

A_4) *Pour chacun des deux corps le centre de gravité* P_h *n'est pas trop éloigné du (ou d'un) centre de gravitation* G_h; plus précisément, la distance $P_h G_h$ est assez petite pour que, en P_h, l'attraction g_h du corps C_h (nulle rigoureusement en G_h) soit une fraction assez petite (ici encore quelques centièmes au plus) de l'attraction F_h exercée par l'autre corps.

Alors il est permis de négliger, comme étant d'ordre supérieur au premier, tout terme du type

$$\beta^2 \frac{g_h}{F_h}, \qquad \gamma \frac{g_h}{F_h}, \text{ etc.} \qquad (h = 0,1) .$$

Remarque. — Il n'est pas inutile d'avertir que, à cause de A_3), dans l'ordre d'approximation adopté, il suffit que A_4) soit vérifiée à l'instant initial. Elle reste alors automatiquement satisfaite pour $t > 0$. En effet, d'après A_3), nos corps se comportent sensiblement comme des solides, et alors, à la même échelle, P_h et G_h gardent à tout instant les mêmes positions relatives dans le corps respectif. Il s'en suit en particulier que le centre de gravité P_h est substantiel, c'est-à-dire affecte toujours la même particule matérielle.

Règle pratique. — En vue du calcul effectif, il y a lieu de retenir que, dans n'importe quelle relation, *l'évaluation des termes correctifs* (généralement d'ordre 1; ou, exceptionnellement, d'ordre $\nu + 1$, si par hasard l'ordre minimum est ν) *se fait comme si les corps* C_0, C_1 *étaient rigoureusement indéformables, animés, chacun pour son compte, de simple translation, et chacun exerçant une attraction nulle sur son centre de gravité.*

6. — Expression du ds^2 pour le champ de deux corps en mouvement donné — L'opérateur $\frac{d_h}{dx^0}$.

Il faut expliciter les coefficients g_{ik}, qui, comme on l'a rappelé au numéro précédent, sont nécessairement de la forme

$$g_{ik} = \overset{0}{g}_{ik} - 2\gamma_{ik} \qquad (15)$$

où les g^0_{ik} sont les coefficients ($\pm$ 1, 0) de (14) et les γ_{ik} des petites corrections à regarder comme du premier ordre au plus.

Il est bien connu, et d'ailleurs aisé à vérifier, que, pour tenir compte, dans les équations du mouvement, des termes d'ordre immédiatement supérieur à l'approximation newtonienne, il suffit de calculer la partie prépondérante d'ordre minimum de tous les γ_{ik}, excepté γ_{00}, pour lequel il faut expliciter non seulement le premier ordre, mais aussi le second.

Nous désignerons par x^i_h ($h = 0, 1$; $i = 1, 2, 3$) les coordonnées des centres de gravité P_h; par $\beta_{h|i}$ les composantes $\frac{dx^i_h}{dx^0}$ de leurs vitesses römeriennes, qui ne sont pas autre chose que des vitesses ordinaires divisées par c; β_h représentera en conformité la valeur absolue de ladite vitesse vectorielle römerienne $\underline{\beta}_{\mathbf{h}}$.

D'autre part, V étant le potentiel newtonien des deux corps, rapporté, comme d'habitude, à l'unité de masse du point attiré, nous poserons

$$\frac{V}{c^2} = \gamma \, . \tag{16}$$

Naturellement γ est la somme (divisée par c^2) de deux potentiels, l'un provenant de C_0 et l'autre de C_1. En envisageant en particulier les déterminations de γ aux points P_h, nous poserons

$$\gamma_{P_h} = \gamma_h + \varpi_h \, , \tag{17}$$

où γ_h provient de l'autre corps C_{h+1}, et, d'après A_2) et (2), se réduit à

$$\gamma_h = \frac{1}{c^2 m_h} U = \frac{f}{c^2} \frac{m_{h+1}}{r} \, , \tag{18}$$

tandis que, d'après (7),

$$\varpi_h = \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu' \, d\tau'}{r(P_h, Q')} \tag{19}$$

est le potentiel newtonien au point P_h du corps C_h lui-même, divisé par c^2.

Il importe de remarquer que ces ϖ_h jouent le rôle de *constantes*, puisqu'elles sont effectivement telles toutes les fois qu'on peut traiter comme invariables les corps C_h, ce qui arrive en particulier dans l'application de la règle pratique du numéro précédent.

L'intégration approchée des équations gravitationnelles, que je ne puis pas même ébaucher, donne, pour un point quelconque P,

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik}\gamma_P \qquad (i,\ k = 1, 2, 3) \tag{20a}$$

où l'on entend par δ_{ik} les symboles de Kronecker, c'est-à-dire 1 pour $i = k$, 0 pour $i \neq k$.

Ensuite, en supposant que P appartient au corps C_h, et même qu'il coïncide initialement (en position et vitesse) avec le centre de gravité P_h, on constate, moyennant les hypothèses A_2), A_3) et la règle pratique qui en découle, que, dans tout terme d'ordre supérieur au premier, on peut confondre P avec P_h; et alors on trouve:

$$\gamma_{0i} = \gamma_{i0} = -2\varpi_h\beta_{h|i} - 2\gamma_h\beta_{h+1|i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{20b}$$

$$\gamma_{00} = \gamma_P + \theta_h\,, \tag{20c}$$

où γ_h, ϖ_h ont les significations (18), (19) et où θ_h est d'ordre 2. On a précisément

$$\theta_h = -\gamma_{P_h}^2 + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d_{h+1}^2 r}{dx^{0^2}} + \tag{21}$$

$$+ 2\gamma_0\gamma_1 + 2\varpi_h\beta_h^2 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + 2\gamma_h(\varpi_h + \eta_{h+1}) \qquad (h = 0,1)\,,$$

en indiquant pour abréger par η_h les constantes numériques que voici

$$\eta_h = \frac{f}{mc^2}\int_{C_h}\mu\, d\tau\int_{C_h}\frac{\mu'\, d\tau'}{r\,(Q,\,Q')}\,, \tag{22}$$

et par $\dfrac{d_h}{dx^0}$ *une dérivation temporelle dépendant exclusivement du mouvement du point* P_h, où l'on doit par conséquent regarder comme constant tout ce qui se rapporte à P_{h+1}.

Commençons maintenant à remplacer les g_{ik}, dans

$$ds^2 = \sum_{0\,ik}^{3} g_{ik}\,dx^i\,dx^k$$

par leurs valeurs (15). On a

$$ds^2 = ds_0^2 - 2\sum_{0\,ik}^{3} \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k\,,$$

d'où, si l'on tient compte des (20),

$$ds^2 = dx^{0^2}(1 - 2\gamma_{\mathrm{P}} - 2\,\theta_h) - (1 + 2\gamma_{\mathrm{P}})\sum_{1\,i}^{3} dx^{i^2} +$$

$$+ 8\,dx^0 \sum_{1\,i}^{3} (\varpi_h\,\beta_{h|i} + \gamma_h\,\beta_{h+1|i})\,dx^i\,.$$

Divisons par dx^{0^2} et écrivons β^2 au lieu de

$$\sum_{1\,i}^{3}\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)^2,$$

en remarquant ici encore que, dans les termes d'ordre supérieur, on peut remplacer $\frac{dx^i}{dx^0}$ par $\beta_{h|i}$, et γ_{P} par γ_{P_h}. Il vient

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma_{\mathrm{P}}\right) - 2\gamma_{\mathrm{P}_h}\beta_h^2 + 8\,\varpi_h\,\beta_h^2 + 8\gamma_h\,\underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} - 2\,\theta_h\,.$$

Le terme en parenthèses est du premier ordre, les trois suivants du second ordre, et le signe $\times$ entre les deux vecteurs $\underline{\beta_0}$ et $\underline{\beta_1}$ signifie produit scalaire. On en tire, au troisième ordre près,

$$\frac{ds}{dx^0} = 1 - \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma_{\mathrm{P}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_{\mathrm{P}_h}\right)^2 -$$

$$- \gamma_{\mathrm{P}_h}\beta_h^2 + 4\,\varpi_h\,\beta_h^2 + 4\gamma_h\,\underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} - \theta_h\,, \tag{23}$$

ce qui est, d'après (12), l'expression de la fonction lagrangienne définissant le mouvement du point P : P_h peut y être traité comme identique à P. On peut, sans altérer les équations différentielles du mouvement, omettre la constante additive 1, et en surplus multiplier par une constante arbitraire $-\frac{1}{\xi_h}$, dont on disposera avantageusement un peu plus avant. Notre fonction lagrangienne sera donc

$$\mathcal{L}'_h = -\frac{1}{\xi_h}\left(\frac{ds}{dx^0} - 1\right)$$

ce qui, d'après (23), peut s'écrire

$$\xi_h \mathcal{L}'_h = \mathcal{M}'_h + \Lambda'_h , \tag{24}$$

où, en envisageant spécifiquement le point P_h,

$$\mathcal{M}'_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_{P_h} \tag{25}$$

constitue la partie prépondérante du premier ordre, tandis que

$$\Lambda'_h = \frac{1}{2}\mathcal{M}'^2_h + \gamma_{P_h}\beta_h^2 - 4\varpi_h\beta_h^2 - 4\gamma_h\underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 + \theta_h , \tag{26}$$

comprenant, comme on le vérifie aisément, tous les autres termes, est du second ordre.

7. — Fonctions lagrangiennes définissant le mouvement des centres de gravité.

Le centre de gravité d'un corps donné est par sa définition un point fictif, dépendant de la distribution des masses dans le corps à l'instant envisagé. Il n'a pas par conséquent caractère nécessairement substantiel, c'est-à-dire qu'en général il n'adhère pas, pendant un mouvement du corps, à une particule matérielle bien déterminée. Ceci arrive parfois, notamment pour les corps solides et pour une classe de mouvements de systèmes continus remplissant une certaine condition (égalité de deux vecteurs à tout instant [1]); non en tout cas.

Ceci posé, reprenons les fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}'_h (h = 0, 1)$ du

[1] Voir ma note: Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro, *Acta Pontificiae Academiae Scientiarum*, T. LXXXVIII, 1935, pp. 151-155.

numéro précédent. A la suite de nos admissions et du postulat géodésique s'appliquant aux éléments *matériels*, elles définissent, à vrai dire, les accélérations (non précisément des centres de gravité P_h), mais de deux points matériels, l'un appartenant à C_0 et l'autre à C_1, coïncidant à l'instant envisagé avec P_0, P_1 et possédant à cet instant leur même vitesse. A notre ordre d'approximation, il serait parfaitement équivalent de caractériser le mouvement des points (encore plus fictifs) P_0^*, P_1^*, possédant à un instant quelconque les accélérations susdites et coïncidant à l'instant initial avec P_0, P_1. Mais les équations, définissant le mouvement des points auxiliaires P_h^*, qu'on tirerait des fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}'_h$, présentent l'inconvénient essentiel (provenant des γ_{P_h} dans les termes du premier ordre) que tout n'y est pas encore réduit ni réductible à dépendre exclusivement des deux points P_0^* et P_1^*. On parviendra toutefois à surmonter cette difficulté aussi, en passant justement aux centres de gravité. Nous allons voir en effet que, dans notre approximation, la connaissance des $\mathcal{L}'_h$ permet d'aboutir sans calculs aux véritables fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}_h$ des centres de gravité.

Pour s'en rendre compte, il convient d'abord de rappeler une circonstance fondamentale dans la Théorie de la Relativité générale: c'est que toutes ses formules et conclusions redonnent en première approximation les lois classiques.

En particulier, si l'on fixe l'attention sur la fonction lagrangienne $\mathcal{L}'_h = \mathcal{N}'_h + \Lambda'_h$ définissant (dans la manière spécifiée plus haut) le mouvement des points P_h^*, on y reconnait immédiatement que $\mathcal{N}'_h$ est le *terme newtonien* (puisqu'on en tirerait, au facteur constant $\frac{1}{c^2}$ près, les équations du mouvement newtonien), tandis que Λ'_h constitue la *correction einsteinienne*, c'est-à-dire le terme complémentaire donnant lieu à cette correction pour le mouvement des points P_h^*. D'une manière plus précise. il nous faudra retenir que Λ'_h donne lieu justement aux corrections einsteiniennes des composantes, divisées par c^2, de l'accélération newtonienne de P_h^*.

Or les points fictifs P_h^* sont en quelque sorte intermédiaires entre des points substantiels de nos corps et leurs centres de gravité. Si ces corps étaient animés d'une simple translation, P_h et P_h^* coïncideraient à tout instant, possédant dès lors la même Λ_h'. L'admission A_3) du n° 5, que les mouvements des deux corps se réduisent *grossièrement* à des translations, implique que les Λ_h' *restent* sensiblement (c'est-à-dire à des termes près d'ordre supérieur au second) *les mêmes* qu'il s'agisse des P_h^* ou des centres de gravité P_h. Notre but étant de calculer les fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}_h$ de ces derniers, nous nous trouvons, d'après ce qu'on vient de dire, dans la situation favorable d'en connaître déjà l'expression explicite Λ_h' de la correction einsteinienne. Il ne nous reste partant que la tâche bien aisée d'assigner le terme newtonien $\mathfrak{N}_h$ de

$$\xi_h \mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \Lambda_h' \, . \tag{24'}$$

Pour cela, il suffit de reprendre les équations newtoniennes [(4) du n° 2], définissant le mouvement des centres de gravité P_0 et P_1. Elles admettent, comme il résulte de (5), la fonction lagrangienne

$$\frac{1}{2} v_h^2 + U_h \, ,$$

qui peut être multipliée par une constante arbitraire, par exemple par $\frac{1}{c^2}$, sans altérer les équations différentielles. Il est ainsi loisible de regarder, à l'approximation newtonienne, comme fonction lagrangienne du mouvement du centre de gravité P_h

$$\mathfrak{N}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h \, . \tag{25'}$$

Ajoutons que, dans chacun des trois binômes lagrangiens qu'on tire de $\mathfrak{N}_h$, figure (isolément et avec le coefficient 1) la composante correspondante de l'accélération de P_h, divisé par c^2, comme il arrivait pour $\mathfrak{N}_h'$ à l'égard de P_h^*. C'est tout ce qu'il faut pour conclure que *la fonction lagrangienne du mouvement du centre de gravité* P_h *est*

$$\xi_h \mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \Lambda_h' \, , \tag{24'}$$

où

$$\mathfrak{N}_h = \frac{1}{2} \beta_h^2 + \gamma_h \, , \tag{25'}$$

Λ'_h *a l'expression* (26), *avec la valeur* (21) *de* θ_h, *et* ξ_h *est une constante dont on peut encore disposer.* On va le faire dans un moment.

8. — Artifice permettant de sauver le principe d'effacement en seconde approximation — Modification des masses.

Ce qui provient, pour chaque corps, des actions qui lui sont intérieures figure dans nos fonctions lagrangiennes (24′) uniquement par l'intermédiaire des quatre constantes ϖ_h et η_h, définies par les formules (19) et (22). Mettons ces constantes en évidence, en écrivant, d'après (17), $\gamma_h + \varpi_h$ au lieu de γ_{P_h}, dans les expressions (21), (25) et (26) de θ_h, $\mathfrak{M}'_h$ et Λ'_h. Il vient

$$\theta_h = -\varpi_h^2 + 2\gamma_h\eta_{h+1} + 2\varpi_h\beta_h^2 - \gamma_h^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + \\ + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d^2_{h+1}r}{dx^{0^2}},$$

$$\Lambda'_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 - \frac{1}{2}\varpi_h\beta_h^2 + \gamma_h(\varpi_h + 2\eta_{h+1}) + \Lambda_h, \tag{26'}$$

où l'on a posé

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h\right)^2 + \gamma_h\beta_h^2 - 4\gamma_h\underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 - \\ - \gamma_h^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d^2_{h+1}r}{dx^{0^2}}. \tag{27}$$

Il s'en suit, en revenant à (24′), (25′), et en y remplaçant Λ'_h par sa valeur (26′),

$$\xi_h\mathcal{L}_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\varpi_h\right)\beta_h^2 + (1 + \varpi_h + 2\eta_{h+1})\gamma_h + \Lambda_h. \tag{28}$$

Maintenant attribuons à la constante ξ_h la valeur $1 - \frac{1}{2}\varpi_h$ et divisons par ξ_h en omettant la constante purement additive $-\frac{1}{2}\varpi_h^2/\xi_h$. A des termes négligeables près, il vient

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h + \Lambda_h.$$

Ceci posé, un petit artifice, dont l'idée générale paraît remonter à M. DROSTE [1], permet, à notre ordre d'approximation, de faire disparaître le coefficient de γ_h. On n'a qu'à remplacer les masses réelles m_0, m_1 de nos deux corps par des masses fictives

$$\overset{*}{m}_h = m_h\left(1 + \frac{3}{2}\varpi_{h+1} + 2\eta_h\right) \qquad (h = 0,\ 1)\ , \qquad (29)$$

qui peuvent également s'écrire

$$\overset{*}{m}_{h+1} = m_{h+1}\left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right) \qquad (h = 0,\ 1)\ . \qquad (29')$$

Alors, en posant, conformément à (18),

$$\overset{*}{\gamma}_h = \left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h = \frac{f}{c^2}\frac{\overset{*}{m}_{h+1}}{r}\ ,$$

l'expression précédente de $\mathcal{L}_h$ prend la forme

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \overset{*}{\gamma}_h + \Lambda_h\ .$$

Dans le terme Λ_h figurent encore les γ_h; mais, comme Λ_h est du second ordre, on peut y remplacer sans erreur appréciable les γ_h par $\overset{*}{\gamma}_h$.

Après cela il n'y a qu'à supprimer les astérisques, en reprenant la désignation m_h pour les masses gravitationnelles des deux corps, telles qu'elles sont définies par (29) en fonction des masses intrinsèques. Il est bien justifié d'appeler *gravitationnelles* ces deux constantes, qui jouent absolument le même rôle des masses ordinaires, dans le problème relativiste des deux corps, en seconde approximation. Pour notre but c'est tout ce qu'il faut. Mais il convient de remarquer que ces deux constantes, tout en se comportant, même en seconde approximation, comme des masses *pour le problème des deux corps*, ont perdu le caractère intrinsèque que leur attribuait *à tout égard* la mécanique classique. Vis-à-vis d'autres questions, il faudrait sans doute apporter des petites modifications différentes, si tant est toutefois qu'on puisse encore sauver le principe d'effacement par des simples corrections des masses gravitationnelles. On doit donc, pour éviter des malen-

[1] *Loco citato* au nº 5, voir page 454.

tendus, se représenter les masses définies par (29) (et désignées ensuite, elles aussi, par m_0, m_1, en supprimant l'astérisque) comme des constantes caractéristiques du problème, possédant chacune, seulement à peu près, la propriété intrinsèque que la mécanique classique attache à la notion de masse.

9. — Les équations différentielles du problème.

Par tout ce qui précède il est acquis que le mouvement des points P_h, centres de gravité des deux corps, est défini par les fonctions lagrangiennes respectives

$$\mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \Lambda_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h + \Lambda_h\,, \quad (h = 0,\, 1)\,. \tag{I}$$

De plus Λ_h, d'après (27) et (25′), s'écrit

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\mathfrak{N}_h^2 + \frac{2\,l_0 l_1 - l_{h+1}^2}{r^2} + \frac{l_{h+1}}{r}\left(\beta_h^2 + 2\,\beta_{h+1}^2 - 4\,\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{h}} \times \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{h+1}}\right) + $$
$$+ \frac{1}{2}\,l_{h+1}\,\frac{d_{h+1}^2\, r}{dx^{0^2}}\,, \tag{II}$$

étant posé, pour abréger,

$$\frac{fm_h}{c^2} = l_h\,, \tag{30}$$

de sorte que les constantes l_0, l_1 sont des (petites) longueurs.

Il s'agirait évidemment d'expliciter les six équations

$$\frac{d}{dx^0}\,\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \beta_{h|i}} - \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial x_h^i} = 0 \qquad (h = 0,\, 1\,;\quad i = 1,\, 2,\, 3) \tag{III}$$

définissant le mouvement (absolu) des deux corps, pour passer ensuite à leur intégration dûment illustrée au point de vue géométrique et astronomique. Mais il n'est pas possible de le faire dans le cadre de cette conférence. Je dois donc me borner à quelques indications de méthode et de résultats.

Je viens de dire que les équations (III) définissent le mouvement absolu des points P_0, P_1. Cet appellatif « absolu » doit être interprété d'après le n° 5, en se rapportant par la pensée aux préliminaires de l'admission A_1). On a introduit alors des variables $x^i (i = 0, 1, 2, 3)$ *très proches* d'un quadruple quasi-cartésien, ou de LORENTZ: exactement lorentzien serait impossible, puisque l'espace-temps n'est plus quasi-euclidien. Mouvement *absolu* est tout mouvement dans un tel espace (x^1, x^2, x^3), la variable temporelle étant x^0. Pour fixer les x^i, on peut toutefois partir d'un quadruple lorentzien *quelconque.* On profitera (comme en mécanique ordinaire) de cette indétermination préalable pour supposer que le centre de gravité G du système des deux corps soit *fixe*, bien entendu *en première approximation*, ce qui signifie que, si l'on introduit la vitesse absolue $\underline{\alpha}$ (vectorielle et römerienne) de G, moyennant la position

$$m\underline{\alpha} = m_0 \underline{\beta_0} + m_1 \underline{\beta_1} \ , \tag{31}$$

où

$$m = m_0 + m_1 \ , \tag{32}$$

la valeur absolue de $\underline{\alpha}$ est nulle en première approximation, et précisément de l'ordre de β^3. Il s'en suit que dans les Λ_h il est permis de négliger $\underline{\alpha}$ sans plus, c'èst-à-dire de retenir

$$m_0 \underline{\beta_0} + m_1 \underline{\beta_1} = 0 \ . \tag{33}$$

Comme dans l'exposé traditionnel du problème des deux corps, il convient d'envisager d'abord le mouvement *relatif*, en étudiant, comme fonction de x^0, les différences

$$x^i = x_1^i - x_0^i \ , \tag{34}$$

et leurs dérivées par rapport à x^0, qui sont les composantes du vecteur

$$\underline{\beta} = \underline{\beta_1} - \underline{\beta_0} \ , \tag{35}$$

vitesse (römerienne) de P_1 par rapport à P_0.

En introduisant aussi les rapports numériques

$$\frac{m_h}{m} = \lambda_h \qquad (h = 0, 1) \ , \tag{36}$$

on tire de (33) et (35)

$$\underline{\beta_0} = -\lambda_1 \underline{\beta} \ , \qquad \underline{\beta_1} = \lambda_0 \underline{\beta} \ , \tag{37}$$

ou, si l'on préfère, en une seule formule,

$$\underline{\beta_h} = (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} \underline{\beta} \qquad (h = 0, -1) \ , \tag{37'}$$

ce qui permet de faire disparaître les vitesses absolues dans tout terme d'ordre supérieur. Bien entendu, il faut faire attention, lorsqu'il s'agit d'expressions telles que Λ_0, Λ_1 qu'on doit, pour expliciter les équations du mouvement, soumettre encore à la dérivation partielle. Evidemment, dans ces cas, les substitutions susdites peuvent être effectuées seulement *après* dérivation.

Une fois formées correctement les équations lagrangiennes provenant des $\mathcal{L}_h$, on en tire, par simple soustraction des formules homologues, les équations du mouvement relatif, contenant exclusivement les trois inconnues x^1, x^2, x^3 (et leurs dérivées). Ces équations — on peut le prévoir *a priori* et le confirmer par la simple inspection des (I) — sont bien celles de Newton avec force perturbatrice einsteinienne. L'analyse de cette dernière, en s'aidant d'une propriété remarquable d'équivalence mécanique, conduit à l'envisager comme une force centrale, qui produit l'*effet bien connu du déplacement du périhélie.* On peut espérer que l'expression quantitative de ce déplacement soit susceptible de vérification astronomique par les observations des étoiles doubles. Il s'agirait notamment de déceler la correction (vis-à-vis de la valeur einsteinienne) fournie par le calcul, lorsque la masse de la planète n'est plus négligeable par rapport à la masse du corps central.

Le résultat est, comme on le voit, très simple; les calculs sont élémentaires, mais exigent d'assez longs développements. Je me propose d'en rendre compte ailleurs. Ici je voudrais encore ajouter que, une fois intégrées les équations du mouvement relatif, on peut revenir à la vitesse absolue du centre de gravité G, qui est nulle seulement en première approximation, et dont il est bien intéressant de déterminer la seconde. On parvient de la sorte à reconnaître que le centre de gravité subit des petites fluctuations par rapport au repère des x^1, x^2, x^3, repère qui correspond à un trièdre galiléen de l'ancienne Mécanique. Ces fluctuations se laissent évaluer par de simples quadratures. De telles quadratures introduisent des termes séculaires, sur lesquels on devra surtout fixer l'attention en vue des chances de possible contrôle astronomique.