Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1935)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES POINTS ESSENTIELS DE LA MÉTAMATHÉMATIQUE

Autor: Bernays, P.

Kapitel: II. — Les démonstrations de non-contradiction se rattachant à l'axiome du .

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26603

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

nue suffisante pour démontrer la non-contradiction sans qu'il faille pour cela démontrer la non-contradiction de l'arithmétique.

En particulier, nous reconnaissons de cette manière la non-contradiction de la géométrie axiomatique, à l'exception des axiomes de la continuité, tous les autres axiomes étant des axiomes propres. (Quant à l'axiome d'Archimède, c'est une affirmation existentielle se rapportant aux nombres entiers, alors que les nombres ne font pas partie d'un domaine d'individus de la géométrie axiomatique; ce n'est donc pas un axiome propre.) La méthode s'applique aussi à la géométrie non-euclidienne.

Cependant il faut se rendre compte que cette manière de traiter la question de la non-contradiction ne regarde que les raisonnements exprimables par le calcul logique ordinaire, c'est-à-dire ceux de la logique du premier ordre, où n'interviennent pas des notions générales comme celle d'un nombre quelconque, celle d'une fonction quelconque ou celle d'un ensemble quelconque. Ce n'est donc que dans un sens restreint que la non-contradiction est démontrée par cette méthode.

II. — Les démonstrations de non-contradiction se rattachant à l'axiome du ε.

Les recherches tendant à la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique se faisant par étapes, le formalisme arithmétique qui s'offre comme le premier objet de la recherche est celui de la théorie axiomatique des nombres.

Ce formalisme est constitué des éléments suivants:

1° le calcul logique ordinaire;

2° le signe de l'égalité avec les axiomes

$$a = a$$
$$a = b \longrightarrow (\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(b)) \ ;$$

3° le symbole 0 et le symbole ′ représentant le passage d'un nombre au suivant, pour lesquels on a les axiomes de Peano

$$a' \neq 0$$
$$a' = b' \longrightarrow a = b$$
$$\mathrm{A}(0) \ \& \ (x)(\mathrm{A}(x) \longrightarrow \mathrm{A}(x')) \longrightarrow \mathrm{A}(a) \ ,$$

le dernier représentant le principe de l'induction complète;

4° les symboles de la somme et du produit $+$, $\cdot$, avec les équations récurrentes

$$a + 0 = a \qquad\qquad a \cdot 0 = 0$$
$$a + b' = (a + b)' \qquad\qquad a \cdot b' = a \cdot b + a \ .$$

A propos de cette énumération faisons quelques remarques:

α) L'axiome

$$a = b \longrightarrow (\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(b))$$

peut être remplacé par les deux axiomes plus spéciaux

$$a = b \longrightarrow (a = c \longrightarrow b = c) \ ,$$
$$a = b \longrightarrow a' = b' \ .$$

β) Le principe de l'induction complète peut être formalisé aussi par le schéma

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(0)\\ \mathfrak{A}(n) \longrightarrow \mathfrak{A}(n')\end{array}}{\mathfrak{A}(a)} \ .$$

γ) On peut généralement éviter les variables de propositions et de prédicats en remplaçant chaque formule initiale contenant une telle variable par un schéma correspondant. Par exemple la formule

$$a = b \longrightarrow (\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(b))$$

peut être remplacée par le schéma

$$a = b \longrightarrow (\mathfrak{A}(a) \longrightarrow \mathfrak{A}(b)) \ ,$$

indiquant des formules d'une certaine forme qui peuvent servir de formules initiales [1].

δ) Au lieu des variables libres d'individus, comme a, b, on pourrait dans les axiomes mettre des variables liées par des signes de généralité. Par exemple la formule

$$a = a$$

pourrait être remplacée par

$$(x)\,(x = x) \ .$$

[1] La lettre $\mathfrak{A}$ (.) indique une formule quelconque (du formalisme considéré) contenant un argument, tandis que A (.) est une variable de prédicat appartenant elle-même au formalisme.

ε) Les équations récurrentes sont appelées ordinairement définitions récurrentes; mais il faut se rendre compte que ce ne sont pas des définitions nominales.

Le formalisme indiqué suffit pour représenter et déduire les relations de la théorie des nombres. Mais il y a encore une lacune en ceci qu'on ne peut pas représenter directement les fonctions arithmétiques, mais seulement les prédicats correspondants. Par exemple on n'obtient pas une expression pour le plus grand diviseur commun de a et b (fonction de deux arguments), mais seulement pour le prédicat correspondant « le plus grand diviseur commun de a et b est égal à c » (prédicat de trois sujets).

Pour exprimer les fonctions arithmétiques, il faut ajouter au symbolisme du calcul logique un symbole $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, représentant la notion « celui qui », avec la règle suivante (« règle du ι »):

Si pour une formule $\mathfrak{A}(c)$ on a déduit

$$(\mathrm{E}x)\ \mathfrak{A}(x) \tag{1}$$

et

$$(x)\,(y)\,(\mathfrak{A}(x)\ \&\ \mathfrak{A}(y) \longrightarrow x = y)\ , \tag{2}$$

alors on peut introduire l'expression

$$\iota_x \mathfrak{A}(x)$$

(représentant l'individu unique ξ, pour lequel $\mathfrak{A}(\xi)$ est valable); et on a

$$\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x))\ .$$

Cette règle comprend aussi le cas où la formule $\mathfrak{A}(c)$ contient outre la variable c d'autres variables comme paramètres; l'expression $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ représente alors une fonction de ces paramètres.

A l'aide de la règle du ι et du principe de l'induction complète on parvient à introduire, par une définition nominale, un symbole, écrivons-le $\mu_x \mathrm{A}(x)$, contenant un prédicat variable, représentant ou le plus petit nombre n, pour lequel $\mathrm{A}(n)$ est vrai s'il y a un tel nombre, ou autrement le nombre nul. Au moyen de ce symbole nous obtenons les expressions des fonctions arithmétiques.

La question de la non-contradiction posée pour notre formalisme complété par l'introduction de la règle du ι peut être rame-

née à celle concernant le formalisme antérieur. La réduction se fait en démontrant que l'application de la règle du ι peut être éliminée. Cette démonstration part de la remarque suivante faite déjà par Russell et Whitehead: Si pour un prédicat représenté par une formule $\mathfrak{A}(c)$ les conditions (1), (2) sont remplies, alors une affirmation $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ (« l'individu qui a la propriété $\mathfrak{A}(.)$, a aussi la propriété $\mathfrak{B}(.)$ ») peut être remplacée par

$$(x)\,(\mathfrak{A}(x) \longrightarrow \mathfrak{B}(x))\,,$$

et aussi par

$$(\mathrm{E}x)\,(\mathfrak{A}(x) \quad \& \quad \mathfrak{B}(x))\,.$$

Il s'agit ensuite de prouver que par ce remplacement, éloignant les expressions de la forme $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, une déduction ne change que d'une manière telle qu'on en puisse regagner une déduction en ajoutant certains passages, dans lesquels la règle du ι n'intervient pas. On peut le démontrer, bien que la preuve en soit un peu pénible.

Mais ce n'est pas de cette manière que M. Hilbert a procédé. M. Hilbert a introduit dès le commencement le symbole $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ avec l'axiome

$$\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(\varepsilon_x \mathrm{A}(x)) \qquad (\text{« axiome du } \varepsilon \text{»})$$

Cela revient à une généralisation du symbole $\mu_x \mathrm{A}(x)$ au delà de la théorie des nombres.

Je veux montrer ici, comment on peut passer de la règle du ι à l'axiome du ε. Le passage se fait en deux pas. D'abord nous omettons de la règle du ι la deuxième des conditions (1), (2) de l'introduction du symbole $\iota_x \mathfrak{A}(x)$. La règle ainsi modifiée permet d'introduire pour chaque prédicat $\mathfrak{A}(c)$, valable pour au moins un individu, un symbole représentant « un certain x, pour lequel $\mathfrak{A}(x)$ ». Soit $\eta_x \mathfrak{A}(x)$ ce symbole, alors la règle nouvelle peut être indiquée brièvement par le schéma

$$\frac{(\mathrm{E}x)\,\mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{A}(\eta_x \mathfrak{A}(x))}\,.$$

De ce schéma nous faisons maintenant une application spéciale. Prenons pour $\mathfrak{A}(c)$ l'expression

$$(\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(c)\;;$$

alors $(\mathrm{E}x)\ \mathfrak{A}(x)$ devient

$$(\mathrm{E}x)\ (\,(\mathrm{E}y)\ \mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\,)\ .$$

Cette formule peut être déduite par le calcul logique ordinaire; donc nous pouvons introduire

$$\eta_x\,(\,(\mathrm{E}y)\ \mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\,)\ ,$$

et en nous servant de l'abréviation $\varepsilon_x\ \mathrm{A}(x)$ définie par l'équation

$$\varepsilon_x\,\mathrm{A}(x) = \eta_x\,(\,(\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(x)\,)\ ,$$

nous obtenons suivant notre schéma la formule

$$(\mathrm{E}y)\,\mathrm{A}(y) \longrightarrow \mathrm{A}(\varepsilon_x\mathrm{A}(x))\ ;$$

or celle-ci est équivalente, d'après le calcul logique, à

$$\mathrm{A}(a) \longrightarrow \mathrm{A}(\varepsilon_x\mathrm{A}(x))\ ,$$

ce qui est l'axiome du ε.

De cette réduction résulte aussi les formules

$$(\mathrm{E}x)\,\mathrm{A}(x) \rightleftarrows \mathrm{A}(\varepsilon_x\mathrm{A}(x))$$

$$(x)\,\mathrm{A}(x) \rightleftarrows \mathrm{A}(\varepsilon_x\overline{\mathrm{A}(x)})$$

($\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ indique le couple des deux formules

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}\ ,\quad \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A})\ .$$

Par ces formules, un changement du formalisme nous est suggéré; en effet, on peut les regarder comme des définitions exprimant l'existence et la généralité au moyen du symbole ε. De plus il se montre que si nous acceptons ce point de vue, tout le calcul concernant la généralité et l'existence se fait par l'application de l'axiome du ε et de la règle qu'une expression $\varepsilon_x\,\mathfrak{A}(x)$ peut être substituée à une variable d'individus.

On peut donc éliminer du tout les signes (x), $(\mathrm{E}x)$ et on ne retient aucun autre schéma logique que celui du « modus ponens »

$$\frac{\mathfrak{S} \qquad \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

le reste du calcul logique se faisant par des formules initiales, des répétitions et des substitutions.

(Quant à l'axiome de l'induction complète, il peut être remplacé, au moyen du symbole ε, par la formule suivante

$$\varepsilon_x \mathrm{A}(x) = b' \longrightarrow \overline{\mathrm{A}(b)} \ ;$$

celle-ci exprime que, pour un prédicat $\mathfrak{A}(c)$ quelconque, le nombre représenté par $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ ou bien est égal à zéro ou bien succède à un nombre b pour lequel $\mathfrak{A}(b)$ est faux.)

Il est vrai que cette façon de manier le calcul logique n'est pas avantageuse pour les déductions effectives, mais pour les considérations métamathématiques elle apporte une certaine simplification.

C'est le formalisme ainsi modifié de la théorie axiomatique des nombres dont M. Hilbert s'est appliqué à prouver la non-contradiction. Il a saisi le problème par deux méthodes qui ont été poursuivies plus loin, l'une par M. Ackermann et M. von Neumann [1], l'autre par M. Ackermann. Mais on ne parvient par ces méthodes à démontrer la non-contradiction que pour un formalisme restreint. En effet, il faut faire une restriction à l'égard de l'axiome de l'induction complète (représenté ou par une formule ou par le schéma). Par exemple, c'est une restriction suffisante que l'induction complète ne soit appliquée qu'à des formules élémentaires (ne contenant pas de variables liées).

Donc les démonstrations attachées à l'axiome du ε ne nous ont pas conduit à reconnaître la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres.

Cependant la deuxième des dites méthodes de M. Hilbert nous fournit une démonstration assez simple et naturelle du théorème mentionné de Herbrand. D'autre part, de ce théorème découle comme Herbrand l'a montré [2], la non-contradiction du formalisme restreint qui dérive de celui de la théorie axiomatique des nombres par la restriction indiquée tantôt. (Ce résultat n'équivaut pas à celui de Ackermann et von Neumann parce que le formalisme du ε n'y est pas enfermé.)

---

[1] Le formalisme traité par von Neumann est un peu plus général que celui de MM. Hilbert et Ackermann; cette différence n'est pas considérable; mais il y a aussi une différence dans la manière de procéder entre M. Ackermann et M. von Neumann.

[2] Une autre démonstration de ce fait a été donnée récemment par M. Gentzen.