

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE DÉMONSTRATION CLASSIQUE1 DE LA TRANSCENDANCE DU NOMBRE e
Autor: Fiala, F. / Besse, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26617>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR UNE DÉMONSTRATION CLASSIQUE¹ DE LA TRANSCENDANCE DU NOMBRE e

PAR

F. FIALA et J. BESSE (Zurich).

1. — Dans ses recherches sur la fonction exponentielle, HERMITE² donne deux démonstrations de la transcendance de e , à savoir qu'une expression de la forme

$$N + N_1 e^a + N_2 e^b + \dots + N_n e^h \quad (1)$$

ne peut pas être égale à zéro, a, b, \dots, h , étant des nombres entiers, $0 < a < b < \dots < h$, et N, N_1, N_2, \dots, N_n , des nombres entiers, non tous nuls.

Le but de ce travail est de rendre plus rigoureuse la première de ces démonstrations tout en la simplifiant (§ 4 et 5).

2. — Rappelons-en sommairement le début et posons

$$f(z) = z(z - a)(z - b) \dots (z - h) , \quad (2)$$

$$F(z) = \frac{[f(z)]^{\mu}}{\mu !} , \quad (3)$$

$$\mathcal{F}(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \dots . \quad (4)$$

On vérifie aisément en intégrant par parties que

$$\mathcal{F}(0) e^t = \mathcal{F}(t) + e^t \int_0^t e^{-z} F(z) dz = \mathcal{F}(t) + \varepsilon_t . \quad (5)$$

¹ Ce travail a été présenté au séminaire mathématique de l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich, semestre d'été 1935.

² Ch. HERMITE, *Oeuvres*, publiées par E. Picard, t. III, 1912, p. 150-181.

On prend successivement $t = 0, a, b, \dots, h$.

En multipliant la première égalité par N , la deuxième par N_1 , ..., la $(n + 1)$ ième par N_n et en additionnant, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}(o) (N + N_1 e^a + N_2 e^b + \dots + N_n e^h) \\
&= N \mathcal{F}(o) + N_1 \mathcal{F}(a) + N_2 \mathcal{F}(b) + \dots + N_n \mathcal{F}(h) \\
&\quad + N_1 \varepsilon_a + N_2 \varepsilon_b + \dots + N_n \varepsilon_h.
\end{aligned} \tag{6}$$

Il est facile de voir que

- 1^o $F(o), F(a), \dots, F(h)$ sont entiers et avec eux la première ligne du second membre,
 - 2^o $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \dots, \varepsilon_n$ sont arbitrairement petits et avec eux la deuxième ligne du second membre, dès que μ est suffisamment grand.

La démonstration sera achevée si nous montrons que la première ligne du second membre est différente de 0, pour certains μ suffisamment grands. En effet, la somme d'un nombre entier différent de 0 et d'un nombre arbitrairement petit est différente de 0.

3. — Pour mettre en évidence l'exposant μ qui apparaît dans (3), nous remplaçons $F(z)$ par $F_\mu(z)$ et $\mathcal{F}(z)$ par $\mathcal{F}_\mu(z)$ en posant

$$F_\mu(z) = \frac{[f(z)]^\mu}{\mu!}$$

et

$$\mathcal{F}_\mu(z) = F_\mu(z) + F'_\mu(z) + F''_\mu(z) + \dots$$

Prenons pour μ les $n + 1$ valeurs $\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + n$ et considérons le système des $n + 1$ équations linéaires homogènes

$$N\mathcal{F}_\mu(o) + N_1\mathcal{F}_\mu(a) + \dots + N_n\mathcal{F}_\mu(h) = 0,$$

$$N_{\mathcal{F}_{u+1}}(o) + N_1 \mathcal{F}_{u+1}(a) + \dots + N_n \mathcal{F}_{u+1}(h) = 0,$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$N_{\mathcal{F}_{n+p}}(o) + N_1 \mathcal{F}_{n+p}(a) + \dots + N_p \mathcal{F}_{n+p}(h) = 0.$$

Une au moins de ces relations sera impossible, si nous pouvons montrer que le déterminant

$$\Delta_{\mu}^* = \begin{vmatrix} \mathcal{F}_{\mu}(o) & \mathcal{F}_{\mu}(a) & \dots & \mathcal{F}_{\mu}(h) \\ \mathcal{F}_{\mu+1}(o) & \mathcal{F}_{\mu+1}(a) & \dots & \mathcal{F}_{\mu+1}(h) \\ \vdots & \vdots & & \\ \mathcal{F}_{\mu+n}(o) & \mathcal{F}_{\mu+n}(a) & \dots & \mathcal{F}_{\mu+n}(h) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, le système ne possédant alors que la solution triviale $N = N_1 = \dots = N_n = 0$, que nous avons exclue par hypothèse.

On calcule la valeur de $\mathcal{F}_{\mu}(c)$ en intégrant de c à ∞ la relation

$$\begin{aligned} [e^{-z} \mathcal{F}_{\mu}(z)]' &= -e^{-z} F_{\mu}(z) \\ \mathcal{F}_{\mu}(c) &= e^c \int_c^{\infty} e^{-z} F_{\mu}(z) dz. \quad (c = 0, a, b, \dots, h) \end{aligned}$$

En mettant dans chaque ligne de Δ_{μ}^* , $\frac{1}{\mu!}, \frac{1}{(\mu+1)!}, \dots, \frac{1}{(\mu+n)!}$ en évidence et dans chaque colonne l'exponentielle correspondante, puis en soustrayant de chaque colonne la suivante, on est conduit au déterminant

$$\Delta_{\mu} = \begin{vmatrix} \int_0^a e^{-z} f^{\mu} dz & \int_a^b e^{-z} f^{\mu} dz & \dots & \int_g^h e^{-z} f^{\mu} dz & \int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu} dz \\ \int_0^a e^{-z} f^{\mu+1} dz & \int_a^b e^{-z} f^{\mu+1} dz & \dots & \int_g^h e^{-z} f^{\mu+1} dz & \int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu+1} dz \\ \vdots & & & & \\ \int_0^a e^{-z} f^{\mu+n} dz & \int_a^b e^{-z} f^{\mu+n} dz & \dots & \int_g^h e^{-z} f^{\mu+n} dz & \int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu+n} dz \end{vmatrix}$$

C'est ce déterminant que nous allons montrer être différent de 0.

4. — Hermite en évalue asymptotiquement les termes (pour μ très grand) à l'aide de la méthode de Laplace. Plus simplement

et tout à fait rigoureusement, nous nous servirons du théorème suivant¹:

$\varphi(x)$ et $f(x)$ étant deux fonctions continues, dont aucune ne change de signe à l'intérieur de l'intervalle fini ou infini (a, b) et $\varphi(x)[f(x)]^n$ y étant intégrable pour tout $n > n_0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^{n+1} dx}{\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx} = M,$$

où M est la borne supérieure ou inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) , selon que $f(x)$ y est positif ou négatif.

Divisons chacune des n premières colonnes de Δ_μ par son premier terme et la $(n+1)$ ième par son dernier terme. On reconnaît facilement qu'on peut appliquer la formule précédente au polynôme

$$f(z) = z(z-a)(z-b) \dots (z-h)$$

qui, ainsi que sa dérivée, n'a que des racines réelles.

Nous aurons

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\Delta_\mu}{\int_0^a e^{-z} f^\mu dz \cdot \int_a^b e^{-z} f^\mu dz \cdot \int_g^h e^{-z} f^\mu dz \cdot \int_h^\infty e^{-z} f^{\mu+n} dz} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ f(p) & f(q) & \dots & f(s) & 0 \\ [f(p)]^2 & [f(q)]^2 & \dots & [f(s)]^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ [f(p)]^n & [f(q)]^n & \dots & [f(s)]^n & 1 \end{vmatrix}$$

où p, q, \dots, s désignent les abscisses des maxima du module de $f(z)$ dans chacun des intervalles, $0 < p < a, a < q < b, \dots, g < s < h$; $f(z)$ n'étant pas bornée supérieurement dans l'intervalle (h, ∞) , il apparaît des zéros dans la dernière colonne.

Si cette limite est différente de 0, il y aura un μ_0 à partir duquel ($\mu > \mu_0$) Δ_μ sera différent de 0.

¹ Voir POLYA et SZEGÖ, *Aufgaben aus der Analysis*, tome I, 2^{me} section, n° 199, p. 78 et 243, où le théorème est attribué à CSILLAG.

5. — Cette limite est le déterminant de Vandermonde des quantités $f(p), f(q), \dots, f(s)$, différent de 0 dès que ces quantités sont toutes différentes entre elles, ce que nous ne saurions affirmer *a priori*. Hermite prétend qu'elles le sont « en général »¹.

Examinons par exemple le cas où $a = 1, b = 2, \dots, h = n$ (n impair) et faisons la substitution $z = t + \frac{n}{2}$,

$$f(z) = z(z - 1)(z - 2) \dots (z - n)$$

devient

$$f\left(t + \frac{n}{2}\right) = f^*(t)$$

$$= \left(t + \frac{n}{2}\right)\left(t + \frac{n}{2} - 1\right) \dots \left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) \dots \left(t - \frac{n}{2} + 1\right)\left(t - \frac{n}{2}\right).$$

C'est une fonction paire, $f^*(-t) = f^*(t)$, et deux valeurs extrêmes de $f^*(t)$ symétriques par rapport à la droite $t = 0$ sont égales.

Ce cas échappe à l'affirmation générale d'Hermite.

Mais nous n'avons jamais supposé les N, N_1, \dots, N_n , tous différents de 0, ce qui heureusement nous permet de ramener le cas général au suivant:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad \dots, \quad h = 2k \quad (k \text{ entier}).$$

Appliquons de nouveau la substitution $z = t + k$;

$$f^*(t) = (t + k)(t + k - 1) \dots (t + 1)t(t - 1) \dots (t - k + 1)(t - k)$$

est une fonction impaire $f^*(-t) = -f^*(t)$ dont les valeurs extrêmes symétriques par rapport à la droite $t = 0$ sont égales en module, mais de signe contraire. D'autre part, le module des

¹ « Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p), Q = f(q), \dots$ fonctions entières semblables des racines p, q, \dots de l'équation dérivée $f'(x) = 0$ seront comme ces racines différentes entre elles. » (HERMITE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome 77, p. 77, Paris, 1873).

valeurs extrêmes de $f^*(t)$ dans chacun des intervalles croît avec la valeur absolue de t . On le voit à l'aide de la formule

$$\frac{f^*(t+1)}{f^*(t)} = \frac{(t+k+1)(t+k) \dots (t-k+1)}{(t+k) \dots (t-k+1)(t-k)} = \frac{t+k+1}{t-k}$$

et pour $0 < t < k$, t non entier

$$\frac{|f^*(t+1)|}{|f^*(t)|} = \frac{k+1+t}{k-t} > 1.$$

Tous les $f(p), f(q), \dots, f(s)$ sont donc différents entre eux.

C'est ce qu'il fallait démontrer pour prouver rigoureusement la transcendance de e par cette méthode.

6. — On reconnaît d'ailleurs dans la fonction $f^*(t)$ que nous venons d'étudier un produit partiel, à un facteur indépendant de t près, du développement de $\sin \pi t$ en produit infini, car on peut mettre $f^*(t)$ sous la forme

$$t(t^2 - 1)(t^2 - 2^2)(t^2 - 3^2) \dots (t^2 - k^2).$$

On voit donc qu'un produit partiel quelconque est formé d'oscillations dans chacun des intervalles $-k \leq i \leq t \leq i+1 \leq k$ (i entier), oscillations dont l'amplitude croît à mesure qu'on s'éloigne de l'origine.

C'est seulement à la limite qu'on obtient la courbe sinus à oscillations régulières.