X étant une fonction de la seule variable x, car il suffit de faire ensuite

$$x' = -\int \frac{dx}{X}$$

pour obtenir l'équation de la chaleur.

L'examen de ce cas fait l'objet de la première partie de cette étude.

Un autre cas intéressant est celui où l'équation parabolique donnée peut prendre la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Comme nous le montrerons dans la Seconde partie il sera bien souvent possible d'obtenir des solutions particulières d'une équation de cette forme.

I. — Les équations du type parabolique réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + X \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

1. — Soient $z(x, y)$ et $f(x, y)$ deux fonctions des deux variables x et y. Nous désignerons par $Z(z)$ la fonction de x et y définie par

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} . \tag{1}$$

L'opération Z possède évidemment les propriétés suivantes:

$$Z(y) = 0 , \tag{2}$$

$$Z(x) = f(x, y) , \tag{3}$$

$$Z(X) = fX' , \tag{4}$$

où X désigne une fonction de x seul.

De même

$$Z(Y) = Y'' ,$$

$$Z(AB) = AZ(B) + BZ(A) + 2A_y B_y . \tag{5}$$

En particulier, si B est fonction de x seul

$$Z(AB) = AZ(B) + BZ(A) . \tag{5'}$$

Dans la suite nous aurons besoin de $Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right)$. On montre facilement que

$$Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{4} f^{-\frac{5}{2}} f_y^2 - \frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} f_{yy} - \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f_x . \tag{6}$$

2. — *Application.* — Dans une précédente étude [1] nous avons montré que la condition pour que l'équation

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1'}$$

puisse être ramenée à une équation de la même forme mais dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$ dépend de la seule variable x est que l'expression

$$f^{-3}\left(3 f_y^2 - 2 f f_{yy} - 2 f^2 f_x\right)$$

soit fonction de x seul, ce que l'on peut écrire, d'après (6),

$$f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{X'}{X} , \tag{7}$$

ou encore

$$XZ\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) + X' f^{\frac{1}{2}} = 0 .$$

Or il résulte de (5′) et de (4) que cette équation s'écrit

$$Z\left(Xf^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \tag{7'}$$

et alors l'équation (1′) pourra être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{X^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1''}$$

par un changement convenable [2] de la variable y

$$y' = \mu(x, y) .$$

---

[1] Lignes asymptotiques et Equation de la Chaleur (*L'Enseignement math.*, 1934).
[2] Loc. cit. (1re partie).

Si l'on a, en particulier,

$$Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \ .$$

c'est que $X' = 0$, $X = \text{cte}$ et le changement de variable considéré conduira directement à l'équation de la chaleur.

Théorème I. — En résumé *pour que l'équation* (1′) *soit réductible à l'équation de la chaleur il suffit qu'on sache déterminer une fonction* X *de* x *telle que* $Xf^{-\frac{1}{2}}$ *soit une solution de cette équation* (1′).

3. — Les deux équations (7) et (7′) sont équivalentes. Explicitons la première en posant $f^{-\frac{1}{2}} = u$. Elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{X'}{X}u^{-1} = 0 \ . \tag{8}$$

Développons de même (7′) en posant $Xf^{-\frac{1}{2}} = v$. Elle s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{X^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ ,$$

puisque $f(x, y) = \dfrac{X^2}{v^2}$.

Si l'on fait, dans cette dernière $x' = \displaystyle\int \frac{dx}{X^2}$ nous aurons

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x'} = 0 \ . \tag{8'}$$

Théorème II. — Il résulte de ce qui précède que *l'intégration de l'équation du second ordre* [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = F(x)\,u^{-1} \tag{9}$$

se ramène à l'intégration de l'équation de même forme mais dépourvue de second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ . \tag{9'}$$

[1] On peut même prendre (9) sous la forme plus générale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{G(x)}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = F(x)\,u^{-1} \ .$$

THÉORÈME III. — *On connaîtra donc toutes les équations de la forme* (1′) *réductibles à l'équation de la chaleur par un changement de variables si l'on sait intégrer l'équation* (9′). *A toute solution de l'équation* (9′) *correspondra ainsi une équation* (1′) *réductible à l'équation de la chaleur* et qu'il sera aisé de former.

Inversement, supposons connue une solution de l'équation de la chaleur. En substituant à la variable y cette solution, l'équation de la chaleur se présentera sous la forme (1′), la fonction f qui figure dans cette dernière possédant la propriété suivante: à un facteur près, fonction de x seul, $f^{-\frac{1}{2}}$ est solution de (9′). Ceci est une conséquence presque évidente des résultats déjà obtenus. On peut d'ailleurs en donner une vérification directe comme suit:

Soit $\mu(x, y) = y'$ une solution de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \,. \tag{α}$$

Si on fait le changement de variables $y' = \mu(x, y)$, x étant conservé, (α) devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + \frac{1}{\mu_y^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \,. \tag{β}$$

Montrons que $\lambda = \mu_y$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \,. \tag{γ}$$

On suppose évidemment que λ a été exprimé en fonction de x et y'.

La relation $dy' = \mu_x\, dx + \mu_y\, dy$ donne

$$dy = \frac{1}{\mu_y} dy' - \frac{\mu_x}{\mu_y} dx \,,$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{1}{\mu_y}\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\mu_x}{\mu_y} \,.$$

Donc

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y'} = \frac{\mu_{yy}}{\mu_y}, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y'^2} = \frac{\mu_y \mu_{yyy} - \mu_{yy}^2}{\mu_y^3},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \mu_{xy} - \mu_{yy} \frac{\mu_x}{\mu_y} = \frac{\mu_y \mu_{xy} - \mu_x \mu_{yy}}{\mu_y}.$$

Si l'on écrit que λ vérifie l'équation (γ) on devra avoir

$$\mu_y \mu_{yyy} - \mu_{yy}^2 + \mu_y \mu_{xy} - \mu_x \mu_{yy} = 0$$

ou bien

$$\mu_y \frac{\partial}{\partial y}(\mu_{yy} + \mu_x) - \mu_{yy}(\mu_{yy} + \mu_x) = 0,$$

ce qui est bien vérifié puisqu'on suppose que $\mu(x, y)$ est solution de (α).

Théorème IV. — Donc: *A toute solution de l'équation de la chaleur correspond une solution de l'équation* (9').

En un mot:

Théorème V. — *L'intégration de l'équation de la chaleur et l'intégration de l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *constituent deux problèmes équivalents, la connaissance d'une solution de l'une entraînant nécessairement la connaissance d'une solution de l'autre.*

4. — Aux considérations précédentes se rattachent d'intéressantes applications géométriques. Une famille de courbes Γ étant donnée dans le plan *xoy* la détermination des surfaces admettant un système d'asymptotiques (ou une famille de géodésiques) dont les projections sur le plan *xoy* sont les courbes Γ conduit à une équation du second ordre du type parabolique. Un cas important est celui où cette dernière peut être ramenée à l'équation de la Chaleur.

Sur le premier de ces problèmes on pourra consulter mon travail déjà cité *(Lignes asymptotiques et Equation de la Chaleur)*.

J'ai consacré également une étude au second, et j'ai établi que, sous certaine condition à remplir par les courbes Γ, la solution dépendrait de l'intégration de l'équation (9') donc, en dernière analyse, de l'équation de la Chaleur.