Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1935)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE DU TYPE PARABOLIQUE

Autor: Guigue, René

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26616

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE DU TYPE PARABOLIQUE

PAR

René GUIGUE (Bonneville).

On sait le grand parti que l'on peut tirer de la connaissance de solutions particulières pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Par des procédés assez variés (par exemple par des quadratures par rapport aux paramètres arbitraires dont dépendent ces solutions particulières) on généralise ces solutions particulières de l'équation, les intégrales à obtenir étant astreintes à certaines conditions imposées d'avance par la nature du problème régi par l'équation à étudier. Ce sont ces intégrales qui jouent en général le rôle le plus important en Physique mathématique.

L'exemple le plus remarquable des importants résultats obtenus par cette voie est l'application qui en a été faite à l'équation classique de la chaleur.

Ceci explique l'intérêt qu'il y aurait à ramener, au moins toutes les fois où cela sera possible, une équation du type parabolique prise sous la forme générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

à une équation de même forme dont on saura former des solutions particulières dépendant de constantes arbitraires. Un premier cas important est celui où cette équation peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + X\frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

X étant une fonction de la seule variable x, car il suffit de faire ensuite

$$x' = -\int \frac{dx}{X}$$

pour obtenir l'équation de la chaleur.

L'examen de ce cas fait l'objet de la première partie de cette étude.

Un autre cas intéressant est celui où l'équation parabolique donnée peut prendre la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Comme nous le montrerons dans la Seconde partie il sera bien souvent possible d'obtenir des solutions particulières d'une équation de cette forme.

I. — Les équations du type parabolique réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + X \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

1. — Soient $z(x, y)$ et $f(x, y)$ deux fonctions des deux variables x et y. Nous désignerons par $Z(z)$ la fonction de x et y définie par

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} . \tag{1}$$

L'opération Z possède évidemment les propriétés suivantes:

$$Z(y) = 0 , \tag{2}$$

$$Z(x) = f(x, y) , \tag{3}$$

$$Z(X) = fX' , \tag{4}$$

où X désigne une fonction de x seul.

De même

$$Z(Y) = Y'' ,$$

$$Z(AB) = AZ(B) + BZ(A) + 2A_y B_y . \tag{5}$$

En particulier, si B est fonction de x seul

$$Z(AB) = AZ(B) + BZ(A) . \tag{5'}$$

Dans la suite nous aurons besoin de $Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right)$. On montre facilement que

$$Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{4} f^{-\frac{5}{2}} f^2 - \frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} f_{yy} - \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f_x . \tag{6}$$

2. — *Application.* — Dans une précédente étude [1] nous avons montré que la condition pour que l'équation

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1'}$$

puisse être ramenée à une équation de la même forme mais dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$ dépend de la seule variable x est que l'expression

$$f^{-3}\left(3 f_y^2 - 2 f f_{yy} - 2 f^2 f_x\right)$$

soit fonction de x seul, ce que l'on peut écrire, d'après (6),

$$f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{X'}{X} , \tag{7}$$

ou encore

$$XZ\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) + X' f^{\frac{1}{2}} = 0 .$$

Or il résulte de (5') et de (4) que cette équation s'écrit

$$Z\left(X f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \tag{7'}$$

et alors l'équation (1') pourra être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{X^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1''}$$

par un changement convenable [2] de la variable y

$$y' = \mu(x, y) .$$

---

[1] Lignes asymptotiques et Equation de la Chaleur (*L'Enseignement math.*, 1934).
[2] Loc. cit. (1re partie).

Si l'on a, en particulier,

$$Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 .$$

c'est que $X' = 0$, $X = $ cte et le changement de variable considéré conduira directement à l'équation de la chaleur.

Théorème I. — En résumé *pour que l'équation* (1') *soit réductible à l'équation de la chaleur il suffit qu'on sache déterminer une fonction* X *de* x *telle que* $Xf^{-\frac{1}{2}}$ *soit une solution de cette équation* (1').

3. — Les deux équations (7) et (7') sont équivalentes. Explicitons la première en posant $f^{-\frac{1}{2}} = u$. Elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{X'}{X} u^{-1} = 0 . \tag{8}$$

Développons de même (7') en posant $Xf^{-\frac{1}{2}} = v$. Elle s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{X^2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 ,$$

puisque $f(x, y) = \frac{X^2}{v^2}$.

Si l'on fait, dans cette dernière $x' = \int \frac{dx}{X^2}$ nous aurons

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x'} = 0 . \tag{8'}$$

Théorème II. — Il résulte de ce qui précède que *l'intégration de l'équation du second ordre* [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = F(x)\, u^{-1} \tag{9}$$

se ramène à l'intégration de l'équation de même forme mais dépourvue de second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{9'}$$

[1] On peut même prendre (9) sous la forme plus générale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{G(x)}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = F(x)\, u^{-1} .$$

THÉORÈME III. — *On connaîtra donc toutes les équations de la forme* (1′) *réductibles à l'équation de la chaleur par un changement de variables si l'on sait intégrer l'équation* (9′). *A toute solution de l'équation* (9′) *correspondra ainsi une équation* (1′) *réductible à l'équation de la chaleur* et qu'il sera aisé de former.

Inversement, supposons connue une solution de l'équation de la chaleur. En substituant à la variable y cette solution, l'équation de la chaleur se présentera sous la forme (1′), la fonction f qui figure dans cette dernière possédant la propriété suivante: à un facteur près, fonction de x seul, $f^{-\frac{1}{2}}$ est solution de (9′). Ceci est une conséquence presque évidente des résultats déjà obtenus. On peut d'ailleurs en donner une vérification directe comme suit:

Soit $\mu(x, y) = y'$ une solution de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 . \tag{α}$$

Si on fait le changement de variables $y' = \mu(x, y)$, x étant conservé, (α) devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + \frac{1}{\mu_y^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 . \tag{β}$$

Montrons que $\lambda = \mu_y$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{γ}$$

On suppose évidemment que λ a été exprimé en fonction de x et y'.

La relation $dy' = \mu_x\, dx + \mu_y\, dy$ donne

$$dy = \frac{1}{\mu_y} dy' - \frac{\mu_x}{\mu_y} dx ,$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{1}{\mu_y} , \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\mu_x}{\mu_y} .$$

Donc

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y'} = \frac{\mu_{yy}}{\mu_y}, \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y'^2} = \frac{\mu_y \mu_{yyy} - \mu_{yy}^2}{\mu_y^3},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \mu_{xy} - \mu_{yy} \frac{\mu_x}{\mu_y} = \frac{\mu_y \mu_{xy} - \mu_x \mu_{yy}}{\mu_y}.$$

Si l'on écrit que λ vérifie l'équation (γ) on devra avoir

$$\mu_y \mu_{yyy} - \mu_{yy}^2 + \mu_y \mu_{xy} - \mu_x \mu_{yy} = 0$$

ou bien

$$\mu_y \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{yy} + \mu_x) - \mu_{yy} (\mu_{yy} + \mu_x) = 0,$$

ce qui est bien vérifié puisqu'on suppose que $\mu(x, y)$ est solution de (α).

THÉORÈME IV. — DONC: *A toute solution de l'équation de la chaleur correspond une solution de l'équation* (9').

En un mot:

THÉORÈME V. — *L'intégration de l'équation de la chaleur et l'intégration de l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *constituent deux problèmes équivalents, la connaissance d'une solution de l'une entraînant nécessairement la connaissance d'une solution de l'autre.*

4. — Aux considérations précédentes se rattachent d'intéressantes applications géométriques. Une famille de courbes Γ étant donnée dans le plan *xoy* la détermination des surfaces admettant un système d'asymptotiques (ou une famille de géodésiques) dont les projections sur le plan *xoy* sont les courbes Γ conduit à une équation du second ordre du type parabolique. Un cas important est celui où cette dernière peut être ramenée à l'équation de la Chaleur.

Sur le premier de ces problèmes on pourra consulter mon travail déjà cité *(Lignes asymptotiques et Equation de la Chaleur)*.

J'ai consacré également une étude au second, et j'ai établi que, sous certaine condition à remplir par les courbes Γ, la solution dépendrait de l'intégration de l'équation (9') donc, en dernière analyse, de l'équation de la Chaleur.

II. — Sur les équations:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

5. — Montrons d'abord comment on pourra former une solution particulière de cette équation. Cherchons une solution z_1 de la forme $\lambda(x)\,\mu(y)$.

On devra avoir

$$\lambda\mu'' + Y\mu\lambda' = 0 ,$$

ce qui se scinde en les deux équations

$$\lambda' + \alpha\lambda = 0 ,$$

$$\mu'' - \alpha Y\mu = 0 .$$

La première donne $\lambda = e^{-\alpha x}$.

La seconde est une équation linéaire du second ordre qui a donné lieu à de nombreux et importants travaux, principalement de la part de M. E. Picard. Son étude a fait dernièrement l'objet d'un problème d'Agrégation (1926 — voir: *Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1927).

G. Darboux (*Surfaces*, t. II, p. 210) a signalé de curieuses propriétés de cette équation.

Rappelons qu'en posant $\mu = e^{\int u dy}$, u désignant la nouvelle fonction inconnue, cette équation s'écrit

$$u' + u^2 - \alpha Y = 0$$

ce qui est une équation de Riccati.

Nous connaîtrons donc une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles considérée si nous connaissons une solution particulière de cette équation de Riccati. On sait d'ailleurs que la connaissance d'une solution particulière d'une équation de Riccati entraîne celle de son intégrale générale qu'on obtient par des quadratures.

Ceci nous permet de justifier l'intérêt que l'on peut attacher à la question suivante:

Quelle est la condition pour qu'une équation de la forme (1')

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

puisse être ramenée à une équation de même forme, mais dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit fonction de la seule variable y ?

C'est ce que je me propose de chercher maintenant.

6. — Nous voulons que l'équation (1') puisse être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{Y_1^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

par le changement de variables $x = x$, $y_1 = \mu(x, y)$, Y_1 désignant une fonction de y_1 seulement.

Ce changement de variables nous conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{\mu_y^2}(\mu_{yy} + f\mu_x)\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{f}{\mu_y^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

qui, si y_1 est une solution de (1'), se réduit à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{f}{\mu_y^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 . \tag{11}$$

Posons $\frac{f}{\mu_y^2} = \frac{1}{Y_1^2}$. On tire de là

$$\mu_y = q = f^{\frac{1}{2}} Y_1 . \tag{12}$$

On en déduit

$$\mu_{yy} = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f_y Y_1 + f^{\frac{1}{2}} Y_1' q ,$$

et, comme $\mu(x, y)$ vérifie l'équation (1'),

$$\mu_x = p = -\frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} f_y Y_1 - Y_1 Y_1' . \tag{13}$$

Ecrivons que la condition d'intégrabilité est satisfaite

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} .$$

Ceci donne, toutes simplifications faites,

$$f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = - Y_1'' Y_1 = f \cdot \text{de } y_1 . \tag{14}$$

On peut écrire (14) sous la forme

$$y_1 = \Phi(\lambda) \tag{15}$$

en posant

$$\lambda = f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) . \tag{16}$$

Donc pour savoir si l'équation (1′) est réductible à la forme (10) on commencera par calculer la fonction λ de x et y donnée par la formule (16) puis on cherchera si (1′) admet une solution qui soit fonction de λ. Comme on a

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} = \Phi' \frac{\partial \lambda}{\partial y} , \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2} = \Phi'' \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \Phi' \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \Phi' \frac{\partial \lambda}{\partial x} ,$$

il faut donc que

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 \Phi'' + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + f \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) \Phi' = 0 ,$$

ou encore

$$\Phi'' + \frac{Z(\lambda)}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2} \Phi' = 0 . \tag{17}$$

Si l'on pose

$$\Lambda = \frac{Z(\lambda)}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2} , \tag{18}$$

il faudra donc que Λ puisse s'exprimer en fonction de λ. L'équation (17), que l'on peut écrire

$$\Phi'' + \Lambda \Phi' = 0 ,$$

donne alors

$$\Phi = \int e^{-\int \Lambda d\lambda} d\lambda . \tag{19}$$

On peut résumer les résultats que nous venons d'obtenir de la façon suivante:

Si l'on veut ramener une équation de la forme

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1'}$$

à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{Y_1^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 , \tag{10}$$

dans laquelle Y_1 *est fonction de* y_1 *seul, on commencera par calculer l'expression*

$$\lambda = f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right),$$

puis l'expression

$$\Lambda = \lambda_y^{-2} Z(\lambda) .$$

Si cette dernière peut s'exprimer en fonction de λ *on déterminera* y_1 *par la formule*

$$y_1 = \int e^{-\int \Lambda d\lambda} d\lambda .$$

La substitution de y_1 *à* y *conduira à la forme désirée* (10) *pour l'équation* (1').

7. — *Cas particuliers.*

a) Reprenons l'équation (14) et supposons $Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$. Donc $f^{-\frac{1}{2}}$ est solution de l'équation (1') considérée. Alors dans (14) le second membre doit être nul, $Y_1'' = 0$, $Y_1 = y_1$ et l'équation (10) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{y_1^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 . \tag{10'}$$

On sait ramener l'équation (10') à celle de la Chaleur. Le Théorème I de la première partie s'applique dans le cas actuel.

b) Un autre cas important est celui où

$$\lambda = f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = k ,$$

k étant une constante.

Alors (14) donne

$$Y_1'' Y_1 + k = 0 \ .$$

Si l'on pose $Y_1 = \sqrt{Y_2}$, ceci peut s'écrire

$$Y_2'^2 - 2 Y_2 Y_2'' - 2k Y_2 = 0 \ .$$

En se reportant à notre étude déjà citée (2me partie, 2me application), on constatera que l'équation ci-dessus exprime la condition pour que l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{Y_2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

puisse être ramenée à l'équation de la Chaleur.

En effet, dans ce cas comme dans le précédent, nous nous trouvons dans les conditions d'application du théorème I.

c) Supposons $Z(\lambda) = 0$. Alors $\Lambda = 0$, $y_1 = \lambda$. Par suite on aura la fonction Y_1, qui doit figurer dans l'équation (10) à obtenir, par l'équation

$$Y_1'' Y_1 + y_1 = 0$$

déduite de (14).

D'une façon plus générale supposons qu'on ait

$$\Lambda = -\frac{m}{\lambda} \ ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\lambda Z(\lambda) + m \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 = 0 \ .$$

On établira aisément la formule suivante qui se démontre par récurrence

$$Z(\lambda^{m+1}) = (m+1)\lambda^{m-1} \left[\lambda Z(\lambda) + m \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2\right] .$$

Il en résulte que

$$\Lambda = -\frac{m}{\lambda} \quad \text{entraîne} \quad Z(\lambda^{m+1}) = 0 \ ;$$

donc ici

$$y_1 = \lambda^{m+1}$$

et on aura ensuite la fonction Y_1, toujours d'après (14) par:

$$Y_1'' Y_1 + y_1^{\frac{1}{m+1}} = 0 .$$

8. — *Exemple.* — Considérons l'équation

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2(y + a^2 x)} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Cette équation a été étudiée par M. A. Buhl dans son travail *Sur les Equations linéaires aux dérivées partielles et la Théorie des groupes continus* (*Journal de Mathématiques*, t. 10, 1904, p. 85) sous la forme

$$\mu^2 (y - \mu^2 x) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Il suffit de poser $\mu = ai$ pour passer de l'une à l'autre. Ici

$$f(x, y) = a^{-2}(y + a^2 x)^{-1} ,$$

$$f^{-\frac{1}{2}} = a(y + a^2 x)^{\frac{1}{2}} , \qquad Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{a}{4}(y + a^2 x)^{-\frac{3}{2}} ,$$

$$\lambda = \frac{a^2}{4}(y + a^2 x)^{-1} , \qquad Z(\lambda) = \frac{a^2}{4}(y + a^2 x)^{-3} ,$$

$$\lambda_y = -\frac{a^2}{4}(y + a^2 x)^{-2} ,$$

$$\Lambda = \frac{Z(\lambda)}{\lambda_y^2} = \frac{4}{a^2}(y + a^2 x) = \frac{1}{\lambda} .$$

On a finalement, à un facteur constant près,

$$y_1 = \log(y + a^2 x) .$$

Puis le changement de variables

$$x = x , \qquad y_1 = \log(y + a^2 x)$$

remplace cette équation par

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{e^{y_1}}{a^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$