Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1935)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA NOTION D'EXISTENCE DANS LES MATHÉMATIQUES

Autor: Fraenkel, A.

Kapitel: I. — Partie générale.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26600

SUR LA NOTION D'EXISTENCE DANS LES MATHÉMATIQUES [1]

PAR

A. FRAENKEL (Jérusalem).

Pour traiter brièvement un sujet aussi général, nous sommes obligés de nous restreindre dans deux sens: *extérieurement* en limitant le sujet même et *intérieurement* en ne traitant que les points caractéristiques et essentiels. Dans le premier sens nous laisserons de côté la signification extrinsèque des mathématiques, c'est-à-dire leur caractère par rapport à la réalité de la *nature.* C'est donc seulement le problème d'existence immanent aux mathématiques qui nous intéressera, celui qui se limite au domaine des *mathématiques pures* sans considérer les applications possibles.

La plus grande partie de cette conférence sera consacrée à la notion et au problème de l'existence mathématique en *général* et nous serons amenés à faire quelques remarques d'ordre historique. Dans la seconde partie nous rendrons plus concrètes les considérations générales en les appliquant à une notion particulière, mais centrale dans les mathématiques, à *la notion du continu.*

I. — PARTIE GÉNÉRALE.

La différence de vues qui existe entre PLATON et ARISTOTE au sujet de l'existence des êtres mathématiques pourrait carac-

[1] Conférence faite le 19 juin 1934 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

tériser à elle seule l'essentiel de ce que nous avons à dire. Pour PLATON le monde des mathématiques est un monde indépendant, portant en lui-même *ses propres lois* et supérieur au physique dans sa façon d'être. L'existence des êtres mathématiques est, de ce fait, *indépendante de la pensée humaine* comme, en général, de toute activité extérieure. Pour ARISTOTE, au contraire, il n'y a pas de monde mathématique en soi; si l'on en parle c'est en tant qu'idées *abstraites de l'activité humaine*, à savoir des constructions des mathématiciens créateurs. Pour cette raison aussi, ARISTOTE considère les constructions mathématiques comme conduisant seules à une vraie ἐπιστήμη; mais la projection abstraite de ces constructions sur un monde en soi, en vérité irréel, ne serait qu'une δόξα [1].

Sans vouloir approfondir le développement historique de ce problème depuis l'antiquité jusqu'à nos jours [2] nous mentionnerons encore l'opposition entre LEIBNIZ et KANT, voisine de la précédente. LEIBNIZ souligne la possibilité d'une *mathematica universalis* en tant que science mathématique, symbolique et formelle, qui dépasse tout ce qui est à la portée des constructions et intuitions humaines. Pour KANT, au contraire, non seulement la géométrie, mais même l'arithmétique sont liées aux formes de l'intuition *humaine:* espace et temps; la notion du nombre notamment dépend, d'après lui, essentiellement de la catégorie du temps.

Si nous voulons mettre les couples Platon-Aristote et Leibniz-Kant en rapport avec les recherches modernes sur les fondements des mathématiques, la classification usuelle, et en général juste, des tendances actuelles en intuitionnistes, formalistes et logisticiennes ne convient pas. C'est plutôt l'opposition entre les deux thèses suivantes, tirées des discussions modernes, qui me semble

---

[1] Dans cette interprétation des idées antiques je me base surtout sur les indications de H. SCHOLZ, qui me semblent particulièrement précieuses puisque ce philosophe est versé en philologie classique autant qu'en mathématiques. Voir surtout le profond mémoire (1930): « Die Axiomatik der Alten ». (*Blätter für Deutsche Philosophie* **4**, pp. 259-278.)

[2] Sur ce point on trouvera des indications précieuses dans le livre de O. BECKER (avec lequel d'ailleurs je ne puis me mettre d'accord sur quelques points essentiels): « Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene », Halle a. S., 1927. (Ce mémoire a paru aussi dans le *Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenologische Forschung* **8**, 1927.)

décisive: I. *Pour l'existence des objets mathématiques la compatibilité dans le sens de la non-contradiction à l'intérieur d'une théorie mathématique est nécessaire et en même temps suffisante.* En d'autres termes (en acceptant un énoncé de BERNAYS): est existant ce qui peut être sujet, c'est-à-dire peut occuper des places libres dans des fonctions propositionnelles d'une théorie non-contradictoire des mathématiques ou d'une de leurs branches particulières. (A cette thèse il se lie d'habitude, quoique pas toujours, explicitement ou implicitement, l'appel à un monde d'idées mathématiques ayant une valeur propre.) II. La non-contradiction n'est pas suffisante pour l'existence, c'est-à-dire pour la vérité; *c'est la possibilité de construire qui est décisive, et pour cette raison les mathématiques sont un monde de constructions qui s'exécutent dans le temps.* Si l'on passait de ces constructions à une théorie dépourvue de l'élément temps, on obtiendrait un empire d'ombres, où les symboles et le langage, c'est-à-dire des éléments vraiment extra-mathématiques, joueraient en fin de compte le rôle décisif.

Dans la suite nous appellerons la première de ces conceptions brièvement le *réalisme* (platonicien), la seconde l'*idéalisme.*

On classe d'habitude dans le réalisme les tendances logistiques de FREGE, de BERTRAND RUSSELL et de l'école de Vienne et aussi le formalisme de HILBERT et BERNAYS et de leurs élèves; dans l'idéalisme l'école intuitionniste de Paris et le néointuitionnisme de BROUWER (et en partie de WEYL). Cette division n'est pas tout à fait juste puisque les conceptions chevauchent plusieurs fois. Ainsi Henri POINCARÉ, qui (par exemple dans « *Science et Méthode* ») identifie l'existence dans les mathématiques avec la non-contradiction, ne peut pas être appelé tout simplement idéaliste. D'autre part la position de HILBERT n'est pas non plus si univoque qu'on le croit en général. C'est que pour lui — et cela le sépare des réalistes — les faits et objets de l'analyse et de la théorie des ensembles classique, et parfois même de l'arithmétique, ne sont pas donnés *en soi* et pour cela non-contradictoires, mais ils doivent être fondés sur une théorie purement constructive, intuitivement établie; les manières de conclusion transfinies et notamment les propositions purement existencielles ne sont, de cette façon, que des passages à des résultats de caractère fini, et ses objets sont des idées dans le sens de KANT.

On peut cependant, malgré ces restrictions et d'autres précautions à prendre, adjoindre au point de vue platonicien le réalisme de l'école de Cambridge avec les *Principia Mathematica* d'une part, l'axiomatique classique de l'autre. Les réalistes anglais partent de faits fondamentaux, *vrais en vertu de leur évidence*. Ils procèdent par définitions et applications des procédés évidents de conclusion (règles de raisonnement), en employant toutefois à l'occasion des méthodes transfinies que l'intuition a de la peine à concevoir. Les axiomes du *choix* et de l'*infini* soulèvent une certaine difficulté parce qu'il n'est pas assez clair jusqu'à quel point ils appartiennent aux faits vrais d'évidence ou « tautologiques » [1] dans un sens qui peut être précisé. Pour l'axiome de l'infini cette question n'est pas si importante que pour l'autre parce que cet axiome, en tant que de nature non-tautologique, est en tout cas indispensable pour les mathématiques, science qui sans lui deviendrait une trivialité. Qui voit dans l'axiome de l'infini le seul caractère supplémentaire des mathématiques qui dépasserait la nature sans cela tautologique du système logico-mathématique ne porte guère atteinte à l'attitude de l'école de Cambridge ni à celle de l'école de Vienne qui s'est distinguée dans l'espace de ces derniers dix ans. (Sans doute elle diffère essentiellement de la première par sa théorie de la connaissance, mais quant à la logique les attitudes des deux écoles sont parallèles.) L'axiome de l'infini apparaît alors comme l'hypothèse fondamentale ou spécifique du système mathématique. — Beaucoup plus sérieuses sont les difficultés que soulèvent la théorie raffinée des types et l'axiome de réductibilité de RUSSELL. Jusqu'à ce jour elles ne sont pas entièrement surmontées; cependant elles se sont de beaucoup éclaircies ces dernières années, grâce surtout aux travaux de l'école de Vienne.

---

[1] Pour la bibliographie des sujets traités ici et dans la suite, nous renvoyons, pour autant qu'il s'agit de travaux parus avant 1928, à notre « Einleitung in die Mengenlehre » (3e éd., Berlin, 1928). C'est seulement la littérature des dernières années que nous citerons au besoin. Pour les questions traitées plus haut, voir encore F. P. RAMSEY dans *Math. Gazette* **13**, 185-194 (1928) et R. CARNAP dans *Erkenntnis* **1**, 12-26, et **2**, 91-105, 135-151 (1930-31).

L'axiomatique procède d'une façon différente [1]: là, les faits fondamentaux de la mathématique ne sont pas *déduits* ou constructivement définis, mais seulement entièrement *décrits*, et ceci en faisant implicitement appel à un fond absolu dont les objets proviennent; cet appel de son côté peut être légitimé par une démonstration de la non-contradiction du système d'axiomes, démonstration qui confère à ce fond tout au moins le droit d'être imaginé. La description des objets se fait par l'indication des relations existant entre eux. L'opposition mentionnée entre les logisticiens et les partisans de l'axiomatique correspond à une différence dans la *création des notions* en général. Les premiers s'inspirent du principe de détermination « *per genus proximum et differentiam specificam* »; les autres procèdent fonctionnellement dans le sens souligné surtout par CASSIRER, d'après lequel une notion n'existe que par son rapport avec d'autres notions, « est une chose qui peut être prise comme sujet de certains jugements » (SCHLICK). Nous verrons plus tard quelle importance décisive possède l'appel implicite à un domaine d'existences absolues pour la définition, ou mieux, la description des objets mathématiques.

La parenté de ces tendances avec le réalisme platonicien est évidente. D'autre part, il est naturel de rapprocher de l'idéalisme aristotélicien (qui regarde les êtres mathématiques comme créations de notre esprit et non indépendants du sujet pensant), le néointuitionnisme tel qu'il se manifeste, dans les mathématiques, avec BROUWER et, dans la philosophie, de la manière la plus prononcée, avec l'anthropologisme de BECKER qui est lié à la métaphysique de HEIDEGGER. En effet, chez BROUWER les êtres mathématiques se construisent à partir de la suite des nombres entiers. Le procédé qui consiste à parcourir cette suite dérive d'une intuition primitive et fondamentale et requiert l'écoulement du temps.

MENGER [2] remarque avec raison que la notion de constructi-

---

[1] Une certaine union des deux points de vue est créée par le « heterodox view of logistic » de C. I. LEWIS, union qui, c'est vrai, ne garde que la tenue formelle des *Principia Mathematica*.

[2] Voir *Blätter für Deutsche Philosophie* **4**, 311-325 (1930) et *Anzeiger Akad. Wiss. Wien*, Math.-Nat. Kl., 1930 (p. 257) et 1931 (p. 7). Nous voulons rappeler, à côté des exemples plus profonds de MENGER, que NELSON dans sa philosophie néofriesienne

bilité n'a pas un caractère absolu mais est prise différemment à des temps divers et suivant les buts poursuivis. Cette remarque, en soi juste sans doute, diminue l'utilité pratique de la thèse de la constructibilité, mais ne diminue pas sa valeur théorique.

La non-contradiction est pour les intuitionnistes un *attribut* qui découle de l'existence, tandis que la non-contradiction à elle seule est tout au plus un jeu illimité avec des choses qui pourraient n'être que des fictions. Le manque de contradiction garantirait aussi peu l'existence que le manque de preuve l'innocence d'un accusé. Pour cette raison aussi on se refuse à admettre l'énoncé purement existenciel de l'axiome du choix parce que dépourvu de sens, et cela indépendamment de la question de la compatibilité de cet axiome avec les autres [1].

L'intuition primitive de la suite des nombres se ramène à une *bi-section de l'unité* conçue comme indéfiniment continuable, procédé dont la signification fondamentale a été soulignée jadis par Platon. Elle ne permet pas, il est vrai, d'affirmer l'existence de la *totalité* des nombres naturels. Cette dernière est pour Brouwer plutôt un domaine ouvert dans lequel le *tertium non datur* n'est pas admissible, et cette totalité de son côté ne peut pas être traitée en objet mathématique. Le procédé de bi-section permet cependant la construction inductive de chaque nombre naturel ou la descente par récurrence d'un nombre quelconque vers l'unité. En accord avec cette intuition primitive c'est le temps [2] qui devient en quelque sorte le substratum

---

considère les nombres complexes ordinaires et la géométrie d'Euclide comme constructivement déduits, tandis qu'il déclare que les nombres complexes d'ordre supérieur et les géométries non-euclidiennes ne sont que des jeux imaginaires quoique non-contradictoires.

[1] De la littérature récente nous citerons ici une conférence de Brouwer, « Mathematik, Wissenschaft und Sprache », voir *Monatshefte Math. Phys.* **36**, p. 153-164 (1929) (et aussi « Die Struktur des Kontinuums », Wien, 1930), et en plus R. Wavre dans les *Archives Soc. Belge Philos.* **5**, fasc. 1 (1933).

[2] Le temps intervient dans le système néointuitionniste encore dans un autre sens et d'une façon qui est étrangère aux mathématiques classiques: dans le sens de *la dépendance à l'égard du temps des jugements mathématiques.* Dans l'étude du rôle du *tertium non datur* interviennent d'une façon essentielle certaines « propositions tierces » qui remplissent l'intervalle entre une proposition générale et la présentation d'exemples opposés réfutant cette proposition. (Ainsi, si $P(n)$ désigne une certaine propriété des nombres naturels n, elles s'intercalent entre les deux propositions suivantes; « tous les nombres naturels ont la propriété P » et « n_0 est un nombre naturel de la propriété non-P ».) Ces propositions tierces ne sont valables, comme Brouwer le remarque lui-même, que temporairement. Si leur élimination survient par une solution réussie du problème en question, on pourra citer d'autres propositions tierces, et le néointuitionnisme se contente de cette situation.

de la notion d'existence mathématique dans le néointuitionnisme. Le temps pris comme « phénomène fondamental de l'intellect » permet à un moment de vie de discerner entre deux choses qualitativement différentes, le passé et l'avenir (« division d'un moment de vie »). A cette bi-section est jointe — d'ailleurs en accord inconscient avec les idées d'Emile MEYERSON — la possibilité d'une identification de différentes suites (« procédé causal »). De cette façon BROUWER arrive à l'énoncé un peu paradoxal: Les considérations mathématiques se réalisent comme un acte de volonté servant l'instinct de conservation de l'homme particulier; elles se font en deux phases, celle de l'attitude temporelle et celle de l'attitude causale.

Le phénoménologiste Oskar BECKER pousse plus loin ces considérations sur l'existence dans les mathématiques et leur donne, dans le livre précité « Mathematische Existenz », les fondements philosophiques en accentuant leur signification anthropologique. L'homme, ou plutôt l'existence effective de l'homme, forment le centre des problèmes philosophiques. Ainsi, d'après BECKER, la vie effective de l'homme est le « fondement ontique » des mathématiques, contrairement à la conception « absolue » (approfondie par HUSSERL, le créateur de la phénoménologie) d'après laquelle le monde est un univers de l'existence en soi et l'homme n'est qu'un membre dans la gradation immense des êtres en général. La mise en rapport du problème du continu (voir plus bas) avec la mortalité de l'homme n'est qu'une conséquence de cette doctrine anthropologique. En général, les mathématiques qui ont la prétention de parvenir à des connaissances indépendantes du temps, seraient un moyen pour regagner l'état naturel qui ne connaît pas la mort et qui a disparu à cause de la conscience de soi-même; elles seraient, en fin de compte, un trait primitif, archaïque dans l'existence historique.

Un emploi si illimité de l'anthropologisme en mathématiques, emploi qui, à vrai dire, conviendrait mieux à d'autres sciences, a évidemment fait surgir des oppositions chez les philosophes. Parmi eux CASSIRER [1] est à citer en premier lieu; HUSSERL

---

1 Philosophie der symbolischen Formen. III. Teil: Phaenomenologie der Erkenntnis. Berlin, 1929. Voir aussi: M. GEIGER dans *Götting. Gel. Anzeigen*, 1928, 401-419, et K. REIDEMEISTER dans *Philos. Anzeiger* **3**, 15-47 (1929).

lui-même a souligné franchement son opposition et s'est joint à l'attitude réaliste de son grand prédécesseur BOLZANO pour affirmer que l'existence mathématique se réduit à la non-contradiction [1]. C'est dans une parole de DEDEKIND, connue seulement depuis peu de temps, qu'on trouvera la thèse la plus opposée à la conception anthropologique: nous sommes du genre divin; par cette phrase il déclare que les actes scientifiques qui forment des notions ont une force créatrice supérieure à toute constructibilité. C'est d'ailleurs dans un sens profond le parallèle du « *ἀεὶ ὁ θεὸς ἀριθμητίζει* » de PLATON. Tandis que pour l'école logisticienne de Vienne toutes les propositions de la logique et de la mathématique sont tautologiques, et ce n'est que la limitation de l'esprit humain qui nous empêche de les embrasser toutes en même temps et de les considérer seulement comme *changeant la forme* des expressions de la connaissance sans *créer* des connaissances nouvelles; et c'est le regretté H. HAHN, le porte-parole de cette école, qui peut dire, en opposition extérieurement diamétrale au point de vue de PLATON: « Dieu ne fait jamais des mathématiques ». Ch. HERMITE était un partisan particulièrement fervent de la conception réaliste et il en est de même, parmi les mathématiciens illustres contemporains, de G. H. HARDY [2]. Par contre, E. BOREL s'approche beaucoup de l'anthropologisme de BECKER, par exemple en liant la possibilité de définir des nombres suffisamment grands à la durée limitée de vie de l'Univers et par suite de la vie organique d'une part, à la théorie des quanta et au caractère discontinu de nos fonctions cérébrales [3] de l'autre. Cette pensée s'accorde avec l'assertion fameuse de POINCARÉ (dont, d'ailleurs, la position entre les deux camps a varié en quelque façon): Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés et tous ceux que l'on pourra inventer un jour... et c'est ce « l'on pourra » qui est l'infini.

C'est le mot « inventer » qui est caractéristique dans ce propos. Car la question débattue ici pourrait aussi s'exprimer par l'alter-

---

1 Formale und transcendentale Logik. Halle, 1929 (voir cependant l'annexe III de cet ouvrage).

2 Voir *Mind*, N. S. **38**, 1-25 (1929).

3 Voir un propos de N. LUSIN dans les *Fundamenta Math.* **16**, 51 (1930); cf. ibidem **21**, 114-126 (1933).

native suivante: Est-ce que le mathématicien *invente* ses objets et propositions ou est-ce qu'il les *découvre* ? Il invente suivant les idéalistes, il découvre suivant les réalistes. E. T. Bell a fait dernièrement une expérience intéressante dans cette direction [1]. Il a posé, au sujet des théorèmes de la géométrie élémentaire, la question précédente à environ 300 étudiants; les étudiants des sciences physiques et naturelles et les techniciens répondirent presque tous « le mathématicien invente », tandis que les mathématiciens purs se déclarèrent pour la « découverte ». Si les objets mathématiques préexistent aux efforts des mathématiciens, comme l'Amérique à la découverte de Christophe Colomb, alors la description axiomatique de ces objets est efficace et suffisante pour les caractériser d'une manière univoque, même si elle n'aide pas à obtenir une construction ou une reconstruction (création d'un modèle). Une image peut être ici utile: chaque bout de ficelle dans un peloton désespérément embrouillé devient parfaitement accessible au contrôle après une description complète du parcours du peloton, même si l'on n'arrive pas à le débrouiller et à le dénouer, c'est-à-dire à isoler constructivement les bouts particuliers.

II. Application a la notion du continu.

C'est peut-être le plus ancien et en même temps le plus important des problèmes que posent les fondements des mathématiques que de construire un pont au-dessus du précipice qui s'étend entre deux natures: d'une part la nature *discrète*, *qualitative*, *combinatoire*, *individuelle* de l'*arithmétique* et surtout de la suite des nombres naturels (région du dénombrement), et d'autre part la nature *cohérente*, *quantitative*, *homogène* du *continu* géométrique et analytique, par exemple de la totalité des nombres réels (région de la mesure) [2]. Ce problème fonda-

[1] Voir *Scientific Monthly* **32**, 193-209 (1931).

[2] Voir p. ex. H. Freudenthal dans *Euclides* **8**, 89-98 (1932), puis le recueil « Continu et Discontinu » (par Chevalier, Carlheinc, etc.): *Cahiers de la nouvelle journée*, N° 15 (Paris, 1929) dans lequel on traite aussi des relations de notre problème aux sciences naturelles et à la théorie de la connaissance. Un historique de cet antagonisme se trouve dans la conférence de H. Weyl: Die Stufen des Kontinuums (Jena, 1931), laquelle me paraît cependant contestable sous certains rapports.