Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1934)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE RÔLE DES FAMILLES NORMALES
Autor: Montel, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25985

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LE RÔLE DES FAMILLES NORMALES [1]

PAR

PAUL MONTEL (Paris).

La théorie des familles normales a maintenant vingt années d'existence. Le moment est venu d'examiner le rôle qu'elle a joué, les résultats qu'elle a permis d'obtenir, les directions dans lesquelles elle s'est ramifiée et développée.

Cette théorie doit peut-être son existence à l'erreur célèbre de Riemann dans le principe de Dirichlet. On sait que la fonction harmonique qui passe par un contour donné rend minimum l'intégrale du carré de la longueur de son gradient. Riemann considérait comme évidente l'existence d'une fonction qui donne à cette intégrale sa valeur minimum. Pour obtenir cette fonction, on peut utiliser des fonctions auxiliaires donnant à l'intégrale des valeurs de plus en plus voisines de son minimum. Si cette suite de fonctions auxiliaires admet une fonction limite, cette dernière pourra être la fonction cherchée. Mais cette suite admet-elle toujours une fonction limite ?

Un ensemble infini de points possède toujours un point d'accumulation ou point limite, c'est-à-dire qu'on peut extraire de cet ensemble une suite infinie de points admettant un point limite unique. Pour un ensemble infini de fonctions, il n'en est pas toujours de même. Dès le début, apparaît ainsi la différence profonde qui sépare l'Analyse proprement dite, celle qui s'occupe des fonctions de points, du Calcul fonctionnel qui s'occupe des fonctions de lignes ou de surfaces.

---

[1] Conférence faite à la Réunion de printemps de la Société mathématique suisse, tenue à Berne, le 27 mai 1934.

Les travaux d'Ascoli et d'Arzelà sur l'égale continuité, les études directes du problème de Dirichlet faites par Arzelà et par M. Hilbert, celles de M. Lebesgue sur le même sujet et sur le problème de Plateau ont eu longtemps le caractère de recherches isolées et de curiosités mathématiques. Mais ces recherches faisaient intervenir des suites de fonctions admettant une fonction limite, et il est apparu comme naturel et utile de savoir reconnaître d'une manière générale si une famille de fonctions possède la propriété des ensembles de points: toute infinité d'éléments appartenant à la famille admet au moins un élément limite. Une famille possédant cette propriété est appelée une *famille normale.*

Ainsi posé, le problème paraissait ne pouvoir conduire qu'à la détermination de critères permettant d'affirmer qu'une famille est normale. On eût ainsi obtenu des instruments de travail commodes qui n'auraient pas débordé le cadre dans lequel on les plaçait. Au contraire, la théorie des familles normales s'est surtout montrée féconde en dehors du domaine fonctionnel pour lequel elle avait été créée. Essayons d'en discerner les raisons.

Une de ces raisons est que la théorie ne pouvait avoir pour but unique la recherche des critères de normalité. Ce serait en méconnaître singulièrement le caractère et la portée que de la limiter à ce qui est une partie, importante sans doute, mais une partie seulement de sa tâche. Elle devait nécessairement s'attacher à l'étude des propriétés résultant de la solidarité qui unit les fonctions d'une famille normale. Cette solidarité s'est révélée particulièrement remarquable dans le cas des fonctions de variables complexes. La théorie proprement dite est formée par la réunion des propriétés résultant du fait que toute suite infinie a un élément d'accumulation et de ce fait seulement. Il en résulte que, chaque fois que l'on découvre un critère nouveau, il entraîne toujours les mêmes conséquences: des théorèmes d'Analyse, qui paraissaient dériver d'hypothèses particulières, découlent en réalité du seul fait que la famille est normale. Il en est ainsi par exemple pour les théorèmes de MM. Picard, Landau, Schottky sur les valeurs des fonctions analytiques autour d'un point essentiel isolé. La théorie permet donc le

groupement de théorèmes d'abord épars qui deviennent des cas particuliers d'une proposition générale.

Une autre raison de l'utilité de cette théorie réside dans le fait, connu depuis le début, que la propriété de normalité est une propriété locale. Si une famille est normale dans un domaine, elle est normale en chaque point de ce domaine, c'est-à-dire dans un petit cercle ayant ce point pour centre, et réciproquement. Ainsi, lorsqu'une famille de fonctions n'est pas normale dans un domaine, celui-ci contient des *points irréguliers* en lesquels elle n'est pas normale. L'ensemble de ces points, d'abord étudié pour les suites convergentes de fonctions, a été introduit systématiquement par Fatou dans la théorie de l'itération. M. Julia les a mis en évidence en montrant leur rôle dans l'étude des fonctions entières et M. Ostrowski a fait de ces points une étude très pénétrante.

Un caractère remarquable de ces points irréguliers est qu'ils possèdent, par rapport à l'ensemble des fonctions de la famille, bien des propriétés que possèdent les points singuliers d'une fonction unique. Ce sont en quelque sorte des *points singuliers collectifs*; il semble que les caractères de leur singularité soient partagés entre les fonctions de la famille.

* * *

Rappelons la définition, par exemple dans le cas d'une famille de fonctions continues de deux variables réelles, $f(x, y)$, définies dans un même domaine (D): une telle famille est dite *normale dans l'intérieur de* (D) lorsque toute suite infinie de fonctions f de la famille contient une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction limite dans tout domaine (D′) complètement intérieur à (D). La fonction limite peut être une constante finie ou infinie. Remarquons tout de suite que la convergence n'est pas nécessairement uniforme dans le domaine ouvert (D); lorsqu'il en est ainsi, nous disons que la famille est *normale dans le domaine* (D), et non plus seulement dans l'intérieur de (D).

Pour les fonctions continues de variables réelles, bornées en un point, la notion de normalité se confond avec celle d'*égale continuité*. A chaque fonction continue, $f(x, y)$ par exemple,

correspond un nombre $\delta(\varepsilon)$, appelé module de continuité, tel que la différence des valeurs de la fonction en deux points du domaine dont la distance ne dépasse pas $\delta(\varepsilon)$ soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à ε, et tel que tout nombre plus grand ne remplisse pas cette condition. Le nombre $\delta(\varepsilon)$ dépend en général de la fonction f choisie; si, pour chaque valeur de ε, on peut adopter un même nombre $\delta(\varepsilon)$ convenant à toutes les fonctions de la famille, c'est-à-dire si, pour chaque valeur de ε, $\delta(\varepsilon)$ a une borne inférieure positive, on dit que les fonctions sont également continues. Ici encore, il faut distinguer l'égale continuité dans l'intérieur de (D) et l'égale continuité dans le domaine (D).

Les familles normales de fonctions de variables réelles ont montré leur utilité dans les problèmes du calcul des variations, en particulier, dans le problème des lignes géodésiques, celui de Dirichlet et celui de Plateau. Je signalerai par exemple la famille normale introduite par M. Lebesgue, formée par des fonctions monotones dans un domaine dont l'intégrale de Riemann est bornée, qu'il a utilisée pour la démonstration du principe de Dirichlet dans des cas très généraux.

La théorie a permis de donner une forme intuitive aux théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Prenons par exemple l'équation

$$y' = f(x, y),$$

dans laquelle $f(x, y)$ désigne une fonction continue du point (x, y). L'une des méthodes de Cauchy consiste à s'approcher de la courbe intégrale issue d'un point O par des lignes polygonales passant par ce point O dont chacun des côtés a une pente égale à la valeur de f en un des sommets qui limitent ce côté. Cette famille de lignes polygonales est normale et l'ensemble des solutions issues de O se confond avec l'ensemble des courbes d'accumulation de la famille obtenues en faisant croître indéfiniment le nombre des côtés tandis que leurs longueurs tendent vers zéro. On retrouve ainsi et on complète les résultats de M. Peano établissant l'existence d'une infinité d'intégrales issues de O qui remplissent la région limitée par deux intégrales tangentes en O, l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure.

C'est surtout dans la théorie des fonctions presque périodiques créée par M. H. Bohr que la notion de familles normales de fonctions de variables réelles a joué un rôle utile. Soit $f(x)$ une fonction, réelle ou complexe, de la variable réelle x, définie et continue pour toute valeur de la variable. On dit que $f(x)$ est presque périodique si, à chaque nombre ε, correspondent des presque-périodes τ telles que, en deux points dont les abscisses diffèrent de τ, les valeurs de la fonction diffèrent, en module, de ε au plus. Il faut en outre que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un point d'abscisse τ représentant une presque-période. Les fonctions périodiques sont des fonctions presque périodiques particulières; il en est de même des sommes d'un nombre fini ou infini de fonctions périodiques dont les périodes sont différentes. Si une fonction continue $f(x)$ est presque périodique, la famille des fonctions $f(x+h)$, h désignant un nombre réel arbitraire, est une famille normale et bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et réciproquement. Il faut bien remarquer qu'il ne s'agit pas de normalité dans l'intérieur de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Dans le cas présent, la normalité n'est plus une propriété locale et l'absence de points irréguliers n'entraîne pas la normalité. L'égale continuité pour une famille de fonctions presque périodiques est une condition nécessaire de normalité; mais elle ne suffit pas et il faut y adjoindre une autre propriété. C'est ainsi que le critère suivant a été souvent employé: Toute famille de fonctions également continues et également presque périodiques est une famille normale. Par « également presque périodiques », il faut entendre que, à chaque nombre ε, correspondent des presque-périodes τ et un nombre $l(\varepsilon)$ qui conviennent indifféremment à toute fonction de la famille.

Je laisse de côté l'étude d'autres familles normales de fonctions de variables réelles, en particulier de fonctions harmoniques ou sousharmoniques qui se rattachent plutôt aux fonctions analytiques. Je me borne à signaler les familles normales de fonctions positives d'ensembles que M. de la Vallée Poussin a introduites dans ses travaux sur la méthode du balayage. Pour qu'une famille de fonctions de cette nature soit normale, il faut et il suffit que les fonctions soient bornées dans leur ensemble. C'est un critère que nous allons bientôt rencontrer de nouveau.

* * *

C'est dans le cas des fonctions de variables complexes que la théorie a conduit aux résultats les plus inattendus. Soit $f(z)$, une fonction d'une variable complexe z, méromorphe dans un domaine (D): nous considérerons la valeur infinie comme une valeur ordinaire et un pôle ne sera pas pour nous un point singulier. Nous remplacerons avec M. Ostrowski le module de la différence de deux nombres complexes par la distance de leurs points représentatifs sur la sphère de Riemann obtenue par une projection stéréographique du plan complexe, cette distance étant mesurée par la longueur du plus petit arc de grand cercle qui se termine en ces points ou par la longueur de la corde correspondante. On élargit ainsi les notions de limite, de convergence, de convergence uniforme de manière à les rendre applicables à des fonctions dont les valeurs sont finies ou infinies. Une fonction méromorphe est continue sur la sphère de Riemann. Pour qu'une famille de fonctions méromorphes dans un domaine soit normale, il faut et il suffit que ces fonctions soient également continues sur la sphère.

Les critères de normalité d'une famille des fonctions méromorphes dans un domaine sont étroitement liés à l'existence de régions lacunaires, c'est-à-dire de régions, situées sur le plan complexe ou la sphère de Riemann, dans lesquelles les points représentatifs des valeurs de la fonction ne pénètrent jamais. Le plus ancien critère est celui qui concerne les fonctions bornées; on en déduit que l'existence d'une calotte sphérique lacunaire, si petite soit-elle, entraîne la normalité. Mais il y a plus: l'existence de trois points lacunaires, c'est-à-dire de trois valeurs exceptionnelles, a pour conséquence que la famille est normale. Ce résultat est fondamental.

Nous sommes ainsi conduits à une classification des fonctions analytiques qui prend comme base les points exceptionnels. L'étude des fonctions holomorphes dans un domaine n'est que la théorie des fonctions analytiques admettant une valeur exceptionnelle commune que l'on peut toujours supposer être la valeur infinie. Viennent ensuite les familles de fonctions admet-

tant deux valeurs exceptionnelles que l'on peut supposer être les valeurs zéro et l'infini: ce sont les fonctions holomorphes dépourvues de zéro. Enfin, les familles normales de fonctions à trois valeurs exceptionnelles.

Du critère fondamental découlent aussi les propriétés principales des points irréguliers et des points réguliers. Autour d'un point irrégulier, les fonctions prennent dans leur ensemble une infinité de fois toutes les valeurs, sauf peut-être deux au plus. En d'autres termes, un point irrégulier est un point d'accumulation des zéros des fonctions $f(z) - a$ pour toutes les valeurs de a sauf peut-être deux au plus. Cette propriété est celle dont les conséquences ont été les plus intéressantes. En un point régulier z_0, il existe une infinité de suites convergentes $f_n(z)$. On en déduit que ce point est un point d'accumulation des zéros de $f_n(z) - a$ pour les fonctions $f_n(z)$ appartenant à la suite et pour une valeur de a seulement: la valeur limite de la suite au point considéré z_0. Cette propriété a été signalée depuis longtemps par Hurwitz. On en déduit aussi que, pour toute suite de points z_n admettant le point z_0 comme unique point limite, la suite des valeurs $f_n(z_n)$ a pour limite la valeur a et cette propriété que M. Carathéodory a appelée la convergence continue lui a permis d'édifier une théorie simple et élégante des familles normales.

Une étude du rôle joué par les valeurs exceptionnelles d'une fonction et de ses dérivées a été entreprise, mais appelle de nouvelles recherches. Que peut-on dire, par exemple, des familles de fonctions holomorphes ne prenant pas la valeur zéro et dont la dérivée première ne prend pas la valeur un ?

* * *

L'application des propriétés qui précèdent à la famille des fonctions itérées d'une fonction donnée a permis d'aborder pour la première fois le problème général de l'itération et de le résoudre complètement dans le cas où la fonction itérée est rationnelle. Soit $f(z) = f_1(z)$, une fonction analytique; désignons par $f_2(z)$ la fonction $f[f(z)]$; par $f_n(z)$ la fonction $f[f_{n-1}(z)]$ que l'on appelle

la n^{me} itérée de $f(z)$. L'étude de la suite $f_n(z)$ est liée à la résolution des équations fonctionnelles d'Abel ou de Schröder

$$F[f(z)] = sF(z) \qquad \text{ou} \qquad G[f(z)] = G(z) + a ,$$

s et a désignant des constantes. L'étude locale du problème avait conduit à l'introduction des points fixes, c'est-à-dire des zéros de $f_n(z) - z$. Considérons d'abord un point double α, tel que $f(\alpha) = \alpha$. Les itérés de α coïncident avec lui; les itérés d'un point voisin s'approchent de α si $|f'(\alpha)| < 1$, le point est dit alors attractif; ils s'en éloignent si $|f'(\alpha)| > 1$, le point est dit répulsif. Si $|f'(\alpha)| = 1$, le point est appelé mixte ou indifférent et la suite des itérés se comporte moins simplement. Si α est un zéro de $f_n(z) - z$, avec $n > 1$, les itérés de α forment un cycle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et l'ensemble des voisinages de ces points donne lieu à des cycles attractifs, répulsifs ou mixtes suivant la valeur de $|f'_n(\alpha)|$. Les premiers travaux, dus à Kœnigs et à ses successeurs, se bornaient à l'étude locale du problème autour d'un point fixe. Une note de Fatou en 1906 appela l'attention sur le problème général. Pour les fractions rationnelles, il a été résolu dans des mémoires fondamentaux dus à Fatou et à M. Julia. Fatou introduit systématiquement l'ensemble des points irréguliers de la famille $f_n(z)$. Des propriétés générales de ces points, on déduit que cet ensemble, qui est parfait, coïncide avec l'ensemble dérivé des points répulsifs. Cet ensemble constitue les frontières des domaines, en nombre fini ou en infinité dénombrable, où la suite converge vers des constantes: ce sont les domaines d'attraction. Ces frontières peuvent être formées de lignes analytiques ou d'ensembles dont aucune partie n'est analytique, ni même ne possède de tangente, dont Fatou et M. Julia ont donné des exemples remarquables.

Cette étude a conduit Fatou à introduire la notion de famille normale dans la théorie des groupes automorphes. Un des énoncés qu'il obtient peut être exprimé de la manière suivante: pour qu'un groupe de substitutions homographiques soit proprement discontinu, il faut et il suffit que la famille de ces fonctions soit normale et que toutes ses limites soient constantes.

* * *

Dans le problème précédent, on se trouve naturellement en présence d'une famille de fonctions: celle des itérées de $f(z)$. Il n'en est plus de même lorsqu'on veut étudier l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'un point singulier. Il est alors commode de substituer à cette fonction une suite de fonctions liées à la première. On y parvient par une méthode de morcellement du plan de la variable qui permet de répartir entre les fonctions de la suite l'ensemble des valeurs que l'on cherche à classer. Pour un point singulier isolé, nous ferons un pavage du plan de la variable z autour de ce point, au moyen de domaines (D_n), empiétant ou non les uns sur les autres, dont le point singulier sera l'unique point extérieur à tous. Par une représentation conforme de ces domaines (D_n) sur un domaine fixe (D), nous distribuerons les valeurs de la fonction entre une suite infinie de fonctions définies dans (D), de manière que la n^e fonction prenne dans (D) les mêmes valeurs que prend $f(z)$ aux points homologues de (D_n). On choisira généralement des cercles concentriques ou des anneaux concentriques semblables. Dans le cas d'une fonction entière, on peut prendre la suite $f_n(z) = f(2^n z)$ définie dans le cercle $|z| < 1$; dans le cas d'un point singulier à l'infini, on peut prendre la même suite dans l'anneau $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

Pour une fonction entière, cette famille ne peut être normale. On en déduit aussitôt les théorèmes classiques de MM. Picard, Landau, Schottky. Mais on aperçoit ainsi que ces théorèmes ne sont que des représentants particuliers d'une classe générale de propositions: à chaque critère permettant d'affirmer qu'une famille est normale, on peut faire correspondre un théorème du type précédent. On en a obtenu un grand nombre; donnons-en au moins un exemple: les fonctions dont les valeurs représentées sur la sphère de Riemann couvrent des régions dont l'aire est bornée par un nombre inférieur à l'aire de la sphère forment une famille normale. On en déduit des théorèmes de même forme que les précédents.

* * *

Les théorèmes du type de celui de M. Landau expriment en somme qu'une fonction ne peut ressembler à une constante, dans une région assez étendue, sans être elle-même une constante. Toutes les extensions introduisent toujours une hypothèse destinée à exclure les constantes de l'ensemble des fonctions étudiées. Il était naturel de penser qu'une fonction ne doit pouvoir ressembler à un polynome de degré donné sans être elle-même un polynome. Pour traiter ce problème, il a été nécessaire d'introduire des familles quasi normales de fonctions méromorphes ou holomorphes. On appelle *famille quasi normale*, une famille telle que toute suite infinie de fonctions de la famille contienne une suite partielle convergeant uniformément sauf en un nombre fini de points irréguliers. Il faut faire intervenir ici une précision nouvelle: celle de l'ordre d'un point irrégulier. Autour d'un point irrégulier isolé, les fonctions de la suite convergente prennent toutes les valeurs sauf une au plus. Le point est d'ordre fini lorsque les fonctions prennent dans son vosinage un nombre borné de fois toute valeur sauf une au plus; il est d'ordre infini dans le cas contraire. M. W. Saxer a fait une classification pénétrante des points d'ordre infini.

Un théorème fondamental est le suivant: une famille de fonctions méromorphes dans un domaine où elles ne prennent pas plus de p fois trois valeurs fixes est quasi normale dans l'intérieur de ce domaine. On est alors conduit à établir des théorèmes correspondant aux types de ceux de MM. Picard, Landau, Schottky. Le rôle de la constante est ici joué par un polynome ou une fraction rationnelle. Par exemple: le rayon maximum du cercle d'holomorphie d'une fonction qui ne prend pas plus de p fois les valeurs zéro ou un ne dépend que des $p+2$ premiers coefficients de son développement de Taylor au centre pourvu que le dernier coefficient ne soit pas nul. Ce théorème comporte des extensions introduisant toujours une condition qui exclut les polynomes de degré p de l'ensemble des fonctions considérées. Ici encore, les théorèmes obtenus ne sont que des représentants d'une classe générale. A chaque critère de famille

quasi normale correspond un groupe de propositions du même type. Par exemple, on peut considérer les fonctions dont les valeurs sont représentées sur la sphère de Riemann par des points couvrant une ou plusieurs fois des régions dont l'aire totale ne dépasse pas un multiple donné de l'aire de la sphère.

On arrive à des propositions de même nature en remplaçant un polynome par une fraction rationnelle et les fonctions holomorphes par des fonctions méromorphes. Il est probable que l'on pourrait obtenir des extensions semblables en comparant la fonction à d'autres fonctions simples, une fonction algébrique par exemple. Cette recherche n'a pas encore été entreprise.

* * *

Pour une fonction entière $f(z)$, nous avons vu que la famille des fonctions $f(2^n z)$ n'est pas normale dans le cercle-unité. Il existe donc dans ce cercle, un point irrégulier ω, d'ailleurs distinct de l'origine. Il en résulte, comme l'a observé M. Julia, que les fonctions prennent dans leur ensemble toutes les valeurs, sauf peut-être une au plus, dans tout cercle (γ), si petit soit-il ayant ce point ω comme centre, sinon la famille serait normale en ω. Par conséquent, la fonction $f(z)$ prend toutes les valeurs sauf une au plus dans les cercles (γ_n) homothétiques de (γ) par rapport à l'origine avec le rapport d'homothétie 2^n. Les centres de ces cercles sont alignés sur une demi-droite J et la fonction prend toutes les valeurs sauf une au plus dans tout angle, si petit soit-il, ayant cette demi-droite comme bissectrice intérieure.

Une telle demi-droite existe-t-elle toujours pour une fonction méromorphe dans le plan ? M. Ostrowski a complètement résolu ce problème par une étude profonde des familles normales de fonctions méromorphes. Il a montré qu'il existe toujours une demi-droite J au moins, pour toute fonction méromorphe, sauf dans le cas exceptionnel de certaines fonctions de genre nul dont les zéros et les pôles vérifient des conditions de régularité qu'il a entièrement précisées.

Dans les cercles (γ_n), la fonction méromorphe $f(z)$ prend toutes les valeurs sauf deux au plus. Mais le nombre de fois que la

fonction prend une valeur dans le cercle (γ_n) demeure-t-il borné ou non lorsque n croît indéfiniment ? M. W. Saxer a posé et résolu cette question par une étude approfondie des familles de fonctions $f(2^n z)$ quasi normales dans l'anneau $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Il a ainsi établi que le nombre des zéros de $f(z) - a$ intérieurs au cercle (γ_n) augmente indéfiniment pour toute valeur a, sauf peut-être deux valeurs au plus, lorsque la fonction $f(z)$ n'est pas une fonction entière ou méromorphe de genre zéro dont les zéros et les pôles obéissent à certaines conditions de régularité naturellement moins étroites que précédemment.

Les demi-droites J sont des droites de condensation, pour les demi-droites qui joignent l'origine aux zéros de $f(z) - a$. Jusqu'à leur introduction, on étudiait surtout la distribution des modules de ces zéros et cette étude reposait en grande partie sur la théorie de la croissance. La théorie des familles normales a permis d'entreprendre l'étude des arguments de ces zéros et cette recherche est en plein travail. Dans certains cas, notamment celui des demi-droites de Borel, on étudie simultanément la distribution des modules et des arguments des zéros.

Je ne suivrai pas ce travail dans ses développements relatifs en particulier aux arguments des zéros de $f(z) - g(z)$, $g(z)$ désignant un polynome, une fraction rationnelle ou une fonction entière d'ordre inférieur à celui de $f(z)$. J'indiquerai seulement comment le rôle des demi-droites J est apparu sous un jour nouveau à la suite de divers travaux auxquels a donné naissance un mémoire fondamental de M. G. Pólya. Pour une fonction dont le rayon d'holomorphie est fini, considérons les demi-droites joignant le centre du cercle d'holomorphie aux points singuliers situés sur la circonférence. M. A. Bloch avait pressenti que, pour les fonctions à rayon d'holomorphie infini, c'est-à-dire les fonctions entières, les demi-droites J devraient correspondre aux demi-droites précédentes. Cette analogie a été mise en évidence d'une manière éclatante dans le travail de M. G. Pólya. Il a montré qu'un grand nombre de théorèmes relatifs à la distribution des points singuliers sur le cercle de convergence, avaient leurs correspondants exacts pour la distribution des demi-droites J d'une fonction entière, au moins dans le cas d'une fonction de genre infini.

Des méthodes de même nature que les précédentes ont permis de commencer l'étude des demi-droites d'indétermination complète. Ce sont des demi-droites telles que, lorsque la variable z décrit l'une d'elles, le point d'argument $f(z)$ décrit une courbe analytique qui s'approche autant qu'on le veut de tout point du plan. Pour la fonction elliptique de Weierstrass, par exemple, il passe par tout point du plan, une infinité de telles demi-droites formant un ensemble dense dans tout angle.

* * *

La théorie des familles de fonctions a permis aussi d'explorer les régions de régularité d'une fonction analytique, en les étudiant au point de vue de l'univalence ou de la multivalence. Une fonction est dite *multivalente d'ordre* p dans un domaine, si elle ne prend pas plus de p fois chacune de ses valeurs et si elle prend p fois au moins l'une d'elles. Lorsque p est égal à l'unité, la fonction est *univalente*. Les fonctions multivalentes d'ordre p forment une famille quasi normale puisqu'elles appartiennent à la famille des fonctions qui ne prennent pas plus de p fois trois valeurs arbitraires fixes. Mais cette dernière proposition a un caractère beaucoup moins élémentaire que la première. Cependant, tandis qu'on possède une démonstration élémentaire du fait que les fonctions univalentes forment une famille quasi normale, on n'est pas encore parvenu a en obtenir une du même type pour les fonctions multivalentes d'ordre supérieur à un.

Dans le cas des fonctions univalentes, la famille est quasi normale et il en est de même de la famille des fonctions inverses. C'est ce double fait qui conduit à une démonstration aisée de la représentation conforme sur un cercle d'un domaine simplement connexe arbitraire ou de la représentation conforme sur un plan, muni de fentes parallèles, d'un domaine d'un ordre de connexion quelconque.

On a beaucoup étudié récemment diverses familles de fonctions univalentes à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle et qui le représentent sur des domaines bornés, ou convexes, ou étoilés, ou spiralés. Au point de vue qualitatif, la plupart des résultats découlent de la normalité des familles considérées. Il en est de

même pour l'étude des familles de fonctions multivalentes d'ordre donné à l'intérieur d'un cercle. Dans cette voie, les premiers pas seulement ont été faits.

* * *

Le théorème de Weierstrass sur les suites de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur la frontière d'un domaine a été étendu dans différentes directions de manière à réduire de plus en plus la région ou l'ensemble des points en lesquels la convergence de la suite entraîne la convergence pour tout le domaine. Pour les fonctions bornées dans leur ensemble, Stieltjès a montré que la convergence uniforme dans une région si petite soit-elle, entraîne la convergence dans le domaine et plus tard, Vitali a établi qu'il suffit que la convergence ait lieu en une infinité de points ayant un point d'accumulation intérieur au domaine. Ces propositions ont été étendues par MM. Carathéodory et Landau aux fonctions admettant trois valeurs exceptionnelles. Tous ces théorèmes sont des cas particuliers du théorème général suivant: toute suite infinie de fonctions régulières appartenant à une famille normale ne peut converger sans converger uniformément; la convergence en une infinité de points ayant un point d'accumulation intérieur au domaine entraîne la convergence dans le domaine. A chaque critère nouveau de famille normale correspond un nouveau théorème du type Stieltjès ou Vitali.

Quand une suite de fonctions holomorphes ou méromorphes est simplement convergente, la convergence uniforme n'en résulte pas en général; mais, toute région en contient une autre où la convergence est uniforme et la fonction limite est formée de morceaux de fonctions analytiques en nombre fini ou en infinité dénombrable. Dans le cas des fonctions holomorphes, l'ensemble des points de convergence non uniforme, qui coïncide avec l'ensemble des points irréguliers de la suite, forme un continu d'un seul tenant avec la frontière du domaine. Tout récemment MM. Hartogs et Rosenthal ont pu définir complètement la structure de cet ensemble et celle de la fonction limite.

* * *

Je laisserai de côté la plupart des extensions des familles normales et n'en retiendrai que deux. La première est relative aux *familles complexes* dont les éléments sont formés par des groupes de p fonctions. Elles ont permis l'étude des fonctions algébroïdes au point de vue de leurs valeurs exceptionnelles. Elles ont montré la nécessité d'élargir le sens de ce dernier mot et de comprendre parmi les valeurs exceptionnelles les systèmes de p nombres non en involution avec les différentes déterminations en chaque point de la fonction algébroïde. Elles ont permis aussi une étude complète des couples de fonctions méromorphes uniformisant une relation algébrique ainsi que la théorie de certains systèmes de fonctions, comme par exemple les groupes de p fonctions dépourvues de zéro et dont la somme n'est jamais égale à l'unité.

La seconde extension que je signalerai est relative aux fonctions analytiques de plusieurs variables. La plupart des propositions concernant les familles de fonctions d'une variable peuvent être aisément étendues à ce cas. Tout récemment, M. Cacciopoli vient d'établir une proposition fondamentale: une famille de fonctions de plusieurs variables, normale par rapport à chacune de ces variables, est normale par rapport à l'ensemble des variables. Mais le théorème affirmant la convergence uniforme d'une suite de fonctions appartenant à une famille normale dans un domaine où la suite converge en une infinité de points s'accumulant autour d'un point intérieur, n'est plus toujours exact dans le cas de plusieurs variables. On peut donner divers exemples d'ensembles de points pour lesquels la proposition demeure vraie: il suffit, par exemple, dans le cas de deux variables, que les sécantes joignant le point d'accumulation aux différents points de l'ensemble admettent une infinité de directions limites distinctes. La question est liée à un problème qui se pose au début de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes: dans quels cas une fonction régulière en un point et nulle en une infinité de points ayant le premier comme unique point limite, est-elle identiquement nulle ?

* * *

Nous avons rencontré à diverses reprises les points irréguliers en lesquels une famille n'est pas normale. Dans le cas des fonctions analytiques, ces points ont le caractère de points singuliers collectifs en ce sens que des propriétés appartenant aux points singuliers d'une fonction paraissent distribuées entre les fonctions de l'ensemble pour lequel le point est irrégulier.

On l'a vu pour le théorème de M. Picard: autour d'un point irrégulier, la collectivité des fonctions prend toutes les valeurs sauf deux au plus. Les recherches de M. W. Saxer ont montré que l'on peut définir pour la collectivité un ordre analogue à l'ordre d'une fonction autour d'un point essentiel. Un théorème de M. Mandelbrojt a étendu aux points irréguliers, le théorème de M. Hadamard sur la multiplication des singularités. M. Julia et M. W. Saxer ont montré que l'ensemble des points irréguliers d'une famille de fonctions holomorphes ou méromorphes de plusieurs variables possédait les mêmes propriétés de structure que l'ensemble des points singuliers d'une fonction unique. MM. H. Cartan et Thullen ont montré que, effectivement, cet ensemble peut être pris comme ensemble de points singuliers d'une fonction. Un théorème de M. Hartogs affirme qu'une fonction des variables complexes x et y, régulière pour $x = 0$, lorsque y a une valeur fixe voisine de 0 et pour $y = 0$, lorsque x a une valeur fixe voisine de 0 est régulière en (x, y) autour du point $(0, 0)$. Le théorème de M. Cacciopoli affirme qu'une famille de fonctions de x, y, normale pour $x = 0$, lorsque y a une valeur fixe voisine de 0 et pour $y = 0$, lorsque x a une valeur fixe voisine de 0 est normale en (x, y) autour du point $(0, 0)$. Les faits de cette nature sont parmi les plus curieux que la théorie ait mis en évidence.

* * *

J'ai énoncé succintement quelques-uns des résultats que la théorie a permis d'obtenir, choisis surtout dans des régions où l'on aperçoit encore bien des problèmes à résoudre.

Presque partout ces résultats ont montré que des théorèmes de l'Analyse classique, anciens ou nouveaux, devaient être considérés comme des échantillons d'une propriété générale qui pouvait revêtir des formes diverses suivant le critère qui lui a donné naissance.

Ces résultats ont en général la forme qualitative: on en discerne aisément la raison. Une forme générale de raisonnement ne peut permettre d'atteindre la même précision que l'étude directe des cas particuliers. Le développement en série de Taylor, par exemple, qui s'applique à toute fonction analytique, ne permet que très rarement et difficilement de reconnaître les propriétés précises de chacune d'elles. D'autre part, les démonstrations utilisent très fréquemment le raisonnement indirect: l'explication réside sans doute dans le fait que l'on ne connaît pas tous les critères de normalité et qu'il faut en conséquence raisonner en se passant de chacun d'eux.

Parmi les mathématiciens qui ont apporté des contributions essentielles au développement de cette théorie, vous avez vu figurer plusieurs mathématiciens de la Suisse auxquels elle doit des progrès considérables. Je vous demande de vouloir bien trouver dans cet exposé un hommage à leurs beaux travaux et aux mathématiciens de votre pays.