W. DE SITTER (1872-1934). — Nous apprenons la mort de l'astronome hollandais W. de Sitter, bien connu pour ses travaux de mécanique céleste et de la théorie de la relativité. Nommé professeur d'astronomie à l'Université de Leyde en 1908, il fut appelé à la direction de l'Observatoire de Leyde en 1918. W. de Sitter était Membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris et Associé étranger de l'Académie nationale des Sciences de Washington.

M. Ed. VON WEBER, professeur à l'Université de Würzbourg, est décédé à l'âge de 64 ans.

M. Konrad ZINDLER, professeur émérite de l'Université d'Innsbruck, auteur du traité de géométrie réglée intitulé *Liniengeometrie mit Anwendungen*, est décédé à l'âge de 68 ans.

BIBLIOGRAPHIE

Marshall Harvey STONE. — **Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis** (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XV). — Un vol. in-8° (24 × 16) de VIII-622 pages. Prix: $6,50. Published by the American Mathematical Society. New-York, 501 West 116th Street. 1932.

C'est évidemment avec un certain retard que nous signalons ce bel ouvrage publié en 1932. Heureusement il n'a nullement vieilli et, bien que le sujet puisse se rapporter à des réalités physiques mouvantes, il est présenté ici sur une trame surtout mathématique qui pourra supporter l'écoulement de bien des années sans cesser de s'imposer aux plus vastes esprits. En parcourant ces pages, j'ai eu l'impression de retrouver, clairement enchaînées, bien des choses trouvées dans Hermann Weyl (voir pour analyse *L'Enseignement mathématique*, t. 30, 1931, p. 163), dans Eugen Wigner (*Ibid.*, p. 164), dans R. Courant et D. Hilbert (*Ibid.*, p. 165), dans A. G. Webster et G. Szegö (*Ibid.*, p. 167), dans Elie Cartan (*Ibid.*, p. 301), dans H. Bateman (*Ibid.*, t. 31, 1932, p. 133), dans B. L. van der Waerden (*Ibid.*, p. 136), surtout dans Johann von Neumann (*Ibid.*, p. 289) qui a situé la Mécanique quantique, dans l'espace hilbertien, d'un point de vue particulièrement élevé, enfin dans les œuvres de Hilbert lui-même (*Ibid.*, p. 293 et t. 33, 1934, p. 110) et dans P. A. M. Dirac (*Ibid.*, t. 32, 1933, p. 412) qui, avec un génie très personnel quoique de nature hilbertienne, a reconstruit bien des schèmes que l'esprit méthodique classera dans les espaces généraux à structure complexe.

On voit qu'il ne me coûte pas beaucoup de citer nombre de livres étrangers; c'est une raison pour ne pas oublier non plus les Espaces abstraits de Maurice Fréchet ni, plus anciennement, Charles Hermite, le rôle des opérateurs *hermitiques* étant un peu masqué, dans l'ouvrage de M. H. Stone, par les généralités à la Hilbert. Par contre le rôle de Stieltjes est souvent magnifié; les intégrales généralisées nécessaires au sujet sont généralement des intégrales de Lebesgue dont Stieltjes ne fut pas loin et, de plus, Stieltjes avait un sens de la transformation à structure élégante et précise qui s'accorde, au plus haut degré, avec la manière de Ch. Hermite. L'Ecole française, dont Stieltjes représentait si bien l'esprit quoique étant d'origine hollandaise, est donc ici en posture fort honorable.

Ces quelques réflexions générales étant faites, il est bien difficile d'analyser en quelques lignes un volume de plus de 600 pages où rien ne semble superflu. Nous ne pouvons même pas reproduire les équations de définition de l'espace hilbertien dont la plus caractéristique semble être $(g, f) = \overline{(f, g)}$ la barre qui surligne indiquant l'imaginaire conjuguée de (f, g). Les autres équations de définition sont suggérées d'assez près par les postulats ordinaires de l'Algèbre et de la Géométrie. D'ailleurs une liaison remarquable s'établit entre espace hilbertien général et espace euclidien en prenant pour intermédiaires les espaces *unitaires* où $(f, g) = \Sigma x_\alpha \overline{y_\alpha}$, l'indice de sommation α ne prenant que des valeurs finies. Et de là on peut revenir au cas hilbertien général en remplaçant le Σ par un symbole d'intégration convenable.

Les transformations T dans l'espace hilbertien ne peuvent être autre chose que des correspondances, d'élément à élément, qui sont particulièrement simples quand elles sont linéaires et alors symbolisées par des matrices d'ordre infini que les opérateurs intégraux ne tardent pas à remplacer. Viennent ensuite les équations $Tf - lf = g$, avec les spectres correspondants, déjà si proches de l'équation de Schrödinger et de toutes celles de la Mécanique quantique.

C'est avec les *Self-adjoint Transformations* que nous partons de travaux de Stieltjes publiés aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* en 1894. Ces travaux ont été fort prolongés depuis, notamment par Carleman et par Wintner. Ils ont trait, au fond, à des équations intégrales particulièrement symétriques traitées à une époque où l'on ne parlait pas encore d'équations intégrales tout en maniant cependant bel et bien la chose. Et, au delà des symétries ainsi envisagées il advint qu'on aperçut tout un calcul opératoire pouvant débuter par la considération d'une intégrale dite de Radon-Stieltjes. On peut ensuite revenir aux transformations self-adjointes et leur attribuer une structure unitaire; on se rapproche alors des domaines géométriques usuels.

Deux chapitres (VIII et IX) sont consacrés à divers types de transformations linéaires et de transformations symétriques, ce qui implique des considérations groupales à exprimer sous des formes intégrales.

Le chapitre X et dernier a trait aux applications. Il comprend plus de 200 pages. Que décrire ? C'est ici que nous retrouvons les opérateurs hermitiques, les transformations intégrales de Heaviside qui donnèrent son fameux Calcul symbolique récemment réexposé par Pierre Humbert (voir *L'Ens. mathématique*, t. 33, 1934, p. 118), les correspondances possibles d'équations intégrales à équations différentielles à propos desquelles on retrouve la théorie de Sturm-Liouville. Que d'autres choses nous passons sous silence avec beaucoup de regrets.

Un index fort bien fait termine le volume; il contient notamment une liste des symboles employés. L'auteur, comme l'indique le titre de l'œuvre, s'est tenu dans le domaine de l'Analyse mais il s'agit manifestement de cette

Analyse que l'on regrette si souvent de mal savoir quand on cherche à lire les ouvrages consacrés à la Physique intra-atomique. Nous avons maintenant de quoi l'apprendre dans un style des plus clairs, des plus esthétiques et des plus profonds. A. BUHL (Toulouse).

J. H. M. WEDDERBURN. — **Lectures on Matrices** (American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XVII [1]). — Un vol. gr. in-8° (27 × 17) de VIII-200 pages. Prix: $3. Published by the American Mathematical Society. New-York. 1934.

Ce volume consacré à la Théorie des matrices considérée en elle-même n'est pas d'une inspiration absolument nouvelle. Il rappelle notamment l'œuvre de H. W. Turnbull et A. C. Aitken déjà analysée dans la présente Revue (t. 31, 1932, p. 135). Il peut servir d'introduction à l'étude du volume précédent de M. H. Stone car il nous familiarisera ainsi avec les matrices finies avant de nous imposer les matrices infinies à la Hilbert. Tous ces exposés doivent une prodigieuse impulsion à la Mécanique des quanta, mais les géomètres purs qui les traitent tiennent, dans les circonstances présentes, à rester purs, ce qui peut se traduire par le renoncement à des intuitions utiles mais ce qui est une manière d'agir absolument défendable en soi. D'ailleurs, l'esprit de rigueur est toujours excellent et l'on peut prétendre que c'est en fouillant la Théorie des matrices qu'on parviendra aux meilleures formes de la science quantique.

Les matrices sont d'abord des instruments de transformation de vecteur à vecteur mais on comprend tout de suite que le vecteur transformé ne joue ici qu'un rôle secondaire; tout l'intérêt est dans l'instrument de transformation. C'est d'ailleurs ainsi que, plus généralement, dans les espaces de groupes, l'intérêt est beaucoup plus dans la structure de l'espace que dans les êtres qui s'y transforment.

Les premiers chapitres nous présentent le calcul matriciel élémentaire, les fonctions algébriques entières dont la variable est une matrice et dans un ordre d'idées qui semble être celui de la Théorie des déterminants. Sur toute matrice carrée, on peut lire un déterminant, ce qui ne signifie pas du tout qu'à toute transformation invariante du déterminant correspond une transformation invariante de la matrice mais il est fort intéressant de prendre pour guide les invariances du déterminant et de chercher ce qui leur correspond dans la théorie matricielle. M. Wedderburn semble avoir été dirigé par cette idée. Les matrices *composées* ont ainsi pour éléments les mineurs d'ordre quelconque d'un déterminant.

Au premier rang des matrices particulières sont les matrices hermitiennes auxquelles il faut joindre bientôt les matrices unitaires et les matrices orthogonales.

La recherche des matrices commutatives ne va pas sans d'intéressants schèmes quasi-géométriques quant à la distribution des éléments matriciels. Voilà qui n'est pas sans rappeler les *Geometrische Konfigurationen* de F. Levi (voir *L'Ens. math.*, t. 28, 1929, p. 331). Il y a aussi des méthodes de formation, par calculs rationnels, qui peuvent aboutir, en particulier, aux élégantes identités de Sylvester.

[1] Nous analysons ici le volume XVII après le volume XV. Pour XVI (G. A. BLISS) voir tome précédent, 1933, p. 419.