

MOTIFS POUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES NÉGATIFS

Autor(en): **Miller, G. A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25996>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MOTIFS POUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES NÉGATIFS

PAR

G. A. MILLER (Urbana, Ill.).

L'histoire des mathématiques se propose principalement d'établir des faits. Dans de nombreux cas, la clarté du sujet y trouve son avantage si l'on prend également en considération quelques-uns des motifs permettant de justifier ces faits. Le présent article a pour but d'exposer brièvement cinq motifs probables concernant l'introduction des nombres négatifs. Ce n'est pas à dire que ceux-ci furent les seuls mobiles; mais l'examen de ces motifs éclairera sans doute ceux qui n'ont peut-être pas accordé une attention suffisante aux principes qui sont à la base des nombres négatifs et fera saisir pourquoi leur entrée dans notre système moderne des nombres s'est faite d'une façon à la fois lente et hésitante. Les courts passages que les ouvrages sur l'histoire des mathématiques consacrent à cet objet soulèvent naturellement de nombreuses questions auxquelles on ne peut répondre que partiellement.

1. — Les recherches sur *la résolution des équations* conduisirent les Hindous à observer qu'un nombre positif peut avoir deux racines carrées. Plus tard, LÉONARD DE PISE observa dans son *Flos* (1225 environ) que la racine négative d'une certaine équation du second degré peut être interprétée comme une dette, bien qu'il n'adoptât pas l'idée générale qu'une équation puisse avoir des racines négatives qui doivent être prises en considération tout aussi sérieusement que ses racines positives. Cette

idée fut exprimée d'une manière effective environ quatre siècles plus tard par A. GIRARD, dans son ouvrage intitulé *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), où il énonçait, sans preuve, le théorème qu'une équation a autant de racines que l'indique son degré et où il exprimait les sommes des quatre premières puissances des racines d'une équation en fonction de ses coefficients. La tendance d'écrire les équations sous une forme générale a également conduit les mathématiciens à envisager des nombres négatifs. Jusqu'à l'époque de l'*Arithmetica integra* (1544), de Michael STIFEL, on avait l'habitude de considérer les équations du second degré sous les trois formes

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax, \quad x^2 = ax + b,$$

tandis que Stifel considéra et résolut ces équations sous l'unique forme $x^2 = px + q$. Il faut noter que les coefficients a et b représentent des nombres positifs, tandis que p et q sont positifs ou négatifs, et que Stifel ne s'est pas encore servi d'une lettre pour représenter soit un nombre positif, soit un nombre négatif. En plus, la quatrième forme de l'équation du second degré, $x^2 + ax + b = 0$ où a et b sont positifs, n'a été résolue qu'après l'époque de Stifel. L'histoire de cette forme n'a pas encore reçu l'attention qu'elle mérite.

2. — Un second motif se rapporte à l'usage des exposants négatifs et peut être appelé le *motif exponentiel*. De tels exposants furent utilisés en 1484 par le mathématicien français M. CHUQUET qui se servit également de l'exposant zéro, conformément à l'usage moderne. L'emploi des exposants négatifs prit plus tard une importance particulière par suite du développement des logarithmes, dont la théorie fut clairement établie par Stifel, environ soixante-dix ans avant la publication des tables de J. NÉPER dans son célèbre ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614). La table suivante se trouve déjà dans l'*Arithmetica integra*, de M. Stifel:

— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

L'établissement d'une correspondance (1,1) entre les termes d'une progression arithmétique prolongée indéfiniment dans les deux sens et d'une progression géométrique conduisit naturellement à l'observation qu'il est désirable de faire correspondre les bases de ces progressions, bien que ceci n'ait pas été fait dans les tables de J. NÉPER et de J. BÜRGI; c'est pourquoi ces tables furent bientôt remplacées par d'autres dans lesquelles ce principe fondamental est réalisé. En faisant correspondre à une progression arithmétique commençant par 0, une progression géométrique commençant par 1, les nombres positifs inférieurs à l'unité de cette dernière correspondent à des nombres négatifs de la première; c'est ainsi que l'usage des nombres négatifs apparut comme désirable dans les considérations relatives à cette correspondance (1,1) qui remonte jusqu'aux *Eléments* d'Euclide.

3. — Un troisième motif est fourni par la *Géométrie analytique* qui conduisit R. DESCARTES à adopter l'usage d'ordonnées négatives, suivi peu après par l'emploi général d'abscisses négatives, de sorte que les points réels dans les quatre quadrants sont déterminés d'une façon unique par leurs coordonnées. Les nombreux avantages résultant de l'étude de courbes dans les quatre quadrants furent bientôt reconnus par plus d'un auteur et contribuèrent à étendre l'usage des nombres négatifs longtemps avant qu'une théorie satisfaisante de ces nombres ait été développée. Cependant, les progrès que R. Descartes fit faire à cet usage ne dépassèrent point ceux que nous devons à quelques-uns de ses prédécesseurs et il n'adopta même pas les exposants négatifs de N. CHUQUET. Il pensait qu'un nombre négatif devait croître en même temps que sa valeur absolue et il n'avait pas une conception claire des coordonnées dans le sens moderne. — Cf. *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, tome 1, volume 1, page 35, et tome 3, volume 3, page 17, où l'on peut trouver d'autres références.

4. — Le motif dû à la *trigonométrie* se présenta pour la première fois lorsqu'on commença à étudier les fonctions cosinus, tangente, cotangente et sécante, pour un arc aboutissant dans le second quadrant. Puis, en passant au cas général d'un angle quelconque,

on fut également amené à attribuer un signe au sinus et à la cosécante. Ainsi le développement de la trigonométrie est lié d'une façon fondamentale à cette extension de la notion de nombre. Cela fut surtout le cas lorsqu'on envisagea les représentations graphiques de fonctions trigonométriques dans la dernière partie du dix-septième siècle et au commencement du dix-huitième. En 1600, B. PITISCUS énonça dans sa *Trigonometria* que la tangente et la sécante d'un angle supérieur à 90° sont impossibles et, même en 1727, F. C. MAIER, dans un mémoire présenté à l'Académie de Pétersbourg, attribua des signes incorrects à plusieurs fonctions d'angles supérieurs à 90° . On peut se rendre compte de l'extension que prennent certains développements trigonométriques lorsqu'on exclut l'usage des nombres négatifs en notant le fait que F. VIÈTE, en 1576, divisa l'examen du triangle rectangle sphérique en 60 cas, et que G.-J. RHAETICUS consacra 140 grandes pages au même sujet dans son *Opus Palatinum*, 1596.

5. — Dans la *théorie des groupes*. — L'évolution de la notion de groupes constitue un motif important pour l'introduction des nombres négatifs. Dans le tome I de son ouvrage *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (édit. 1932, p. 23), Félix KLEIN énonce le fait que « la création des nombres négatifs est motivée, comme l'on sait, par la demande que l'opération de la soustraction soit possible dans tous les cas ». Avant l'introduction du nombre 0 et des nombres négatifs, le système des nombres alors en usage ne constituait pas un groupe dans le cas de l'addition, puisque la notion de groupe, dans le sens habituel, implique que les inverses de ses opérations figurent dans le groupe et que l'inverse d'un nombre positif relativement à l'addition est le nombre négatif correspondant. Au seizième siècle, M. STIFEL et M. CARDAN énoncèrent explicitement le fait que la soustraction d'un nombre positif est équivalente à l'addition du nombre négatif correspondant. De ceci résulte que l'opération de la soustraction fut absorbée dans celle de l'addition lorsque les nombres négatifs furent introduits.

6. — Tous les exemples choisis qui précèdent, excepté une partie de ceux qui se réfèrent au premier motif, concernent les

nombres négatifs relativement aux opérations de l'addition et de la soustraction et sont par conséquent indépendants de la théorie de ces nombres dans le cas de la multiplication et de la division. Cela explique, semble-t-il, l'abondant usage des nombres négatifs avant que leur théorie ait été suffisamment développée au commencement du dix-neuvième siècle environ. La vigoureuse croisade contre l'emploi des nombres négatifs durant le dix-huitième siècle, menée principalement par R. SIMON, F. MASÈRES, W. FRENK et d'autres, est due en grande partie au fait qu'à cette époque aucun exposé satisfaisant de l'emploi de ces nombres dans la multiplication et la division n'avait été publié. En ce qui concerne les opérations de l'addition et de la soustraction, l'usage de ces nombres a été déjà suffisamment expliqué par les Hindous qui les interprétèrent géométriquement comme représentant des distances dans une direction opposée à celles représentées par les nombres positifs correspondants.

7. — On devrait insister sur le fait que l'usage des nombres négatifs n'est pas une nécessité logique mais bien une commodité logique. Leur utilité n'a pas été démontrée par un habile mathématicien avant que d'autres aient commencé à les employer, mais cette utilité a été observée occasionnellement par des chercheurs travaillant dans des domaines fort différents et qui s'aventurèrent à les employer suivant leur propre ligne de travail sans attendre un verdict sur la question de savoir si leur usage général, en tant que nombres, ferait plus de bien que de mal. Ils s'introduisirent dans les mathématiques en prouvant tout d'abord leur utilité ici et là sans que fût établi le fait qu'ils possédaient les qualifications nécessaires pour devenir membres réguliers de la famille mathématique. Une fois qu'ils eurent fait leur preuve en tant qu'utiles serviteurs dans de nombreux domaines, leurs qualifications furent trouvées suffisantes au point de vue théorique et ils furent alors admis en qualité de citoyens respectables du monde mathématique.

8. — Il semble probable que les motifs les plus forts pour l'usage des nombres négatifs, en ce qui concerne les mathématiciens européens, ne furent pas historiques mais plutôt pratiques.

Il est douteux que l'usage antérieur de ces nombres par les Hindous ait eu une influence quelconque sur leur emploi par les mathématiciens européens. Les Arabes, qui transmirent une bonne partie de l'ancienne doctrine mathématique à l'Europe, ne les avaient pas adoptés. Il est probable que les nombres négatifs prirent de nouveau naissance en Europe; leur étude s'y développa par étapes successives, tandis qu'aux Indes elle en resta à sa première étape. Leur développement en Europe se poursuivit pendant environ six siècles et rencontra le maximum de résistance à l'époque qui précéda immédiatement ses dernières étapes, caractérisées par les considérations géométriques relatives à la multiplication et la division.

9. — Les motifs pour l'introduction des nombres négatifs peuvent être considérés brièvement en partant de trois points de vue supplémentaires.

a) Leur usage dans l'addition et dans son inverse la soustraction. Etant donné qu'un nombre négatif est obtenu en soustrayant un nombre positif de 0, ce cas s'explique facilement.

b) Leur usage dans la multiplication et dans son inverse la division. Ici, les règles des opérations furent suggérées par celles concernant la multiplication de binômes de la forme $a - b$ où $a > b$. La question de savoir pourquoi les anciens Grecs se sont occupés de telles opérations n'est pas si claire, mais le fait qu'ils s'en sont occupés effectivement est établi dans les *Eléments* d'Euclide. Le désir d'approfondir et d'étendre ses connaissances était peut-être le principal motif de ces développements.

c) Leur usage dans l'élévation aux puissances et l'extraction des racines. Ici, l'établissement d'une correspondance (1,1) entre les termes d'une progression arithmétique et d'une progression géométrique semble fournir l'explication la plus plausible. La considération d'une correspondance de ce genre par Archimède et d'autres peut alors avoir été motivée également par le désir de connaître et par la conviction que l'on peut souvent étendre ses connaissances par l'étude des analogies.

Traduit de l'anglais par J.-P. DUMUR (Genève).