Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1934)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA MESURE DES GRANDEURS
Autor: Lebesgue, Henri
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25994

SUR LA MESURE DES GRANDEURS [1]

PAR

Henri Lebesgue, Membre de l'Institut (Paris).

V. — Longueurs des courbes. Aires des surfaces.

62. — Les traités de Géométrie élémentaire se bornent à l'évaluation de la limite des longueurs de certains polygones inscrits ou circonscrits à une circonférence, à l'évaluation de la limite des aires de prismes et de pyramides inscrites dans un cylindre ou un cône de révolution, et des aires des frontières de certains corps voisins d'une sphère. Il n'y a aucune définition générale donnée, de sorte que les objections des § 42 et 53 peuvent être opposées, par exemple, aux évaluations des aires des surfaces les plus simples, constituées par des parties de sphères, de cylindres et de cônes, dès qu'elles ne sont pas exactement celles considérées dans les manuels et pour lesquelles une convention de définition a été faite explicitement ou implicitement.

Tout cela est donc à peu près inexistant; si on l'a conservé, c'est que les notions de longueur d'une courbe, d'aire d'une surface sont parmi les plus anciennes et que les évaluations de longueurs et d'aires ont été fort étudiées par les géomètres et ont préparé la découverte du calcul infinitésimal.

L'importance pratique de ces notions, le rôle historique qu'elles ont joué dans le développement de la science obligent donc à conserver ce chapitre, mais il est à constituer et non plus seulement à améliorer comme c'était le cas pour les chapitres précé-

---

[1] Voir *L'Enseignement mathématique*, XXXI[e] année, p. 173-206. — XXXII[e] année, p. 23-51. — XXXIII[e] année, p. 22-48.

dents. De ceux-ci, le contenu était fixé par la tradition, on n'avait à s'occuper que des modes de démonstration et de présentation; maintenant, le contenu même du chapitre est à déterminer. Or ce contenu dépend nécessairement de l'importance donnée aux mathématiques dans les classes comme aussi des programmes d'examen. Il ne saurait donc être question d'écrire ici un chapitre pour l'enseignement moyen; mais il est possible d'y traiter des longueurs et des aires car ce qu'il convient de dire à ce sujet est à déterminer tout aussi bien pour l'enseignement supérieur que pour l'enseignement secondaire. Dans beaucoup de cours d'enseignement supérieur, en effet, à l'occasion des longueurs et des aires on calcule des intégrales, simples et doubles, en coordonnées rectilignes ou polaires, mais les questions de définition, tout ce qui est géométrique, est volontiers escamoté.

En France, il arrive que dans certains enseignements on se borne à dire: on appelle longueur d'une courbe donnée en coordonnées rectangulaires par $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, la fonction $s(t)$ définie par la relation:

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \ ;$$

et le tour est joué !

Je vais donc étudier la question sans me préoccuper de délimiter ce qu'on en pourrait dire dans l'enseignement moyen et ce qu'il faudrait réserver à des élèves plus âgés. Je me bornerai d'ailleurs à élucider les notions.

63. — Auparavant, un court résumé historique nous renseignera sur les difficultés à éviter et fera comprendre la nécessité de certaines précautions.

Pour les Anciens, les notions de longueur, d'aire, de volume étaient des notions premières, claires par elles-mêmes sans définitions logiques. Les axiomes, presque tous implicites, qu'ils utilisaient pour les évaluations n'étaient pas, à leurs yeux, des définitions de ces notions. Il s'agissait toujours pour eux de la place occupée par la ligne, la surface ou le corps dans l'espace. La difficulté ne commençait que lorsqu'il s'agissait de mesurer cette place, de lui attacher un nombre et cette difficulté est uniquement l'existence des incommensurables. D'où l'aversion pour les nombres, les efforts faits pour ne les utiliser que le plus tardivement possible, les habiletés étranges de présentation employées, qui ont déjà été signalées, par exemple aux § 14 et 20.

Cauchy, le premier, fournit une définition logique de ces notions; il le fit incidemment et en quelque sorte sans le vouloir.

On a vu dans les deux chapitres précédents comment on peut élucider les notions d'aire d'un domaine plan et de volume d'un corps en les dépouillant de leur sens métaphysique, en les considérant comme des nombres et en construisant ces nombres par la répétition indéfinie des opérations mêmes qui étaient considérées auparavant comme fournissant approximativement les mesures des aires et volumes à cause d'axiomes, de postulats non énoncés explicitement et dont l'énonciation explicite, ou la démonstration, fournit la définition logique cherchée. On sait que Cauchy construisit, par un procédé analogue, l'intégrale définie des fonctions continues et démontra ainsi l'existence des fonctions primitives.

Ce faisant, Cauchy définissait logiquement non seulement l'aire d'un domaine plan, le volume d'un corps, mais, puisqu'il donnait la définition logique de $\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$ et de $\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$, il inaugurait le mode de définition de la longueur que je signalais tout à l'heure, § 62, et suggérait une définition analogue pour l'aire.

Du point de vue logique la question est entièrement traitée; fixons bien ce qui a été atteint.

On dit souvent que Descartes — il conviendrait au moins d'ajouter au nom de Descartes celui de Fermat — a ramené la Géométrie à l'Algèbre; ceci pourtant n'était pas vrai tant qu'il fallait faire appel aux notions géométriques: longueurs, aires, volumes. Ce n'est qu'après Cauchy que le rattachement des notions géométriques à des opérations de calcul a été effectué. Alors la Géométrie a bien été réduite à l'Algèbre, c'est-à-dire, puisque le nombre en général résulte de la mesure des longueurs (chapitre II), que *la géométrie du plan et celle de l'espace ont été ramenées à la géométrie de la droite.*

Pour arriver à ce qu'on appelle l'*arithmétisation* de la géométrie, il ne restait plus qu'à définir le nombre en général à partir des entiers sans parler de mesures, d'opérations effectuées sur la droite et c'est ce que permet l'emploi d'une coupure, c'est-à-dire ce qu'on obtient en utilisant une fois de plus le procédé de Cauchy consistant à prendre comme définition les opérations mêmes qui permettent l'évaluation approchée du nombre à définir. Car la donnée d'une coupure n'est pas autre chose, cela a déjà été dit, que l'exposé en termes abstraits du résultat d'une mesure de longueur.

64.— Nous voici donc parvenus à la forme la plus abstraite, la plus purement logique d'exposition par l'emploi constant de cette sorte de renversement qui servit d'abord à Cauchy. Et pourtant, ni le Géomètre, qui voudrait comprendre quels liens géométriques unissent les lignes, surfaces ou corps à leurs longueurs, aires et volumes, ni le Physicien, qui voudrait savoir pourquoi il faut assimiler les longueurs, aires et volumes physiques à telles intégrales plutôt qu'à d'autres, ne sont satisfaits. Des études s'imposaient.

Les premiers résultats relatifs aux courbes et surfaces ont tous été obtenus comme conséquences de cette opinion qu'une courbe est une ligne polygonale à une infinité de côtés, qu'une surface est une figure polyédrale à une infinité de faces. Les lignes polygonales approchées d'une courbe qui se présentent les premières à l'esprit sont les lignes inscrites et circonscrites. D'après Peano les postulats admis par Archimède équivalent à la définition suivante: La longueur d'un arc de courbe plane convexe est la valeur commune de la limite supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites et de la limite inférieure des circonscrites. Archimède utilisait donc de la même manière la droite et le point, ces éléments également primordiaux de la géométrie des Anciens; il envisageait la courbe sous ses deux aspects dualistiques: lieu de points et enveloppe de droites.

On sait que, peu à peu, la notion de droite est devenue une notion secondaire; elle n'a reconquis quelque peu de son autonomie que lorsque l'on eut créé les coordonnées de droite à l'image des coordonnées de point et introduit l'idée de dualité.

Pour la question qui nous occupe, cette évolution s'est manifestée par l'élargissement de la notion de courbe en celle de trajectoire: la courbe est encore un lieu de points, mais n'est plus nécessairement une enveloppe de droites; on peut encore considérer les polygones inscrits, mais il n'y a plus nécessairement de polygones circonscrits. Bref, dans l'étude des longueurs, on n'a plus considéré que les lignes polygonales inscrites, oubliant d'ailleurs qu'on les avait choisies de préférence seulement à cause de leur simplicité et qu'elles ne possèdent aucune vertu spéciale qui les imposent plus à notre attention que les autres lignes polygonales approchées.

Tous les mathématiciens ont alors admis que la longueur d'une courbe (l'aire d'une surface) est la limite de la longueur d'une ligne polygonale inscrite (de l'aire d'une surface polyédrale inscrite) quand on en fait varier les éléments de façon qu'ils tendent tous vers zéro. Et quand l'étude de ces définitions a révélé des difficultés, les mathématiciens ont été assez désemparés.

Pour les courbes, cette étude a été faite surtout par L. Scheeffer et par C. Jordan [1]; la limite qui sert à la définition de la longueur existe bien toujours, en quelque sorte, mais elle peut être infinie: il y a des courbes dont tout arc, si petit soit-il, n'a pas de longueur ou, si l'on veut, a une longueur infinie. Résultat paradoxal en ce qu'il est contraire à l'emploi usuel du mot « petit » et qui, par cela même, a obligé à préciser et à discerner des notions jusque là confondues, mais résultat qui ne pouvait être une catastrophe comme l'avait été, au jugement des géomètres pythagoriciens pour qui les fractions étaient les seuls nombres, la découverte analogue d'un segment n'ayant pas pour eux de longueur. La difficulté, si difficulté il y a, ne se présente en effet pas avec les courbes simples, on pouvait donc toujours, suivant un procédé pas très recommandable mais souvent employé, déclarer que les courbes sans longueur n'étaient pas de vraies courbes, les mettre, au moins momentanément, *en dehors des mathématiques*, c'est-à-dire remettre leur étude à plus tard, alors qu'il avait été impossible de mettre la diagonale du carré en dehors des mathématiques.

[1] Elles ont conduit celui-ci à la notion capitale de fonction à variation bornée.

Pour les surfaces, on arriva à un résultat plus troublant. Schwarz avait eu l'occasion de réfléchir à la notion d'aire d'une surface pour ses recherches sur le corps de volume maximum parmi tous ceux d'aire donnée; dans une lettre à Genocchi, il montra que les aires des surfaces polyédrales inscrites dans une surface donnée n'ont aucune limite. Et cela quelle que simple que soit la surface, même quand il s'agit d'un cylindre de révolution. L'exemple de Schwarz se présente si naturellement, quand on réfléchit à la question, que Peano l'obtenait de son côté à peu près simultanément et qu'il a été retrouvé et publié depuis par d'autres Géomètres: Divisons la surface latérale d'un cylindre de révolution en m parties égales par des plans de section droite; dans chaque circonférence section inscrivons un polygone régulier convexe de n côtés, les demi-plans passant par l'axe et les sommets d'un de ces polygones tournant de $\frac{\pi}{n}$ quand on passe d'une section droite à la suivante. Puis, considérons la surface polyédrale inscrite formée des triangles isocèles dont les bases sont les côtés de ces polygones et dont les sommets sont sommets des polygones inscrits dans les sections droites voisines. Il est clair qu'on a là une surface aussi approchée qu'on le veut du cylindre dès que n augmente indéfiniment; il est clair aussi que la limite de l'aire de cette surface polyédrale dépend, elle, de la limite de $\frac{n}{m}$. On peut donc faire en sorte que cette limite d'aire n'existe pas, on peut aussi faire en sorte qu'elle existe et ait une valeur ou une autre.

65. — La définition géométrique de l'aire des surfaces s'écroulait; ce n'était pas une catastrophe puisque tout le monde était d'accord sur ce point: l'aire est $\int\int\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$, au moins dans les cas simples. On avait là une définition analytique, il n'y avait qu'à en donner des interprétations géométriques et même on possédait déjà de telles interprétations. Avant que soit connu l'exemple de Schwarz qui montra l'impossibilité de conserver la définition alors admise, les difficultés de cette définition s'étaient révélées à tous ceux qui avaient essayé de la mettre en œuvre rigoureusement; certains avaient imaginé de

restreindre la famille des polyèdres inscrits de façon à pouvoir prouver l'existence d'une limite de leurs aires. Ainsi: l'aire d'une surface est la limite des aires de surfaces polyédrales inscrites dans la surface, quand leurs faces deviennent infiniment petites dans toutes les dimensions et *de façon que les angles de ces faces ne tendent pas vers zéro*, disaient les uns, *de façon que les angles que font les faces avec la surface tendent vers zéro*, disaient d'autres.

Seulement ces restrictions sont artificielles; rien ne prouve que d'autres restrictions simples ne donneraient pas une autre limite; on ne sait laquelle de toutes ces limites correspond le mieux à la notion physique d'aire. De plus, les mathématiciens désiraient une définition de l'aire ayant une étendue d'application quelque peu comparable à celle de la définition de la longueur étudiée par Scheeffer et Jordan. On imagina donc, Peano et Hermite en particulier, d'autres définitions, mais si éloignées de la forme primitive que l'aire n'y apparaît même plus comme une limite d'aires de polyèdres !

Je montrerai dans un moment qu'on avait, en réalité, tous les faits mathématiques qui permettaient de comprendre l'accord entre la notion physique d'aire et l'expression analytique et d'autre part de satisfaire au besoin de généralité des Géomètres; cela ne fut compris que peu à peu.

66. — Si l'on n'avait pas été hypnotisé par le mot inscrit, si l'on n'avait pas oublié qu'*inscrit* n'avait été choisi que comme l'un des moyens d'arriver à *approché* on se serait aperçu que la difficulté rencontrée pour les aires existait également pour les courbes; or la différence entre courbes et surfaces était précisément ce qui choquait le plus. On me permettra de faire appel ici à mes souvenirs.

Quant j'étais écolier on admettait, en France, je l'ai déjà dit, que l'on pouvait évaluer longueurs, aires et volumes par des passages à la limite. Bientôt des doutes allaient se manifester dans les manuels; c'est que les étudiants auxquels Hermite avait, dans son cours d'Analyse, fait connaître l'objection de Schwarz étaient devenus des maîtres à leur tour. Au reste, tout prédisposait alors chez nous à l'analyse critique des notions: les recherches sur les fonctions de variable réelle et sur les ensembles qu'on commençait à prendre en considération, l'enseignement de Tannery qui avait éveillé chez beaucoup de ses élèves des soucis de compréhension complète ou tout au moins de précision verbale. Alors on se mit à douter, parfois sans bien savoir de quoi on doutait; on confondit, par exemple, avec un raisonnement sur les limites, la détermination de l'aire du cercle à l'aide de celles des polygones qu'il contient ou qui le contiennent, § 42. Mais, auparavant, quand j'étais écolier, maîtres et élèves étaient satisfaits du raisonnement par passage à la limite.

Pourtant ce raisonnement cessa de me satisfaire quand des camarades m'apprirent, vers ma quinzième année, que dans un triangle un côté est égal à la somme des deux autres et que $\pi = 2$. Soit ABC un triangle, soient D, E, F les milieux de BA, BC, CA, la ligne brisée BDEFC a pour longueur AB + AC; en recommençant de même sur les triangles DBE, FEC on arrive à une ligne brisée de même longueur à huit côtés, etc. Or ces lignes brisées ont BC pour limite, donc la limite de leurs longueurs, c'est-à-dire leur longueur commune AB + AC est égale à BC. Le raisonnement relatif à π est analogue.

Rien, absolument rien ne distingue ceci des raisonnements qu'on nous faisait pour évaluer la longueur et l'aire d'une circonférence, la surface et le volume du cylindre, du cône et de la sphère. Cette constatation a été pour moi pleine d'enseignements.

Au reste, tout paradoxe est particulièrement instructif; l'examen critique de paradoxes, le redressement de raisonnements erronés devraient, à mon avis, être des exercices normaux, et fréquemment répétés, dans les classes de l'Enseignement secondaire.

L'exemple précédent montre que les passages à la limite dans les questions de longueur, d'aire, de volume ne peuvent être faits sans légitimation et il suffit, tout aussi bien que celui de Schwarz, pour éveiller tous les soupçons.

67. — Regardons mieux cet exemple; nos lignes brisées en dents de scie, qui tendent vers BC ont pour mesure AB + AC, c'est-à-dire n'importe quel nombre supérieur à BC. Donc, si l'on a une suite de lignes polygonales tendant vers une courbe $\mathcal{C}$ et

dont les longueurs ont une limite $\mathcal{L}$, en opérant sur chaque côté de ces lignes comme sur BC on en déduit de nouvelles lignes dont le limite des longueurs sera tel nombre qui nous plaira, supérieur à $\mathcal{L}$. *Les limites des longueurs de lignes polygonales tendant vers une courbe* $\mathcal{C}$ *sont tous les nombres supérieurs à un nombre* $\mathcal{L}_0$ *et ce nombre* $\mathcal{L}_0$. C'est pourquoi, quand j'ai eu besoin d'une définition à large champ d'application de la longueur et de l'aire, j'ai proposé de prendre $\mathcal{L}_0$ pour la longueur et le nombre analogue pour l'aire; j'y étais même en quelque sorte obligé, puisque $\mathcal{L}_0$ est le seul nombre qui se distingue des autres, au premier abord du moins, parmi toutes les limites de longueurs. Il suffit à déterminer l'ensemble des limites de longueurs, il est le compte rendu complet des résultats de la recherche de ces limites.

Je n'ai pas ici à examiner ces définitions générales, elles ne viennent qu'après que les notions physiques de longueur et d'aire ont été raccordées avec les définitions analytiques et c'est ce raccord qui doit nous occuper, puisqu'ici notre but est pédagogique.

68. — La longueur d'une courbe matérielle se détermine expérimentalement. Pour qu'un nombre soit déterminable expérimentalement il faut que, si les données varient peu, le nombre lui-même varie peu, car on ne sait jamais utiliser exactement les données mais seulement des données voisines. Il faut donc que le nombre soit en quelque manière déterminé de façon continue par les données.

Essayons de préciser cela. La détermination expérimentale se fait suivant une certaine technique qui, s'il s'agit de notions qui peuvent être précisées en notions géométriques, comportera la mise en place d'appareils, la mesure de telles distances, de tels angles, etc.; il faudra que de petites erreurs sur ces positions et ces mesures n'entraînent qu'une faible variation du résultat. La définition géométrique s'obtiendra alors en énonçant la technique, mais en donnant aux opérations qu'elle utilise le caractère précis et absolu de la géométrie. Si une définition géométrique ne fournit pas un nombre variant continûment avec les données, c'est qu'elle n'est pas en accord avec le procédé expérimental de mesure; elle donnera peut-être, dans certains cas, la traduction de la notion pratique, mais il faudra le prouver. C'est une mauvaise définition.

Examinons de ce point de vue la définition classique de la longueur; elle ordonne de prendre un polygone inscrit dans la courbe et d'en augmenter indéfiniment le nombre des côtés, c'est-à-dire de prendre des points sur la courbe en nombre croissant. Or, si l'on essaie d'appliquer à une courbe, ou à un segment BC, cette technique, on aura des lignes polygonales en dents de scie à sommets voisins de la courbe, ou de BC. Plus on augmentera le nombre des points, plus l'erreur commise s'accroîtra; la technique expérimentale comporte certainement des prescriptions, peut-être transmises seulement par une tradition non exprimée, limitant le nombre des sommets des polygones d'après la limite supérieure de l'erreur qu'on peut commettre sur la position de ces sommets. La définition classique est donc mauvaise, c'est-à-dire que ce ne peut être elle qui traduise vraiment la technique et qui rende évident l'accord entre la théorie et la pratique; pour obtenir une bonne définition il nous faut examiner mieux la technique expérimentale.

La difficulté c'est que les physiciens n'ont jamais eu à effectuer, directement du moins, des mesures précises de longueurs de courbes et que la technique est restée grossière. On ne trouve de mesures précises qu'en géodésie, mais il s'agit alors de longueurs de segments; les mesures de route sont peut-être ce qui est le moins imprécis ensuite. Examinons le travail d'un arpenteur mesurant une route; s'il mettait les deux extrémités de sa chaîne sur les deux bords différents de la route nous serions tous d'accord pour dire qu'il n'opère pas correctement. Pourquoi ?

A cette question nous commencerions très probablement par répondre qu'il s'agit d'opérer non pas sur la bande qu'est la route, mais sur la courbe, axe de la route. Quel est cet axe, comment l'obtenir ? Si, par exemple, il faut prendre les milieux des perpendiculaires aux deux bords, il s'agit là d'une opération qui présuppose que l'on connaît pratiquement la direction de la route; la technique sera basée sur la connaissance pratique de la route en position et direction. De quelque façon que l'on cherche à préciser quelle est la bonne manière d'opérer pour un arpenteur, on arrive à cette même conclusion.

Comment opère un géodésien pour mesurer le segment BC ? Il s'efforce de préciser au mieux les points B et C; puis, s'il veut diviser BC par un point D il s'assure que D est sur BC par l'accord des directions BD et DC. Ainsi, sauf en ce qui concerne B et C, les géodésiens obtiennent les positions des points par des déterminations de directions de façon précisément à éviter de considérer BC comme la limite de polygones en dents de scie.

Retenons de tout cela qu'on mesure pratiquement une courbe en utilisant la connaissance de ses points et de ses tangentes et qu'on le fait à l'aide de polygones dont les points sont approchés de ceux de la courbe et dont les côtés sont approchés des tangentes à la courbe. Le mode pratique de mesure d'une courbe sera expliqué si l'on démontre que ces polygones, approchés en position et en direction, ont des longueurs tendant vers une limite quand l'approximation croît indéfiniment; la longueur sera alors définie de façon logique comme la valeur de cette limite.

Or, cette démonstration est immédiate, de même que celle analogue relative aux aires, d'où les définitions des longueurs et des aires que nous adopterons. Nous voici donc revenus à la conception initiale d'Archimède qui utilisait les courbes et surfaces sous leur double aspect dualistique et à des définitions qui avaient été proposées, § 65, avant même qu'on ait reconnu que les polygones (ou polyèdres) approchés ont des longueurs (ou des aires) qui ne tendent vers aucune limite. La longueur que nous définissons varie infiniment peu quand la courbe mesurée varie infiniment peu en position et direction. Positions des points de la courbe, directions de ses tangentes sont les données dont la longueur dépend de façon continue.

69. — Les considérations qui viennent de nous conduire à ces conclusions ne sont pas celles par lesquelles les Géomètres y sont parvenus; même, les idées qui nous ont guidés semblent en contradiction avec celles qui sont habituelles; nous admettons qu'une définition est assujettie à des conditions, qu'il y a des définitions bonnes et des définitions mauvaises, alors qu'on répète couramment « les définitions sont libres ». Je n'ai jamais compris cette phrase; je ne sais ni de quelle liberté il s'agit, ni dans quel sens on prend le mot définition. S'il a le sens de déno-

mination, chacun, en effet, est libre d'adopter le langage qui lui plaît, au risque parfois de rester incompris. S'il a le sens de détermination et si l'on prétend seulement que chacun peut prendre pour sujet de ses méditations ce qui lui plaît, certes; mais sous peine, peut-être, d'être seul à s'intéresser à ce sujet et de faire un effort inutile au développement de la science. Quoiqu'il en soit, pour nous qui regardons les mathématiques comme une science appliquée, les définitions ne sont pas libres; tout au moins certaines ne sont pas libres, celles qui doivent préciser les notions pratiques. Pour celles-là l'obligation de non contradiction, qui est sous-entendue dans l'adage cité, n'est pas la seule condition à remplir. Elle est au contraire la seule si les mathématiques ne sont que de la logique.

Le chemin qu'ont suivi les Géomètres pour arriver aux définitions du § 68 est tout différent de celui que nous avons parcouru. Ils ne se préoccupaient nullement de l'accord entre les mesures physiques et les définitions par les deux intégrales classiques; persuadés qu'ils étaient de cet accord, au moins dans les cas simples, ils n'en recherchaient pas les raisons, mais ils étudiaient le nombre longueur attaché à une courbe, fonction d'une courbe, le nombre aire attaché à une surface, fonction d'une surface. On a naturellement cherché pour ce nouveau genre de fonctions, pour ce nouveau genre de dépendances, ce que devenait la notion de continuité.

Or, prenons pour simplifier le cas de la courbe plane $y = f(x)$, et d'un nombre attaché à cette courbe, il arrive que certains de ces nombres varient peu dès que $f(x)$ varie peu uniformément. Par exemple, si on a $|f - f_1| < \varepsilon$ quel que soit x, on a:

$$\left| \int_a^b f(x)\, d(x) - \int_a^b f_1(x)\, d(x) \right| < \varepsilon\, |b - a| \; ;$$

$\int_a^b f(x)\, dx$ est donc un tel nombre.

D'autres, par exemple

$$\int_a^b \sqrt{f^2(x) + f'^2(x)}\, dx \; ,$$

varient peu dès que $f(x)$, d'une part, et $f'(x)$, d'autre part, varient toutes deux uniformément peu, mais il ne suffirait pas que la première condition soit seule réalisée. Pour d'autres encore il suffit que $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ varient toutes trois uniformément peu. Les géomètres ont ainsi été conduits à distinguer pour les nouvelles fonctions qu'on appelle des fonctionnelles, divers modes de continuité appelés continuité d'ordre zéro, d'ordre 1, d'ordre 2, etc.

La longueur d'une courbe, l'aire d'une surface définies par des intégrales où ne figurent que des dérivées premières sont les types mêmes des fonctionnelles ayant la continuité d'ordre 1 et pas la continuité d'ordre zéro. Et ce fait, d'importance capitale, expliquait l'échec de l'ancienne définition de l'aire et le succès de la définition par polyèdres inscrits et à faces peu inclinées sur les plans tangents de la surface. En même temps cela montrait l'inutilité de la considération de polyèdres inscrits, il suffit d'avoir des polyèdres voisins; bref on est conduit aux définitions du paragraphe précédent.

On s'explique aussi divers faits qu'on a pu remarquer: La longueur peut être définie par la considération des polygones inscrits, c'est la méthode de Scheeffer et de Jordan, on ne peut définir l'aire de façon analogue, c'est l'objection de Schwarz. C'est qu'en effet si C est une courbe à tangentes continues, si P est un polygone inscrit dans C et si AB est un des côtés de P, AB fait avec les tangentes à C aux points de l'arc AB de C un angle inférieur au plus grand angle que font entre elles les tangentes aux points de l'arc AB (d'après le théorème des accroissements finis si la courbe est plane, d'après une conséquence de ce théorème si elle est gauche). Ainsi P est indéfiniment approché de C, en direction comme en position, si le nombre des sommets de P croît indéfiniment sur tout arc de C.

Au contraire, multiplier dans toute partie d'une surface les sommets d'un polyèdre inscrit dans cette surface, n'augmente l'approximation de la surface et du polyèdre qu'en position et non en direction. Tandis que si le polyèdre est à faces triangulaires et si l'on assujettit les angles de ces faces à ne pas descendre au-dessous d'une certaine limite, en augmentant le nombre des sommets on assure l'approximation en position et direction;

cela se vérifie facilement. Ainsi s'explique une définition de l'aire signalée au § 65.

On a noté aussi qu'un géodésien, voulant mesurer BC, s'assure de la position de B et de C, c'est-à-dire cherche à bien distinguer le segment BC des segments peu différents, mais que, par la suite, ce qu'il cherche à bien préciser, ce sont des directions. C'est qu'en effet pour que $f(x)$ et $f_1(x)$ diffèrent très peu dans (a, b), en même temps que $f'(x)$ et $f'_1(x)$, il suffit que cette seconde condition soit réalisée et que $f(a)$ diffère très peu de $f_1(a)$.

Tout nous confirme dans cette conviction que les notions physiques de longueur et d'aire sont relatives à des courbes lieux de points et enveloppes de droites, à des surfaces lieux de points et enveloppes de plans et, comprenant mieux ces notions, nous pouvons nous proposer de les exposer.

70. — Un premier exposé commencerait par l'indication de quelques problèmes pratiques amenant à des mesures de longueurs et permettant par suite de concevoir que les hommes ont été conduits à cette notion physique: longueur de la barrière nécessaire pour entourer un champ, poids de métal nécessaire à la fabrication d'une rampe d'escalier, nombre de tombereaux de cailloux nécessaires au rechargement d'une route. On y joindrait quelques remarques sur la façon dont on fait pratiquement ces mesures et, comme conclusions, on poserait la définition logique. Les courbes dont nous nous occuperons ont des tangentes qui varient d'une façon continue avec le point de contact; pour une telle courbe nous dirons qu'un polygone est approché en position de moins de ε et en direction de moins de η si on peut établir entre les points de la courbe et ceux du polygone une correspondance univoque dans les deux sens et continue telle que la distance de deux points correspondants est inférieure à ε et que les tangentes en ces deux points homologues forment entre elles un angle inférieur à η. Par angle des tangentes, nous entendons l'angle des tangentes dirigées; par tangente en un point d'un polygone nous entendons le côté passant par ce point ou, s'il s'agit d'un sommet, chacun des deux côtés qui aboutissent à ce point. Nous appelons *longueur de la courbe* la limite vers laquelle tendent les longueurs des polygones

approchés de la courbe quand ε et η tendent simultanément vers zéro.

Cette définition exige la démonstration de l'existence de la limite. Avant de donner cette preuve, je fais remarquer que les précisions de langage que je viens de prendre seraient inutiles, et même nuisibles, s'il s'agissait d'un exposé pour de jeunes élèves. Dans ce cas, on édulcorerait la définition précédente en faisant comprendre, sans la préciser en mots, la notion de polygone approché en position et direction et on admettrait l'existence de la limite, en spécifiant qu'on l'admet. Puis on appliquerait la définition à la circonférence. Pour cela, on remarquerait que les polygones réguliers inscrits [ou si l'on veut les polygones réguliers circonscrits, ou les deux sortes de polygones, si l'on veut] sont approchés en position et direction et, puisqu'entre l'aire A d'un tel polygone et la longueur L de son périmètre on a la relation:

$$A = \frac{1}{2} L \times \text{apothème} ,$$

on en déduirait:

$$\text{aire du cercle} = \frac{R}{2} \times \text{longueur de la circonférence} .$$

Aucun changement essentiel avec ce que l'on fait habituellement, on se bornerait à préparer l'étude plus complète à faire ultérieurement quand les élèves seront plus mûrs et auront plus de temps à consacrer aux mathématiques.

71. — Ceci dit, démontrons l'existence de la limite. Soit ABC ... L un polygone P inscrit dans la courbe Γ et allant de l'origine A de cette courbe à son extrémité. Γ est partagée en arcs AB, BC, ...; soit η_0 le maximum de l'angle que font deux tangentes à Γ en deux points d'un même arc partiel AB, BC, ... L'angle η_0 tend vers zéro quand le polygone inscrit varie en se rapprochant de Γ.

Considérons un polygone Π approché de Γ et soient α, β, ... λ les points de ce polygone correspondant à A, B, ... L. Prenons un arc partiel de Γ, soit CD, par exemple, et la portion $\gamma\delta$ correspondante de Π. $\gamma\delta$ est une ligne polygonale. Chaque côté fait avec certaines tangentes à l'arc CD un angle inférieur à η, si Π est approché en position à moins de ε et en direction à moins de η. Donc ce côté fait avec la corde CD un angle inférieur à $\eta + \eta_0$. Supposons P et Π assez approchés de Γ pour que $\eta + \eta_0$ soit inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Alors les projections des côtés de $\gamma\delta$ sur CD sont toutes de même sens et on a, puisque les projections de γ et de δ sont à moins de ε des points C et D.

$$\mathrm{CD} - 2\varepsilon \leqq \text{longueur de } \gamma\delta \leqq \frac{\mathrm{CD} + 2\varepsilon}{\cos(\eta + \eta_0)} < \frac{\mathrm{CD}}{\cos(\eta + \eta_0)} + 4\varepsilon\ .$$

D'où

$$\text{Long de P} - 2n\varepsilon \leqq \text{longueur de } \Pi < \frac{\text{Long de P}}{\cos(\eta + \eta_0)} + 4n\varepsilon\ ,$$

si n est le nombre des côtés de P.

Les nombres n, η_0 et Long de P sont indépendants de ε et η, donc les longueurs des Π sont bornées et celles relatives aux mêmes ε, η sont toutes comprises entre les limites précédentes qui diffèrent de

$$\text{Long de P}\,.\left[\frac{1}{\cos(\eta + \eta_0)} - 1\right] + 6n\varepsilon$$

quantité qui, pour ε et η tendant vers zéro, a pour limite

$$\text{Long de P}\left[\frac{1}{\cos \eta_0} - 1\right]\ ;$$

ceci ne dépend que de P et, en prenant P de manière que le crochet soit petit, on aura pour cette expression une valeur aussi voisine de zéro qu'on le voudra car les polygones P sont eux-mêmes des polygones Π, § 69, et par suite la longueur de P est bornée.

Donc les longueurs des polygones Π diffèrent les unes des autres d'aussi peu que l'on veut dès que ε et η sont assez petits; en d'autres termes la limite de la longueur des Π existe et elle est aussi celle de la longueur des P.

72. — La définition ayant été ainsi légitimée on la traduit, à la façon classique, en formule du calcul intégral. Supposons que

Γ soit définie en coordonnées rectangulaires par $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ étant continues et à dérivées premières continues dans l'intervalle (t_0, T) que l'on considère. De plus on suppose que $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ ne s'annulent pas à la fois. Alors dans (t_0, T) on aura:

$$|x'(t)| < \mathrm{M}\,, \qquad |y'(t)| < \mathrm{M}\,, \qquad |z'(t)| < \mathrm{M}$$

et

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} > l\,,$$

l et M étant deux nombres positifs convenablement choisis.

La longueur d'un polygone P, dont les sommets sont donnés par t_0, t_1, t_2, ... $t_n = \mathrm{T}$, est

$$l(\mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{\left[x(t_{i+1}) - x(t_i)\right]^2 + \left[y(t_{i+1}) - y(t_i)\right]^2 + \left[z(t_{i+1}) - z(t_i)\right]^2}\,,$$

quantité qui s'écrit encore

$$l(\mathrm{P}) = \sum (t_{i+1} - t_i)\sqrt{\overline{x'(a_i)}^2 + \overline{y'(b_i)}^2 + \overline{z'(c_i)}^2}\,,$$

a_i, b_i, c_i étant convenablement choisis dans (t_i, t_{i+1}). Or la différence

$$l(\mathrm{P}) - \sum (t_{i+1} - t_i)\sqrt{\overline{x'(t_i)}^2 + \overline{y'(t_i)}^2 + \overline{z'(t_i)}^2}$$

s'écrit encore:

$$\sum (t_{i+1} - t_i) \times \frac{\left[\overline{x'(a_i)}^2 - \overline{x'(t_i)}^2\right] + \left[\overline{y'(b_i)}^2 - \overline{y'(t_i)}^2\right] + \left[\overline{z'(c_i)} - \overline{z'(t_i)}^2\right]}{\sqrt{\overline{x'(a_i)}^2 + \overline{y'(b_i)}^2 + \overline{z'(c_i)}^2} + \sqrt{\overline{x'(t_i)}^2 + \overline{y'(t_i)}^2 + \overline{z'(t_i)}^2}}\,.$$

Si, dans chaque intervalle (t_i, t_{i+1}), $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ varient au plus de ε, les crochets placés au numérateur de l'expression précédente sont chacun inférieurs à $2\mathrm{M}\varepsilon$; le dénominateur est supérieur à $2l$, donc la différence considérée est majorée par

$$\sum (t_{i+1} - t_i) \times \frac{6\,\mathrm{M}\varepsilon}{2\,l} = (\mathrm{T} - t_0)\frac{\mathrm{M}\varepsilon}{l}\,,$$

quantité qui tend vers zéro avec ε. La limite de l(P) est donc celle de

$$\sum (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\overline{x'(t_i)}^2 + \overline{y'(t_i)}^2 + \overline{z'(t_i)}^2}\ ,$$

c'est-à-dire

$$\int_{t_0}^{T} \sqrt{\overline{x'(t)}^2 + \overline{y'(t)}^2 + \overline{z'(t)}^2}\, dt\ .$$

73. — La seule modification apportée pour le cas des longueurs consiste donc dans l'énonciation d'une définition et dans la démonstration que cette définition est logiquement acceptable. Ceci suffit pour mieux préparer l'étude des aires, étude dans laquelle va apparaître une nouvelle difficulté, généralisation en quelque sorte de celle rencontrée dans l'étude de l'aire des domaines plans: ce n'est qu'à certains domaines plans que nous avons pu attribuer une aire.

Etant donnée une surface Γ ayant en chaque point un plan tangent variant de façon continue avec son point de contact, nous disons qu'un polyèdre Π est approché en position et direction à moins de ε et η près, si l'on peut établir entre Γ et Π une correspondance ponctuelle biunivoque et bicontinue telle que deux points correspondants de Γ et de Π sont distants de moins de ε et que les plans tangents en ces deux points font entre eux un angle inférieur à η. Par plan tangent en un point de Π on entend le ou les plans des faces de Π auxquelles appartient ce point.

Etant donnée une portion Δ de Γ, si l'aire de la portion correspondante de Π tend vers une limite A quand on fait varier Π de manière que ε et η tendent vers zéro, on dit que Δ a une *aire* égale au nombre A.

S'adressant à de jeunes élèves, on simplifierait l'énoncé de cette définition et on admettrait pour les surfaces Γ et les domaines Δ dont on va s'occuper, l'existence des polyèdres Π et de la limite A. Puis on passerait aux applications à la surface latérale du cylindre et du cône de révolution, de la sphère et de la zone ou du fuseau de zone.

Pour le cylindre ou le cône de révolution, il suffirait de faire remarquer que les prismes réguliers ou les pyramides régulières, qui sont inscrits dans le cylindre ou le cône, sont approchés en position et en direction.

Pour les domaines sphériques, pour un fuseau de la zone engendrée par l'arc de circonférence AB en tournant autour de son diamètre X'X, par exemple, on remarquera que si on divise AB en m parties égales par les points C, D, ... K, que si l'on considère les circonférences engendrées par A, C, D, ... K, B et que, sur elles, on marque les points A_1, A_2, ... A_n, C_1, C_2, ... C_n, ... B_n où elles rencontrent les demi-plans passant par XX' et divisant le fuseau en n parties égales, on a les sommets d'un polyèdre Π approché en position et direction de la surface considérée. Polyèdre dont les faces sont des trapèzes tels que $C_i C_{i+1} D_{i+1} D_i$ et éventuellement des triangles, et pour lequel ε et η tendent vers zéro quand m et n augmentent indéfiniment de façon quelconque. Or, quand on augmente assez n, on a un nombre aussi peu différent que l'on veut de la somme des aires engendrées par les côtés de AC ... KB; d'où le calcul classique.

On peut aussi, puisque le chapitre des volumes précède celui des aires de domaines non plans, revenir à une méthode jadis employée en disant: soit à trouver l'aire d'un fuseau de la zone découpée dans un cylindre ou cône de révolution par deux plans P_1, P_2 perpendiculaires à l'axe ou dans une sphère par deux plans parallèles P_1, P_2. Décomposons cette zone en n zones égales par des plans passant par son axe; une zone partielle est ainsi ABB'A'. Dans le cas du cylindre ou du cône AB et A'B' sont deux segments égaux de génératrices, nous menons les plans tangents le long de ces génératrices; ces plans se coupent suivant une droite coupée en α et β par P_1 et P_2. Nous remplacerons la petite zone ABB'A' par les deux rectangles ou trapèzes $AB\beta\alpha$, $\alpha\beta B'A'$. La surface polyédrale ainsi obtenue est, quand n croît, indéfiniment approchée en position et direction si l'on établit la correspondance entre surface et polyèdre à l'aide de rayons des parallèles du cône ou du cylindre.

Dans le cas de la sphère; on subdivisera à nouveau la zone ABB'A' par des plans parallèles à P_1, P_2 et découpant AB en n arcs égaux. Si CDEF est une des zones partielles ainsi obtenue, on mènera les plans tangents à la sphère en C, D, E, F puis, du centre O de la sphère, on projettera celle-ci sur les plans tangents en prenant pour projection d'un point M de la sphère celui des points de rencontre avec les plans tangents indiqués qui est le plus voisin de O. On a ainsi une surface polyédrale qui, quand n croît, est infiniment approchée en position et direction.

Or, dans les trois cas, si O est un point pris sur l'axe du cylindre ou cône ou est le centre de la sphère, les points des segments joignant O aux points de la surface polyédrale sont ceux d'un corps formé de pyramides et dont le volume v est lié à l'aire s de la surface polyédrale et à la distance R de O aux plans tangents au cylindre, cône ou à la sphère par la formule:

$$v = \frac{1}{3} s . \mathrm{R} \ .$$

Pour n augmentant indéfiniment, v tend vers le volume V du corps formé par les points des segments joignant O aux points du fuseau envisagé, donc la surface S de ce fuseau est donnée par

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \mathrm{S} . \mathrm{R} \ .$$

74. — Dans cette formule V est un nombre que nous avons appris à calculer; son calcul se présentera sous des aspects différents suivant ce qu'on aura dit dans le chapitre des volumes mais il restera toujours essentiellement le même. Pédagogiquement, il y aurait avantage à ne faire effectivement le calcul de V (donc du volume de la sphère) qu'après avoir été conduit au corps que nous venons de considérer; le calcul du volume balayé par un triangle en tournant deviendrait ainsi naturel et ce serait d'ailleurs à ce calcul qu'on réduirait l'étude de ce qu'on désigne souvent par le terme étrange de « volumes tournants ».

Si l'on abrégeait quelque peu cette partie du cours, si surtout on soulageait la mémoire des élèves en ne les obligeant pas à savoir par cœur des formules qui n'ont jamais servi qu'à passer des examens, s'il était permis aux élèves d'ignorer, comme le fait tout mathématicien, ce que c'est qu'un segment sphérique et ce que c'est qu'un anneau sphérique, on pourrait peut-être trouver le temps de traiter de l'aire du triangle sphérique et par suite des aires des parties de sphères limitées par des arcs de cercles, grands ou petits.

Il est un peu triste de constater que des jeunes gens ayant terminé le cycle des études leur conférant les grades nécessaires pour enseigner dans les classes secondaires puissent ne jamais avoir entendu parler du magnifique théorème d'Albert Girard. Quand on le leur fait connaître, ils sont toujours émerveillés de la beauté du résultat et stupéfaits qu'on ne leur ait pas parlé plus tôt d'une propriété indispensable pour bien comprendre le postulatum d'Euclide.

La marche suivie ici conduit à modifier très légèrement la présentation habituelle du théorème d'Albert Girard, en parlant d'abord de volumes.

Considérons trois plans diamétraux d'une sphère ne passant pas par un même diamètre, ils divisent la sphère en huit *trièdres sphériques* ayant pour bases huit triangles sphériques deux à deux opposés par le sommet. Les volumes de ces trièdres peuvent s'obtenir à l'aide de corps, tels que celui dont au paragraphe précédent le volume a été désigné par v, constitués par des pyramides de sommets O et dont les plans de base sont tangents à la sphère. Pour de tels corps on a: $v = \frac{1}{3}s.\,R$, donc entre l'aire S d'un triangle sphérique et le volume V du trièdre sphérique correspondant on a:

$$V = \frac{1}{3}S.R\ .$$

Donc deux triangles sphériques symétriques par rapport au centre de la sphère ont même aire car les deux trièdres symétriques correspondants sont limites de corps polyédriques symétriques, donc de même volume. Ceci étant, nous avons donc quatre volumes en général différents de trièdres sphériques V, V_1, V_2, V_3 et quatre aires en général différentes S, S_1, S_2, S_3. En remarquant que les trièdres se groupent deux à deux pour former des *dièdres sphériques*, on a, si A, B, C sont les trois angles dièdres du trièdre découpant dans la sphère le volume V,

$$V + V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 . \frac{B}{2\pi}, \qquad V + V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 . \frac{C}{2\pi},$$

$$V_2 + V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 . \frac{\pi - A}{2\pi},$$

d'où

$$V = \frac{1}{3}R^3(A + B + C - \pi) ,$$

$$S = R^2(A + B + C - \pi) .$$

75. — Revenons maintenant à la légitimation logique de la définition. L'exposé qui suit diffère sensiblement de celui du § 71; c'est que maintenant intervient et la nature de la surface Γ portant le domaine Δ et la nature de la frontière de Δ. Les précautions à prendre, les hypothèses à faire s'expriment plus facilement dans le langage analytique, c'est un exposé qui pourrait convenir dans un cours de calcul intégral que nous allons donner.

Soit une surface Γ donnée en coordonnées rectangulaires par trois fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Nous supposerons x, y, z fonctions continues de u et v ainsi que leurs dérivées partielles premières et de plus nous admettrons que la représentation paramétrique n'est singulière en aucun point, c'est-à-dire que

$$(x'_u y'_v - x'_v y'_u)^2 + (y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 + (z'_u x'_v - z'_v x'_u)^2$$

ne s'annulle en aucun point. Dans ces conditions Γ a en tout point un plan tangent variant de façon continue avec le point de contact.

Nous supposerons le domaine Δ obtenu en faisant varier le point de coordonnées rectangulaires u, v dans un domaine δ appartenant à la famille de ceux auxquels nous avons appris à attacher une aire, c'est-à-dire que la frontière de δ peut être enfermée dans des polygones d'aire totale aussi petite qu'on le veut, § 28. Partageons le plan des (u, v) en carrés par des parallèles aux axes équidistantes; soit h l'écartement de deux parallèles contigües. Partageons chaque carré par la diagonale parallèle à $u + v = 0$. Soit abc un triangle ainsi obtenu; à chaque point m de abc correspond un point M de Γ et ces points forment sur Γ un triangle curviligne ABC. A m faisons correspondre de plus le point M′ donné par

$$x = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \qquad y = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma},$$

$$z = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma},$$

si les u et v de m sont donnés par

$$u = \frac{\alpha u_a + \beta u_b + \gamma u_c}{\alpha + \beta + \gamma}, \qquad v = \frac{\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Ce point décrit le triangle rectiligne ABC quand m décrit abc et il est clair que la correspondance entre M et M′ est univoque et continue dans les deux cas. Les points M′ décrivent ainsi une surface polyédrale P formée de triangles et inscrite dans Γ.

A Δ correspond sur P un domaine Δ′ qui est constitué par des triangles ABC et par des parties de tels triangles. Δ′ n'est donc pas à proprement parler une surface polyédrale; il serait facile de modifier légèrement Δ′ de façon à avoir une surface polyédrale au sens strict du mot mais il vaut mieux élargir le sens de ce mot et entendre par là une *surface* (c'est-à-dire un lieu de points en correspondance continue avec un domaine plan) constituée de parties de plans.

Ces parties de plans doivent avoir une aire pour qu'on puisse parler de l'aire de la surface polyédrale définie comme la somme des aires de ces parties planes. Cette condition est bien réalisée par Δ′ car la correspondance entre abc et le triangle rectiligne ABC est une transformation dans laquelle chaque polygone du plan abc et d'aire $\mathcal{A}$ devient un polygone du plan ABC ayant pour aire $\mathcal{A} \times \dfrac{\text{aire ABC}}{\text{aire } abc}$; d'où il résulte tout de suite, comme au § 43, qu'à toute partie de abc ayant l'aire $\mathcal{A}$ correspond une partie de ABC ayant une aire et une aire égale à $\mathcal{A} \times \dfrac{\text{aire ABC}}{\text{aire } abc}$.

Montrons maintenant que les nombres ε et η qui caractérisent le degré d'approximation de Γ par P (ou de Δ par Δ′) en position et en direction tendent vers zéro avec h.

Quand m se meut dans abc, u et v varient de h au plus donc x, y, z varient d'une quantité $q(h)$ au plus, qui tend vers zéro avec h. Donc la distance d'un point M du triangle curviligne ABC au point A, et la distance d'un point M′ du triangle rectiligne ABC au point A, sont au plus $\sqrt{3}\,.\,q(h)$. Et la distance MM′ est au plus $2\sqrt{3}.q(h)$; elle tend vers zéro avec h.

Chacune des dérivées partielles x'_u, x'_v, ..., z'_v reste inférieure à un nombre fixe K dans δ et varie de moins de $q_1(h)$ dans *abc*, chacune des trois expressions telles que $x'_u y'_v - x'_v y'_u$ varie donc au plus de $4\mathrm{K}q_1(h) + 2q_1(h)^2 = q_2(h)$ quand on y prend les dérivées pour un point ou un autre de *abc*, point qui peut différer non seulement d'une expression à une autre, mais aussi dans chaque expression d'une dérivée à une autre. De sorte que les divers plans d'équation

$$\mathrm{X}\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right) + \mathrm{Y}\left(z'_u x'_v - z'_v x'_u\right) + \mathrm{Z}\left(x'_u y'_v - x'_v y'_u\right) = \text{const.}\ ,$$

font entre eux des angles V tels que

$$\cos \mathrm{V} = \frac{\mathrm{S}\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)\overline{\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)}}{\sqrt{\mathrm{S}\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)^2 \times \mathrm{S}\overline{\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)}^2}}\ ,$$

d'où

$$\sin^2 \mathrm{V} = \frac{\mathrm{S}\left[\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)\overline{\left(z'_u x'_v - z'_v x'_u\right)} - \overline{\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)}\left(z'_u x'_v - x'_u z'_v\right)\right]^2}{\mathrm{S}\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)^2 \times \mathrm{S}\overline{\left(y'_u z'_v - y'_v z'_u\right)}^2}\ .$$

Or, dans cette expression, le dénominateur surpasse un nombre fixe, car la représentation est régulière, et chacun des trois crochets figurant au numérateur est majoré par $4\,.\,2\mathrm{K}^2\,.\,q_2(h) + 2q_2(h)^2$, donc la borne supérieure η de V tend vers zéro avec h. Or parmi les plans considérés se trouvent d'une part tous les plans tangents de Γ aux points du triangle curviligne ABC et d'autre part le plan ABC, car l'équation de celui-ci est, si *ab* et *ac* sont respectivement parallèles aux axes $v = 0$, $u = 0$ et si a est de coordonnées u_0, v_0, d'où pour b et c respectivement $u_0 \pm h$, v_0; u_0, $v_0 \pm h$,

$$0 = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - x(u_0, v_0) & \mathrm{Y} - y(u_0, v_0) & \mathrm{Z} - z(u_0, v_0) \\ x(u_0 \pm h, v_0) - x(u_0, v_0) & y(u_0 \pm h, v_0) - y(u_0, v_0) & z(u_0 \pm h, v_0) - z(u_0, v_0) \\ x(u_0, v_0 \pm h) - x(u_0, v_0) & y(u_0, v_0 \pm h) - y(u_0, v_0) & z(u_0, v_0 \pm h) - z(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

ce qui, en transformant les deux dernières lignes du déterminant par le théorème des accroissements finis, donne bien la forme d'équation considérée.

Ainsi *l'existence de polyèdres indéfiniment approchés en position et direction et ayant une aire est prouvée.*

76. — Reste à prouver que l'aire de la partie $\mathcal{O}$ d'un tel polyèdre Π, correspondant à Δ, tend vers une limite quand les nombres ε et η relatifs à π tendent vers zéro. Considérons l'un des polyèdres spéciaux obtenus au paragraphe précédent, soit P, et soient ε_0 et η_0 les nombres qui lui correspondent.

Le calcul de ε_0 que nous avons fait est très grossier, on peut le préciser beaucoup. Avec les coordonnées indiquées pour a, b, c, on a:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{M}'} &= x_{\mathrm{A}} + \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) + \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma}(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}) \\ &= x_{\mathrm{A}} \pm \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_u \pm \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_v , \end{aligned}$$

x'_u et x'_v étant prises respectivement pour un certain point de ab et un certain point de ac. On a aussi:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{M}} &= x\left(u_0 \pm \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h , \; v_0 \pm \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h\right) \\ &= x_{\mathrm{A}} \pm \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_u \pm \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} h x'_v , \end{aligned}$$

x'_u et x'_v étant prises maintenant pour un certain point du triangle abc. D'où:

$$|x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{M}'}| = h \left| \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \delta(x'_u) + \frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \delta(x'_v) \right| ,$$

$\delta(x'_u)$ et $\delta(x'_v)$ étant au plus la borne supérieure $\lambda(h)$ de la variation de l'une des six dérivées partielles $x'_u, \dots z'_v$ quand u et v varient de h au plus. Les multiplicateurs de $\delta(x'_u)$ et $\delta(x'_v)$ sont en module au plus égaux à 1, donc

$$|x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{M}'}| \leqq 2h\lambda(h) \qquad \mathrm{MM}' \leqq 2\sqrt{3}\, h\lambda(h) = \varepsilon_0 .$$

Ainsi non seulement ε_0 est infiniment petit avec h, mais il est même infiniment petit par rapport à h, car $\lambda(h)$ tend vers zéro avec h. Cette remarque est essentielle; elle va nous permettre de raisonner comme au § 72.

Supposons d'abord que δ soit constitué par un certain nombre de carrés d'un réseau de carrés de côté H et que les carrés de côtés h proviennent de la subdivision de ceux-ci. Alors Δ' n'est constitué que par des triangles ABC entiers. A un tel triangle correspond sur Π une région $\mathcal{R}$, laquelle est constituée de faces entières de Π et de parties de faces. Le plan d'une de ces faces ou parties de faces, orienté d'après une orientation choisie sur Γ, fait avec le plan ABC, orienté de la même manière, un angle au plus égal à $\eta + \eta_0$ car ils font des angles η et η_0 au plus avec un même plan tangent orienté de Γ. Si $\eta + \eta_0$ est inférieur à un droit les projections orthogonales sur ABC de ces faces et parties de faces ne se recouvrent pas; elles couvrent tout ABC sauf peut-être certains des points qui sont à moins de $\varepsilon + \varepsilon_0$ de l'extérieur de ABC; elles sont contenues dans le triangle ABC augmenté des points distants de moins de $\varepsilon + \varepsilon_0$ de l'intérieur de ABC. On peut donc trouver dans $\mathcal{R}$ une région polygonale $\mathcal{R}_1$ telle que aire $\mathcal{R}_1 >$ aire ABC — $(\varepsilon + \varepsilon_0) \times$ périm. de ABC et on peut sur Π trouver une région polygonale $\mathcal{R}_2$ contenant $\mathcal{R}$ et telle que

$$\text{aire } \mathcal{R}_2 \leq \frac{\text{aire ABC} + (\varepsilon + \varepsilon_0) \times \text{périm. de ABC} + \omega}{\cos(\eta + \eta_0)},$$

si petit que soit $\omega > 0$.

Appliquons ceci à chaque région $\mathcal{R}$, en tenant compte de ce que, s'il n'était pas certain que $\mathcal{R}$ avait une aire, nous savons, par hypothèse, que $\mathcal{D}$, formé par la réunion des $\mathcal{R}$, en a une; nous trouvons

$$\text{aire } \mathcal{D} \geqq \text{aire } \Delta' - 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \times \text{somme des long. des côtés de } \Delta$$

$$\text{aire } \mathcal{D} \leq \frac{\text{aire } \Delta' + 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \times \text{somme des long. des côtés de } \Delta}{\cos(\eta + \eta_0)}.$$

Quand ε et η tendent vers zéro, ces deux limites ont une différence qui tend vers

$$2\varepsilon_0 \times \text{somme des long. des côtés de } \Delta \times \left(\frac{1}{\cos \eta_0} + 1\right).$$

Or, cette expression ne dépend que de P et on va voir qu'elle tend vers zéro avec h. En effet, si δ est contenu dans un carré de côté pH, il y a au plus $2\left(\frac{p\mathrm{H}}{h}\right)^2$ triangles abc. Un côté de ce triangle donne un arc de Γ; si ab et ac sont parallèles à $v = 0$ et $u = 0$, les arcs AB et AC ont au plus la longueur $\mathrm{K}\sqrt{3}h$ puisque K majore les six dérivées partielles $x'_u, \ldots, z'_v$; le côté bc donne un arc BC de longueur $\mathrm{K}\sqrt{6}h$ au plus car les dérivées de x, y, z dans la direction bc sont au plus égales à $\mathrm{K}\sqrt{2}$. Donc le périmètre du triangle rectiligne ABC est au plus $4\mathrm{K}\sqrt{3}h$; ce qui permet de majorer l'expression précédente par

$$2\varepsilon_0 \cdot 2\left(\frac{p\mathrm{H}}{h}\right)^2 \cdot 4\mathrm{K}\sqrt{3}\, h \cdot \left(\frac{1}{\cos \eta_0} + 1\right)$$

quantité qui tend vers zéro avec h.

Ainsi *l'existence de la limite des aires de* $\mathcal{O}$, *c'est-à-dire de l'aire de* Δ, *est prouvée dans l'hypothèse faite sur* δ; on reviendra sur l'extension de ce résultat à une plus large classe de domaines δ; on va d'abord chercher l'expression de l'aire de Δ.

77. — L'aire de ABC est

$$\frac{1}{2}\sqrt{[(\mathrm{Y_B}-\mathrm{Y_A})(\mathrm{Z_C}-\mathrm{Z_A})-(\mathrm{Y_C}-\mathrm{Y_A})(\mathrm{Z_B}-\mathrm{Z_A})]^2+[\mathrm{Z},\mathrm{X}]^2+[\mathrm{X},\mathrm{Y}]^2},$$

les deux derniers crochets se déduisant du premier par permutation circulaire. Or, par la transformation déjà utilisée ceci s'écrit :

$$\frac{1}{2}h^2\sqrt{(y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 + (z'_u x'_v - z'_v x'_u)^2 + (x'_u y'_v - x'_v y'_u)^2},$$

à condition de prendre chaque dérivée partielle pour un point convenable de abc. En n'employant que les dérivées au point a, ceci s'écrit encore

$$\text{aire } abc \left\{ \sqrt{\left[\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}\right]_a^2 + \left[\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}\right]_a^2 + \left[\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right]_a^2} + \theta[8\,\mathrm{K}^2 q_2(h) + h q_2(h)^2]\sqrt{3} \right\};$$

θ étant compris entre -1 et $+1$.

Quand h tend vers zéro la somme des termes en θ tend vers zéro puisque la somme des aires *abc* est l'aire finie de δ, la somme des autres termes tend, par définition même, vers

$$\text{aire } \Delta = \iint_{\delta} \sqrt{\left\{ \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 \right\}}\, du\, dv \; .$$

Ceci n'est toutefois établi que pour des domaines spéciaux δ, que nous appellerons des sommes de carrés. Si δ est seulement supposé avoir une aire, enfermons δ dans une somme de carrés δ_2 et prenons à l'intérieur de δ une somme de carrés δ_1; nous savons que nous pouvons faire cela de manière que aire δ_2 — aire δ_1 soit aussi petite que nous le voudrons.

A δ, δ_1, δ_2 correspondent sur Π des parties $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$; sur Γ, Δ, Δ_1, Δ_2; sur P, Δ', Δ_1', Δ_2'; par hypothèse $\mathcal{D}$ a une aire; Δ, Δ_1, Δ_2, Δ', Δ_1', Δ_2' ont des aires; on ne sait si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont des aires. On a noté soigneusement au § 76 le moment où intervient l'hypothèse que $\mathcal{D}$ a une aire: quand, des inégalités vérifiées par *aire* $\mathcal{R}_1$ et *aire* $\mathcal{R}_2$, on passe à celles en *aire* $\mathcal{D}$. Raisonnant maintenant sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ on devra conclure que, $\overline{\mathcal{D}}_1$ désignant un domaine polygonal pris sur Π et contenant $\mathcal{D}_1$, on a:

$$\text{aire } \overline{\mathcal{D}}_1 > \text{aire } \Delta_1' - 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \,.\, \text{long. totale des côtés de } \Delta_1'$$

et que, $\underline{\mathcal{D}}_2$ désignant un domaine polygonal pris sur Π et contenu dans $\mathcal{D}_2$, on a:

$$\text{aire } \underline{\mathcal{D}}_2 < \frac{\text{aire } \Delta_2' + 2(\varepsilon + \varepsilon_0) \text{ long. totale des côtés de } \Delta_2'}{\cos(\eta + \eta_0)} \; .$$

Et comme $\mathcal{D}$ est à la fois un domaine $\overline{\mathcal{D}}_1$ et un domaine $\underline{\mathcal{D}}_2$, l'aire de $\mathcal{D}$ vérifie les deux inégalités ci-dessus.

On a ainsi deux limites entre lesquelles est le nombre *aire* $\mathcal{D}$; ces deux limites dépendent non seulement de $\mathcal{D}$ mais des choix de P, de δ_1 et de δ_2. Quand $\mathcal{D}$ varie de façon que ε et η tendent vers zéro, la différence de ces limites tend vers

$$\frac{\text{aire } \Delta_2'}{\cos \eta_0} - \text{aire } \Delta_1' + \zeta \; ,$$

ζ tendant vers zéro avec h. Si donc on fait tendre h vers zéro, la différence des limites tend vers

$$\text{aire } \Delta_2 - \text{aire } \Delta_1 = \text{aire } (\Delta_2 - \Delta_1) .$$

Le domaine $\Delta_2 - \Delta_1$ correspond à $\delta_2 - \delta_1$ qui est une somme de carrés, donc on a :

$$\text{aire } (\Delta_2 - \Delta_1) = \iint_{\delta_2 - \delta_1} \sqrt{\left\{ \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 \right\}}\, du\, dv$$

et ceci est majoré par $2K^2\sqrt{3} \times$ *aire* $(\delta_2 - \delta_1)$; et puisque cette dernière aire peut être prise aussi petite que l'on veut, on voit que *aire* $\mathcal{O}$ varie entre des limites aussi rapprochées qu'on le veut dès qu'on prend ε et η assez petits. *Aire* $\mathcal{O}$ tend donc vers une limite, c'est-à-dire que l'aire de Δ existe. D'ailleurs, avec les choix indiqués, les deux seconds membres des inégalités précédentes ont la même limite d'où il résulte que l'expression de *aire* Δ par une intégrale est valable pour tous les domaines δ ayant une aire.

78. — Le premier exposé que je voulais indiquer est ainsi achevé. On ne manquera pas de penser qu'il est bien long et déjà fort compliqué bien que restreint à la définition déclarée la moins générale. On pourra abréger un peu, si l'on n'a pas la préoccupation de mettre en évidence toutes les précautions indispensables à prendre, et simplifier, en considérant des classes un peu moins vastes de surfaces et de domaines. Mais les modifications seront faibles.

Or cet exposé, long et compliqué, suffisant logiquement, est insuffisant physiquement ou si l'on peut dire humainement. Il ne légitime en effet que les procédés de mesure par polygones ou polyèdres approchés et nullement les utilisations pratiques des notions de longueur et de surface. Pour expliquer que la connaissance de la longueur d'une route permette de calculer le nombre de tombereaux de cailloux nécessaires à son rechargement, il faut dire comment cette longueur sert au calcul approché de la surface de la route, d'où le volume des cailloux, d'où le nombre de tombereaux. Pour expliquer que la connaissance de l'aire d'une coupole permette de calculer le poids de cuivre nécessaire pour sa couverture, il faut dire comment cette surface sert au calcul approché du volume de cuivre, d'où son poids.

Il faut donc ajouter à l'exposé précédent des paragraphes donnant ces compléments; mais ces paragraphes constituent à eux seuls un autre exposé de la théorie des longueurs et aires plus court et plus satisfaisant, comme on va le voir.

Ceci n'est nullement étonnant; j'ai dit, § 68, « que les physiciens n'ont jamais eu à effectuer, directement du moins, des mesures précises de longueurs de courbes ». Dans les mesures indirectes auxquelles je faisais allusion là, on pèse un fil ou une plaque, image matérielle de la courbe ou de la surface à mesurer; on détermine donc la longueur ou l'aire par un procédé en accord avec les applications qu'on en veut faire et qui sont, de ce fait, légitimées. Si nous traduisons logiquement ce nouveau procédé de mesure nous aurons une bonne définition, car en accord avec les déterminations physiques par pesées et les applications. Et cette définition est meilleure que la précédente puisqu'elle est en accord avec le procédé de mesure pratique le plus employé et le mieux relié à toutes les applications.

A l'actif du premier exposé on ne peut noter actuellement qu'un avantage: il justifie d'emblée l'emploi des mêmes mots longueur et aire pour les arcs de courbes et les portions de surfaces que pour les segments de droite et les domaines plans. Mais il est plus conforme à nos habitudes, c'est pourquoi sans doute il a été conservé partout au lieu de l'exposé plus simple suivant, lequel a été suggéré d'abord par des procédés de calcul employés par Borchardt, procédés pris ensuite comme définitions effectives par Minkowski.

79. — Supposons qu'il ait fallu 300 tombereaux de cailloux pour recharger une route sur une épaisseur de dix centimètres; si, plus tard, le milieu de la route a été défoncé et qu'on veuille recharger de dix centimètres une bande centrale de la route de largeur moitié de celle de la route, on estimera que 150 tombereaux environ sont nécessaires. Comme les nombres de tombereaux dépendent des volumes des cylindres occupés par les cailloux mis en place, cylindres de même hauteur et dont les

sections droites sont la route entière et la bande centrale de la route, cette estimation revient à admettre que l'on a:

$$\frac{S}{D} = \frac{S'}{D'},$$

S et S′ étant les aires de la route et de la bande et la largeur D de la route étant le double de la largeur D′ de la bande.

Si on avait eu $D = 3D''$ on aurait fait une supposition analogue et toutes ces prévisions sont en accord pratiquement suffisant avec l'expérience. Si donc la surface L correspond à une largeur 1, la valeur commune des rapports sera L et on aura $S = L \cdot D$, $S' = L \cdot D'$, etc.

Si la route est rectiligne de longueur l, les surfaces d'aire S, S′, ... sont des rectangles dont un côté est égal à l, l'autre côté étant D, D′, ... donc on a alors $L = l$. C'est pourquoi le nombre L a été appelé la longueur de la route.

Les égalités dont il vient d'être parlé ne sont qu'approchées, les explications ci-dessus n'ont donc pas une valeur logique précise, nous allons les transformer en définitions mathématiques.

Considérons une courbe plane Γ ayant en chaque point une tangente variant de façon continue avec le point de contact, déplaçons un segment de longueur $D = 2r$ de façon que son milieu décrive Γ et qu'il reste à chaque instant normal à Γ. Admettons que la courbe Γ soit telle que, pour r assez petit, le segment mobile ne passe pas deux fois par le même point et appelons alors $A(r)$ l'aire balayée par le segment, nous supposons que $A(r)$ existe; la limite pour $r = 0$ de $\frac{A(r)}{2r}$, si elle existe, est appelée la longueur de Γ. On démontre dans des conditions très larges l'existence de cette limite.

Si une courbe Γ ne vérifie pas les conditions précédentes, mais qu'elle soit formée de plusieurs courbes Γ_1, Γ_2, ... placées bout à bout et remplissant ces conditions, ce qui est le cas par exemple d'une ligne brisée, on désigne par $A(r)$ la somme des aires analogues relatives à Γ_1, Γ_2, ... et on applique la même définition. Cela revient à dire que la longueur de Γ est la somme des longueurs de Γ_1, de Γ_2, ... En particulier la longueur d'une ligne brisée est la somme des longueurs, au sens ordinaire du mot, de ses côtés.

Appliquons cette définition à un arc de cercle, de rayon R et dont l'angle au centre est α. L'aire $A(r)$ est celle du domaine obtenu en enlevant du secteur de rayon $R + r$ et d'ouverture α, un secteur de rayon $R - r$ et de même ouverture, donc, § 41,

$$\frac{A(r)}{2r} = \frac{\frac{1}{2}\alpha(R+r)^2 - \frac{1}{2}\alpha(R-r)^2}{2r} = \frac{2\alpha Rr}{2r} = \alpha R\ ;$$

un arc de cercle a donc une longueur, et donnée par la formule $L = \alpha R$.

80. — En géométrie élémentaire on peut se borner à la considération des courbes planes, si pourtant on examine une courbe gauche Γ, on supposera pour définir sa longueur qu'elle vérifie des conditions analogues à celles ci-dessus supposées et on remplacera le segment mobile de longueur $D = 2r$ par un cercle mobile de rayon r dont le centre décrit Γ et dont le plan reste perpendiculaire à Γ. Par $V(r)$ on entendra le volume balayé et on appellera longueur la limite de $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ pour $r = 0$, lorsqu'elle existe. On étend comme précédemment la définition aux courbes présentant quelques points anguleux et on en déduit que pour une ligne brisée la longueur, d'après cette définition, est la somme des longueurs, au sens ordinaire du mot, de ses côtés.

On affirmera encore que cette définition s'applique dans des cas étendus et, de plus, que lorsque Γ est plane les deux définitions donnent le même nombre. Voici d'ailleurs comment on peut prouver l'accord des deux définitions.

Soit une courbe plane Γ pour laquelle le rapport $\frac{A(r)}{2r}$ tend vers L quand r tend vers zéro. Décomposons le corps balayé par le cercle mobile de rayon r en tranches par des plans parallèles à celui de Γ et distants de h. Si deux plans limitant une tranche coupent le cercle mobile suivant des cordes de longueur $2r_1$ et $2r_2$, la tranche est comprise dans un cylindre de hauteur h et dont la base est d'aire $A(r_1)$ et elle comprend un cylindre de même hauteur et dont la base a l'aire $A(r_2)$.

r_1 et r_2 étant plus petits que r, on a:

$$A(r_1) = 2(L + \varepsilon_1)r_1 \qquad A(r_2) = 2(L + \varepsilon_2)r_2 \ ;$$

ε_1 et ε_2 étant en module limité par un nombre ε qui tend vers zéro avec r. Les volumes des deux cylindres s'obtiennent en multipliant par h, donc on a:

$$(L - \varepsilon)\Sigma 2 r_2 h . < V(r) < (L + \varepsilon)\Sigma 2 r_1 h \ .$$

Or les deux sommes figurant dans les membres extrêmes sont des valeurs, indéfiniment approchées pour h tendant vers zéro, de l'aire πr^2 du cercle mobile, l'une par défaut et l'autre par excès. Donc

$$(L - \varepsilon)\pi r^2 < V(r) < (L + \varepsilon)\pi r^2 \ ;$$

ε tendant vers zéro avec r, ceci prouve l'identité des deux définitions [1].

On peut aussi démontrer cet accord indirectement en prouvant que chacune des définitions de ce paragraphe est en accord avec la définition par les polygones inscrits dans des cas étendus, mais je laisse cela de côté.

81. — Pour l'aire d'une surface, après une préparation analogue à celle relative à la longueur d'un arc de courbe on posera la définition par la limite pour $r = 0$, supposée existante, du rapport $\frac{V(r)}{2r}$, $V(r)$ étant le volume supposé existant du corps constitué par les segments de longueur $2r$ normaux à la surface et dont les milieux sont tous les points du domaine considéré de la surface. On étendra cette définition aux surfaces ayant quelques lignes de points anguleux et on en concluera qu'un domaine plan a une aire d'après la nouvelle définition si, et seulement si, il en a une d'après la définition du chapitre III et que ces deux définitions sont alors en accord, qu'une surface polyédrale a pour aire la somme des aires de ses faces.

On appliquera facilement à un fuseau de la surface latérale

[1] Si l'on avait voulu prouver l'identité seulement pour la circonférence on aurait pu appliquer le théorème de Guldin ou seulement le cas particulier de ce théorème relatif au corps engendré par un domaine plan ayant un axe de symétrie et tournant autour d'une droite de son plan ne le rencontrant pas et parallèle à l'axe de symétrie.

d'un cylindre ou d'un cône de révolution, à un fuseau de zone sphérique. Tout cela est si simple, si immédiat, si semblable au calcul relatif à la circonférence, que je n'ai rien de plus à en dire.

82. — Dans le cours de calcul intégral, après avoir précisé les définitions si cela était nécessaire, on les mettrait en œuvre en ne craignant pas de faire des hypothèses propres à simplifier. Par exemple: soit Γ une courbe gauche dont une représentation régulière en coordonnées rectangulaires est donnée par les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ continues dans (t_0, t_1) ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. On vérifie immédiatement que

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad \frac{-x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad 0$$

et

$$\frac{x'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \qquad \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\frac{-\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

sont les cosinus directeurs de deux normales à Γ au point x, y, z qui sont rectangulaires [1]. Donc $\mathrm{V}(r)$ est le volume du corps lieu des points

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= x + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,u + \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,v,\\
\mathrm{Y} &= y - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,v + \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,v,\\
\mathrm{Z} &= z \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,v,
\end{aligned}$$

quand le point de coordonnées rectangulaires u, v décrit le cercle de rayon r tracé autour de l'origine. Donc on a:

$$\mathrm{V}(r) = \int\!\!\int\!\!\int \left| \frac{\mathrm{D}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})}{\mathrm{D}(u, v, t)} \right| du\, dv\, dt .$$

[1] Ceci suppose toutefois $z' \neq 0$. S'il n'en était pas ainsi on partagerait Γ en arcs sur chacun desquels une des dérivées x', y', z' ne s'annulerait pas. C'est pour pouvoir dériver ces cosinus directeurs qu'on a admis l'existence de x'', y'', z''.

Pour avoir la limite de $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ quand r tend vers zéro, il suffit d'avoir la partie principale de l'infiniment petit $V(r)$. Or le déterminant fonctionnel à intégrer est un polynome en uv dont chaque monome $c(t)\,u^\alpha v^\beta$ donne un terme de la forme $\int c(t)\,dt \,.\, \int\int u^\alpha v^\beta\,du\,dv$, le second facteur étant un monome en r de degré $\alpha + \beta + 2$. Il suffit donc de prendre les termes de moindre degré en u, v du déterminant fonctionnel, ce qui donne:

$$\lim_{r\to 0} \frac{V(r)}{\pi r^2} = \int_{t_0}^{t_1} \left| \begin{array}{ccc} x' & \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ y' & -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \\ z' & 0 & -\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{array} \right| dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt\,.$$

Par exemple encore: soit Γ la surface donnée en coordonnées rectangulaires par $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ fonctions continues et dont les dérivées partielles des deux premiers ordres sont continues dans une région du plan des u, v pour laquelle la représentation paramétrique de Γ est supposée régulière et soit δ un domaine pris dans cette partie du plan des u, v et ayant une aire. Pour le domaine Δ de Γ correspondant à δ les points du corps à considérer sont donnés par trois formules telles que

$$X = x + \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \times \frac{\rho}{\sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}},$$

ρ variant de $-r$ à $+r$.

Le déterminant fonctionnel de X, Y, Z par rapport à u, v, ρ

qui est à intégrer pour avoir $V(r)$ peut être réduit à sa partie principale pour la recherche de la limite de $\frac{V(r)}{2r}$, d'où:

$$\text{aire } \Delta = \lim_{r \to 0} \frac{V(r)}{2r} = \iint_{\delta} \left| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \\ y'_u & y'_v & \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \\ z'_u & z'_v & \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \end{vmatrix} \right| \frac{du\, dv}{\sqrt{S\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2}}$$

$$= \iint_{\delta} \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}\, du\, dv .$$

83. — Notre second exposé est terminé. On ne manquera pas de noter combien il est plus simple et plus court que le premier et pourtant il est, sinon plus complet, du moins plus approprié aux applications.

Quand on considère les mathématiques comme une science purement logique, rien ne peut guider dans la recherche des définitions de l'aire et de la longueur, ces définitions sont libres. En considérant les mathématiques comme une science appliquée l'examen des techniques nous a conduit à des définitions, à deux bonnes définitions puisqu'il y a deux techniques. L'accord des calculs des paragraphes 72 et 82, 77 et 82 explique l'accord de ces techniques et montre qu'il y a bien une seule notion physique de longueur et une seule notion d'aire.

Mais on aurait pu adopter une attitude en quelque sorte intermédiaire en disant: les mathématiques ont certes pour origine l'expérience, mais elles doivent être purement logiques. Or un raisonnement logique est basé directement sur des propriétés et non directement sur une construction; les constructions de la longueur et de l'aire faites dans les paragraphes précédents à l'image des techniques de mesure seraient avantageusement remplacées par des définitions *descriptives* formées par l'énonciation de propriétés imposées à la longueur et à l'aire, lesquelles seraient suggérées par l'observation physique. N'est-ce pas d'ailleurs ce que l'on a fait aux deux chapitres précédents en définissant l'aire des domaines plans et les volumes par les propriétés α, β, γ ?

On remarquera alors que les longueur et aire que nous avons définies possèdent encore les propriétés α, β, γ mais que ces propriétés ne suffisent plus à les caractériser, en d'autres termes que l'on n'a plus la propriété δ qui peut s'énoncer ainsi: le nombre cherché est défini à un facteur constant près par α, β, γ. Supposons, en effet, qu'à une courbe ou une surface on attache la courbe indicatrice des normales principales (ou des binormales) ou la surface indicatrice des normales; la longueur de cette courbe ou l'aire de cette surface considérée comme attachée à la courbe ou surface primitive, vérifie encore α, β, γ. Les observations que nous avons faites conduisent à énoncer cette nouvelle condition:

ε. — Lorsqu'une courbe (ou surface) Π tend uniformément en position et direction vers une courbe ou surface fixe Γ, Π et Γ appartenant à la classe des courbes ayant une longueur (ou des surfaces ayant une aire), la longueur (ou aire) de Π tend vers celle de Γ.

Les propriétés α, β, γ, ε suffisent à entraîner δ s'il est entendu que tout segment (ou polygone) fait partie de la famille des courbes ayant une longueur (ou des surfaces ayant une aire). Alors, en effet, la longueur de toute ligne polygonale (ou l'aire de toute surface polyédrale) s'en déduit, puis ε conduit à la définition de notre premier exposé et c'est, en somme, par cette voie que nous y avons été conduits.

Ceci montre, qu'au point de vue logique comme au point de vue de la critique des notions, les premières définitions ont des avantages que nous n'avions pas mis en lumière et qu'il ne faudrait pas les omettre s'il s'agissait d'un enseignement plus élevé que celui des éléments du calcul intégral.

(A suivre.)