Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1934)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION DE NEUMANN
Autor: Bouligand, Georges
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25993

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA FONCTION DE NEUMANN

PAR

Georges BOULIGAND (Poitiers).

---

1. — Pour l'équation de Laplace, la variation infinitésimale de la fonction de Neumann a été calculée par M. J. HADAMARD dans les conditions suivantes: par fonction de Neumann du domaine Ω pour le pôle P, on entend une fonction $\Gamma(M, P)$ singulière en P comme $\frac{1}{MP}$, harmonique relativement au point M dans Ω — P et dont la dérivée normale intérieure en un point Q de la frontière Σ de Ω vaut $\frac{4\pi}{S}$, où S désigne l'aire de la surface Σ, à laquelle on suppose des courbures principales continues [1]. On ajoute que la moyenne de Γ le long de Σ est nulle, ce qui détermine la constante additive et assure la symétrie en M et P.

J'ai signalé plus tard qu'on peut modifier, pour l'équation de Laplace, la définition de la fonction de Neumann, en abaissant l'ordre des invariants différentiels de Σ intervenant dans la variation infinitésimale. La brièveté de ma démonstration s'est exercée au détriment du résultat lui-même, où manque un terme important [2]. Je reprends ici un exposé systématique de la question en me plaçant, pour fixer les idées, dans l'espace euclidien à trois dimensions.

---

[1] J. HADAMARD. *Leçons sur le Calcul des variations*. Paris, Hermann, p. 307-312.

[2] Ce terme est à rétablir dans les publications suivantes: *Bull. Sc. Math.* 2me série, t. L., 1926, p. 299-300, *Journ. de l'Ec. Polyt*, 2me série, 26me cah., p. 20; et dans mon fascicule: *Sur divers problèmes de dynamique des liquides*, Gauthier-Villars, Paris 1930 (nos 11 et 22). L'omission de ce terme au no 22 laisse cependant subsister mes conclusions relatives à la conduite des approximations.

2. — En appelant λ une constante, lorsqu'au lieu de l'équation de Laplace, on prend l'équation

$$(E_\lambda) \qquad \Delta U - \lambda U = 0 ,$$

le problème de Neumann admet, pour λ réel et positif, une solution unique. La fonction de Neumann pour le domaine Ω et le pôle P est alors une solution $\Gamma(M, P, \lambda)$ de (E_λ), analytiquement régulière dans $\Omega - P$, ayant en P même singularité que

$$\frac{\operatorname{ch}(MP\sqrt{\lambda})}{MP},$$

tandis que la dérivée normale de Γ sur la frontière s'annule.

Supposons toujours $\lambda > 0$. En pareil cas, $\Gamma(M P; \lambda)$ ne devient jamais négatif, car il aurait, en un point de Σ, un minimum négatif, point où la dérivée normale intérieure serait nécessairement positive [1].

Pour M et P pris sur Σ, ajoutons que la double intégrale sur Σ de

$$\varphi(M)\,\varphi(P)\,\Gamma(M, P; \lambda)\,dS_M\,dS_P ,$$

réductible à

$$-4\pi \iint_\Sigma U \frac{dU}{dn} dS ,$$

où U est la solution de (E_λ) telle que $\frac{dU}{dn} = \varphi(P)$, donne en vertu du théorème flux-divergence (appliqué à U $\overrightarrow{\text{grad}}$ U) un résultat positif que soit φ.

Envisageons maintenant pour λ l'éventualité de valeurs négatives ou même de valeurs complexes. Alors, d'après la théorie de Fredholm, $\Gamma(M, P; \lambda)$ est une fonction méromorphe de λ, qui obéit à l'équation fonctionnelle des noyaux résolvants

$$\Gamma(M, P; \lambda) - \Gamma(M, P; \mu) + \frac{\lambda - \mu}{4\pi} \iiint_\Omega \Gamma(M, N; \lambda)\,\Gamma(N, P; \mu)\,d\Omega_N = 0 ,$$

[1] BRELOT. *Thèse*, Paris, 1931, p. 27 et 28; G. GIRAUD (généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique, chap. V, n° 5), *Bull. Sc. Math*, 2me série, t. LVI, octobre 1932; G. BOULIGAND (sur un problème aux limites de la théorie du potentiel); *Bull. Ac. Roy. Sc. Belg.*, t. XX, 1934, p. 291.

d'où l'on déduit qu'en faisant croître λ par valeurs positives, $\Gamma(M, P; \lambda)$ décroit lorsque M et P restent fixes.

On démontre d'ailleurs que les pôles de $\Gamma(M, P; \lambda)$ sont exclusivement fournis, outre la valeur $\lambda = 0$, par des valeurs réelles négatives de λ [1], ces pôles sont simples en raison de la symétrie de Γ par rapport aux deux points M et P [2]. Autour de $\lambda = 0$, on peut écrire, avec M. SANIELEVICI, le développement de Laurent

$$\Gamma(M, P; \lambda) = \frac{4\pi}{\lambda\Omega} + \gamma(M, P) + \lambda\gamma_1(M, P) + \lambda^2\gamma_2(M, P) + \dots,$$

où la lettre Ω désigne le volume Ω lui-même. Le premier terme du second membre, qui représente la partie singulière de Γ relative au pôle $\lambda = 0$, annule identiquement le premier membre de l'équation fonctionnelle des noyaux résolvants, si on l'y substitue à Γ. A droite de ce premier terme, dans le développement de $\Gamma(M, P; \lambda)$, figure au second membre une fonction de λ, holomorphe pour $\lambda = 0$, valeur pour laquelle elle se réduit à la fonction $\gamma(M, P)$ sur laquelle va se porter notre attention.

3. — D'après le procédé classique permettant d'évaluer les coefficients de la série de Laurent, nous avons

$$2i\pi\gamma(M, P) = \int_c \Gamma(M, P; \lambda)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

où λ désigne maintenant une variable complexe: l'intégrale au second membre est prise le long d'une circonférence c ayant son centre à l'origine du plan (λ) et son rayon assez petit pour que tout pôle de Γ autre que $\lambda = 0$ soit en dehors de ce cercle.

La différence

$$\Gamma(M, P; \lambda) - \frac{\operatorname{ch}(MP\sqrt{\lambda})}{MP}$$

---

[1] SANIELEVICI. *Thèse*, Paris, 1909.

[2] FRECHET et HEYWOOD. *L'équation de Fredholm*, p. 87. (Hermann, 1912.)

étant une solution de E_λ analytiquement régulière dans Ω, nous pouvons en conclure à l'analyticité régulière de

$$\gamma(M, P) - \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\operatorname{ch}(MP\sqrt{\lambda})}{\lambda MP}\,d\lambda = \gamma(M, P) - \frac{1}{MP}.$$

D'autre part, à l'exemple de la dérivée normale de $\Gamma(M, P; \lambda)$ le long de Σ, s'annulera celle de $\gamma(M, P)$.

Quant au laplacien de γ, par rapport au point M, nous l'obtiendrons en exprimant que celui de Γ est $\lambda\Gamma$, ce qui donne

$$2i\pi\,\Delta_M\gamma(M, P) = \int_c \Gamma(M, P; \lambda)\,d\lambda = \frac{4\pi}{\Omega}\cdot 2i\pi,$$

d'où

$$\Delta_M\gamma(M, P) = \frac{4\pi}{\Omega}.$$

C'est précisément la fonction $\gamma(M, P)$, de laplacien $\frac{4\pi}{\Omega}$ et de dérivée normale nulle sur Σ que j'ai préconisée, dans mes tentatives citées, comme résolvante du problème de Neumann.

Une autre remarque importante consiste en ce fait que l'intégrale de volume

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \Gamma(M, P; \lambda)\,d\Omega_M$$

fournit la solution de l'équation

$$\Delta U - \lambda U + 1 = 0$$

ayant sa dérivée normale nulle sur Σ. La valeur de cette intégrale est donc $\frac{1}{\lambda}$. D'où

$$\iiint_\Omega \Gamma(M, P; \lambda)\,d\Omega_M = \frac{4\pi}{\lambda},$$

d'où, en intégrant dans le plan (λ) le long du cercle c:

$$\iiint_\Omega \gamma(M, P)\,d\Omega_M = 0.$$

Cela posé, l'intégrale de volume

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Omega}\int \varphi(M)\,\gamma(M\,,\,P)\,d\Omega_M$$

fournit l'expression d'une fonction, dont le laplacien en un point M pris dans Ω est $\varphi(M) + C$, et dont la dérivée normale s'annule sur Σ; la constante C est ainsi déterminée par la condition que la moyenne de $\varphi(M) + C$ dans le domaine Ω soit nulle.

Enfin, l'intégrale de surface

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma} f(Q)\,\gamma(Q\,,\,P)\,dS_Q\ ,$$

où l'on suppose nulle la moyenne de $f(Q)$ le long de la surface Σ, nous donnera l'expression de la fonction harmonique dans Ω, ayant $f(Q)$ pour valeur de sa dérivée normale intérieure en chaque point Q de Σ. Et l'intégrale dans Ω du carré du gradient de cette fonction égalera la double intégrale sur Σ de

$$\frac{1}{4\pi} f(Q)\,f(P)\,\gamma(Q\,,\,P)\,dS_Q\,dS_P\ .$$

Cette double intégrale est donc positive pour toute fonction f de moyenne nulle sur Σ.

4. — Nous disposons maintenant des éléments qui vont nous permettre d'évaluer la variation infinitésimale de $\gamma(M, P)$, en passant par l'intermédiaire de celle de $\Gamma(M, P; \lambda)$.

En un point quelconque Q de Σ, désignons par $\vec{\nu}$ le vecteur unité de la normale intérieure, et envisageons une déformation infiniment petite menant de Σ, lieu du point Q, à une nouvelle surface Σ', lieu du point Q′ tel que

$$\overrightarrow{QQ'} = \vec{\nu}_Q\,\delta n_Q\ .$$

Il peut être commode de considérer le cas où l'infiniment petit δn_Q est positif en chaque point Q: alors Σ' est contenue dans Ω; il suffira de constater après coup que les formules obtenues de la sorte sont générales.

La surface Σ' délimite un nouveau domaine Ω'; soit $\Gamma'(M, P; \lambda)$ sa fonction de Neumann, relative à (E_λ). Pour une position fixe de P, cherchons la dérivée normale de

$$\Gamma'(M, P; \lambda) - \Gamma(M, P; \lambda)$$

au point Q' de Σ', dérivée normale qui est encore celle de

$$-\Gamma(M, P; \lambda) .$$

Si δn_Q avait une valeur constante indépendante de Q, la dérivée normale de Γ vaudrait

$$\frac{d^2\Gamma}{dn_Q^2}(Q, P)\,\delta n_Q .$$

Mais la variabilité de δn_Q entraîne en Q' une déviation du vecteur unité de la normale, qui devient $\vec{\nu} + \delta\vec{\nu}$ avec

$$\delta\vec{\nu} = -\,\vec{\mathrm{grad}}\,\delta n\ ^{1},$$

l'opérateur gradient étant ici relatif à la géodésie de la surface Σ: un champ scalaire $f(Q)$ ayant été défini sur cette surface, on entend par $\vec{\mathrm{grad}}\, f$ le vecteur tangent dont le produit scalaire par un déplacement infinitésimal de Q sur Σ équivaut à l'accroissement correspondant de $f(Q)$.

Cela posé, la dérivée normale de Γ au point Q' de Σ' sera

$$\vec{\mathrm{grad}}_{Q'}\,\Gamma(Q', P; \lambda)\cdot(\vec{\nu} + d\vec{\nu}) ,$$

ce qui équivaut à

$$\vec{\mathrm{grad}}_{Q'}\,\Gamma(Q', P; \lambda)\cdot\vec{\nu} + \vec{\mathrm{grad}}_Q\,\Gamma(Q, P; \lambda)\cdot d\vec{\nu} ,$$

c'est-à-dire à

$$\frac{d^2\Gamma}{dn_Q^2}(Q, P; \lambda)\,\delta n_Q - \vec{\mathrm{grad}}_Q\,\Gamma(Q, P; \lambda)\cdot\vec{\mathrm{grad}}_Q(\delta n) .$$

Nous aurons donc

$$4\pi\left[\Gamma'(M, P; \lambda) - \Gamma(M, P; \lambda)\right]$$
$$= \iint_\Sigma \Gamma(M, Q; \lambda)\left[\frac{d^2\Gamma}{dn_Q^2}(Q, P; \lambda)\,\delta n_Q - \vec{\mathrm{grad}}\,\delta n_Q\cdot\vec{\mathrm{grad}}_Q\,\Gamma(Q, P; \lambda)\right] dS_Q .$$

---

[1] Il me semble qu'en raison de sa simplicité, cette formule mérite d'être dégagée. Pour sa démonstration, il suffit de raisonner sur deux éléments plans dS_Q et dS'_Q, de Σ et de Σ', faisant entre eux un angle infiniment petit.

Puisque $\frac{d\Gamma}{dn}$ est nulle, nous pouvons remplacer $\frac{d^2\Gamma}{dn^2}$ par $\lambda\Gamma - \Delta_2\Gamma$ où Δ_2 est l'opérateur de Beltrami, c'est-à-dire la divergence, adaptée à la géodésie de Σ, du gradient de Γ (lequel est d'ailleurs tangent à Σ en chaque point). D'où

$$4\pi\,\delta\Gamma_M^P = \lambda \int\int_\Sigma \Gamma(M, Q\,;\,\lambda)\,\Gamma(Q\,;\,P\,;\,\lambda)\,\delta n_Q\,dS_Q$$

$$- \int\int_\Sigma \Gamma_M^Q \left[\Delta_2 \Gamma_P^Q\,\delta n_Q + \overrightarrow{\text{grad}}\,\delta n_Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_Q\,\Gamma_P^Q\right] dS_Q\ .$$

Le crochet peut s'écrire, compte tenu de la géodésie de Σ

$$\text{div}\left(\delta n_Q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma_P^Q\right)\ .$$

Si bien que l'élément différentiel de la dernière intégrale devient

$$\text{div}\left(\delta n_Q\,\Gamma_M^Q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma_P^Q\right) - \delta n_Q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma_M^Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma_P^Q\ .$$

De ces deux termes, sur toute l'étendue de Σ, le premier va donner une contribution nulle et il reste finalement

$$4\pi\,\delta\Gamma_M^P = \int\int_\Sigma \delta n_Q \left[\lambda\,\Gamma_M^Q\,\Gamma_P^Q + \overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma_M^Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\Gamma_P^Q\right] dS_Q\ .$$

5. — Il suffit alors de substituer, dans cette formule, le développement de Laurent de $\Gamma(M, P\,;\,\lambda)$ (cf. n° 2) et d'y supposer λ infiniment petit pour trouver

$$\delta\gamma_M^P = \frac{1}{\Omega}\int\int_\Sigma \left(\gamma_M^Q + \gamma_P^Q\right)\delta n_Q\,dS_Q + \frac{1}{4\pi}\int\int_\Sigma \overrightarrow{\text{grad}}\,\gamma_M^Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\gamma_P^Q\,\delta n_Q\,dS_Q\ .$$

formule d'où s'éliminent les courbures de la frontière.

6. — Les raisonnements précédents peuvent être utilisés à d'autres fins. Lorsqu'on étudie le mouvement commençant d'un liquide parfait pesant dans une auge fixe, où il part du repos, pour un choix convenable des unités, le champ des accélérations initiales peut se déduire de la pression p en prenant l'opposé du gradient de la fonction $p + z$ (l'axe des z étant orienté suivant

la verticale ascendante). Cette fonction, qui, dans le fluide, vérifie l'équation de Laplace, est solution d'un problème mixte: continue sur la surface libre S, elle y prend la valeur z, tandis que sa dérivée normale le long de la paroi mouillée Σ est nulle. Soit P un point intérieur au domaine Ω initialement recouvert par le fluide. La fonction de Green G(M, P) du problème mixte, singulière en P comme $\frac{1}{MP}$ est harmonique dans $\Omega - P$. Sa valeur s'annule sur S et celle de sa dérivée normale s'annule sur Σ. Cette fonction est d'ailleurs *non négative*, sinon elle présenterait un minimum négatif en un point de Σ, point où le gradient serait non nul et porté suivant la normale à Σ (cf. n° 2), circonstance incompatible avec l'annulation de la dérivée normale le long de Σ [1].

Supposons qu'on envisage une déformation infinitésimale de la paroi mouillée, opérant sur une portion Σ_1 de cette paroi *qui reste à distance positive de la surface libre.* Il est alors facile de calculer, par la méthode du n° 4, l'accroissement infinitésimal de la fonction $\psi = p + z$, ou indifféremment celui de la fonction de Green du problème mixte correspondant. On obtient ainsi les formules

$$\delta\psi_P = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_1} \overrightarrow{\text{grad}}\, G_P^Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, \psi_Q\, \delta n_Q\, d\sigma_Q ,$$

$$\delta G_P^M = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma_1} \overrightarrow{\text{grad}}\, G_M^Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, G_M^P\, \delta n_Q\, d\sigma_Q ,$$

$d\sigma$ désignant un élément d'aire de la surface Σ_1, seule déformée dans les conditions actuelles (à l'exclusion de $\Sigma - \Sigma_1$ et de la surface libre S). En réitérant, sur la seconde de ces formules, la même omission que pour la fonction de Neumann, dans les écrits incriminés, j'aurais dû conclure que δG était nulle, ou que G était indépendante de Σ_1: ce qui me révéla nettement la présence d'une faute.

[1] Le même raisonnement montre que $p + z$ ne peut atteindre sur Σ, ni sa borne inférieure, ni sa borne supérieure. Ces deux bornes sont donc atteintes sur S, la première au point de cote maxima, la seconde au point de cote minima. Plaçons-nous dans des conditions telles que ces points soient à distance positive de la paroi. Alors, aux premiers l'accélération initiale sera verticale descendante, au second, elle sera verticale ascendante. Voir mes développements sur ce point au *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* (4e année, janvier et février 1935).