10. - LES DOMAINS A CONNEXION INFINIE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Elle est de première espèce, parce que f reste fini d'après la construction de U et de V.

Soient σ la transformée biunivoque de d par $\zeta = \mathrm{F}(z)$ et σ' sa symétrique par rapport à γ_0 et décrite, comme on sait, par le point

$$\zeta' = \frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{F}(z)}} .$$

$\overline{\mathrm{F}(z)}$ est une fonction analytique du point qui décrit la face du disque d située en dessous du plan z. Donc $\sigma + \sigma'$ est ici l'image conforme du disque d à deux faces. Au point de vue topologique, on peut raccorder les points frontières symétriques par rapport à γ_0, et $\sigma + \sigma'$ devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée de genre p, homéomorphe aux deux faces d'un disque à p trous. C'est la surface de Riemann-Clifford-Klein de la classe des courbes algébriques $\mathrm{A}(r, s) = 0$ associées par Schottky à la classe d'aire d.

10. — Les domaines a connexion infinie.

Nous devrons nous contenter de quelques indications sur ce sujet et nous renvoyons pour le reste à la bibliographie. Les méthodes employées ici se rattachent presque toutes au travail de M. Hilbert publié en 1909 dans les *Gött. Nach.*, p. 314. M. Hilbert ne se restreint pas au terrain de la théorie des fonctions mais revient au calcul des variations. Il se rapproche ainsi de la méthode primitive de Riemann qui tentait de résoudre le problème de Dirichlet par la recherche d'une fonction φ rendant minimum l'intégrale

$$\int\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy .$$

Il est intéressant de remarquer que les premiers pas faits dans le terrain des connexions infinies s'inspirent des considérations de minimum qui guidèrent Riemann dans le problème de Dirichlet et dans l'étude qui s'y rattache de la représentation conforme des aires simplement connexes.

Désignons par D_∞ un domaine à un seul feuillet à connexion infinie limite de domaines emboîtés à connexion finie D_n.

Un *élément de frontière* f de D_∞ est un continu de la frontière de D_∞ qui n'est pas contenu dans un continu plus grand. (A noter que l'ensemble des f n'est pas toujours dénombrable.)

I. *Représentation conforme de deux* D_∞ *l'un sur l'autre.* — Comme cas particulier du théorème général de l'uniformisation, il faut et il suffit, pour que cette représentation soit possible, que les deux groupes fondamentaux soient identiques.

Mêmes références que l'uniformisation (Poincaré, Koebe).

II. *Domaines à fentes parallèles.* — 1° Supposons que D_∞ contienne le point à l'infini. Soit Φ_{D_∞} la famille des fonctions régulières et univalentes dans D_∞, qui admettent à l'infini le développement:

$$w(z) = z + \frac{a}{z} + \dots \tag{1}$$

Parmi ces fonctions, il en est une et une seule dont la partie réelle rende *minimum* l'intégrale de Dirichlet (prise convenablement pour éviter le pôle). Cette fonction représente D_∞ sur un domaine D'_∞ dont tous les éléments de frontière sont des points ou des segments parallèles à l'axe réel. Un tel domaine est dit «*domaine à fentes parallèles*», D'_∞ est dit «*domaine à fentes parallèles minimum*».

Si maintenant on résout ce problème de minimum pour les domaines D_n, les solutions tendent vers la solution de ce même problème pour D_∞.

Enfin la frontière de D'_∞ a une mesure superficielle nulle, ce qui n'a pas toujours lieu pour un domaine à fentes parallèles non minimum. (Par exemple: le plan moins un ensemble parfait discontinu de mesure positive: tous les éléments de frontière sont des points.)

Dans le cas de la connexion finie tout domaine à fentes parallèles est minimum.

Tout ceci se trouve démontré dans Hilbert, *Gött. Nach.*, 1909, p. 314 et Koebe, *id.*, p. 324 et 1910, p. 59.

2° Ensuite Koebe (*Gött. Nach.*, 1918) émet l'hypothèse que pour un domaine minimum, la projection de la frontière sur un axe perpendiculaire aux fentes a une mesure nulle. Cette hypothèse n'est pas exacte (Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1931, p. 185, et De Possel, Thèse). Grötzsch donne même un exemple où cette projection recouvre tout un segment.

3° Le problème qui consiste à rendre $R(a)$ maximum dans le développement (1) a une solution et une seule dans Φ_{D_∞} ; elle coïncide avec la solution du problème du minimum ci-dessus.

Plus généralement, le domaine exact de variation de a est un cercle et a ne se trouve sur la circonférence, à l'extrémité du rayon qui fait l'angle θ avec l'axe réel, que pour une fonction représentant D_∞ sur un domaine minimum dont les fentes sont parallèles à la direction $\frac{\theta}{2}$.

Ces deux propriétés se trouvent dans Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1932, et De Possel, *Gött. Nach.*, 1931; *Math. Ann.*, 1932.

4° Si tout l'extérieur du cercle-unité appartient à D_∞, et si $w(z)$ est la fonction extrémale définie ci-dessus, on a:

$$|\,J\,(w(z) - z)\,| < K\,|\,a\,|^{\frac{1}{4}} \qquad (K < 1000)\ .$$

a étant le coefficient du développement (1). — Voir De Possel, *Math. Ann.*, 1932.

III. *Domaines à fentes radiales et concentriques.* — 1° Koebe étudie aussi le problème du minimum de l'intégrale de Dirichlet pour des singularités autres que le pôle.

Si on introduit deux discontinuités en $\log\frac{1}{r}$, pour $\log|w(z)|$ (au point z_1 et à l'infini) *la solution du problème de minimum conduit à un domaine dont tous les éléments de frontière sont des fentes radiales ou des droites passant par* $w(z_1)$.

Avec deux discontinuités en Arctg, en z_1 et à l'infini, on trouve *des éléments de frontière sur des cercles concentriques de centre* $w(z_1)$.

Tous les résultats du cas des fentes parallèles, unicité de la solution du problème de minimum, non-unicité de la solution du problème de représentation conforme dans le cas d'un D_∞, identité entre la solution du problème pour D_∞ et la limite des solutions du même problème pour les D_n, subsistent. — Voir Koebe, *Gött. Nachr.*, 1909, p. 314 et 1910, p. 59.

2° Ces solutions correspondent respectivement aux fonctions qui rendent maxima et minima $|w'(z_1)|$ dans la famille Φ_{D_∞}. Plus généralement le domaine exact de variation de $\log w'(z_1)$ est un cercle dont la circonférence n'est atteinte que pour des représentations où les éléments de frontière sont sur des spirales logarithmiques de centre $w(z_1)$ (cas limite: II 3° lorsque z_1 tend vers l'infini). — Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1930, 31, 32 et De Possel, Thèse.

IV. *Autres résultats.* — 1° Le domaine exact de variation de $\log [w(z_1) - w(z_2)]$ est un cercle dont la circonférence n'est atteinte que pour des représentations où les éléments de frontière sont sur les trajectoires *isogonales* des coniques homofocales de foyers $w(z_1)$, $w(z_2)$. Ce théorème admet comme cas-limite III lorsque z_1 et z_2 viennent se confondre.

2° Le domaine exact de variation de $w(z_1)$ est un cercle, dont la circonférence n'est atteinte que pour des représentations où les éléments de frontière sont sur des paraboles homofocales dont le foyer est $w(z_1)$. C'est un cas-limite du IV 1° lorsque z_2 tend vers l'infini. — Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1932, 1933.

3° Enfin Grötzsch étudie encore quelques autres représentations; ainsi le cas de deux éléments de frontière où s'accumulent des éléments de frontière isolés. On représente ces deux éléments sur des cercles concentriques ou des points. L'unicité est également démontrée. — *Leipz. Ber.*, 1929, p. 51.