

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1934)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT  
CONNEXES  
**Autor:** Julia, G.  
**Kapitel:** 9. — Retour au point de vue algébrique.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25992>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Revenons au cas général de  $p$  quelconque et contentons-nous de décrire la disposition des cassinienues. L'on aurait, en partant de  $\Sigma_1$ ,

$$F(z) = \zeta = P(u) = (u - u_1) \dots (u - u_p) .$$

Alors, le domaine canonique est limité: extérieurement, par la cassinienne  $\Gamma_0: |P(u)| = 1$  qui est régulière et entoure les  $p$  zéros de  $P$ ; intérieurement, par  $p$  cassinienues, tronquées ou non,  $\Gamma_1 \dots \Gamma_p$ .  $\Gamma_p$  est un ovale (courbe régulière) entourant  $u_p$  seul. Les  $\Gamma_i$  intermédiaires se composent d'une boucle fermée entourant un seul zéro de  $P$  et de  $v_i$  boucles tronquées suivant

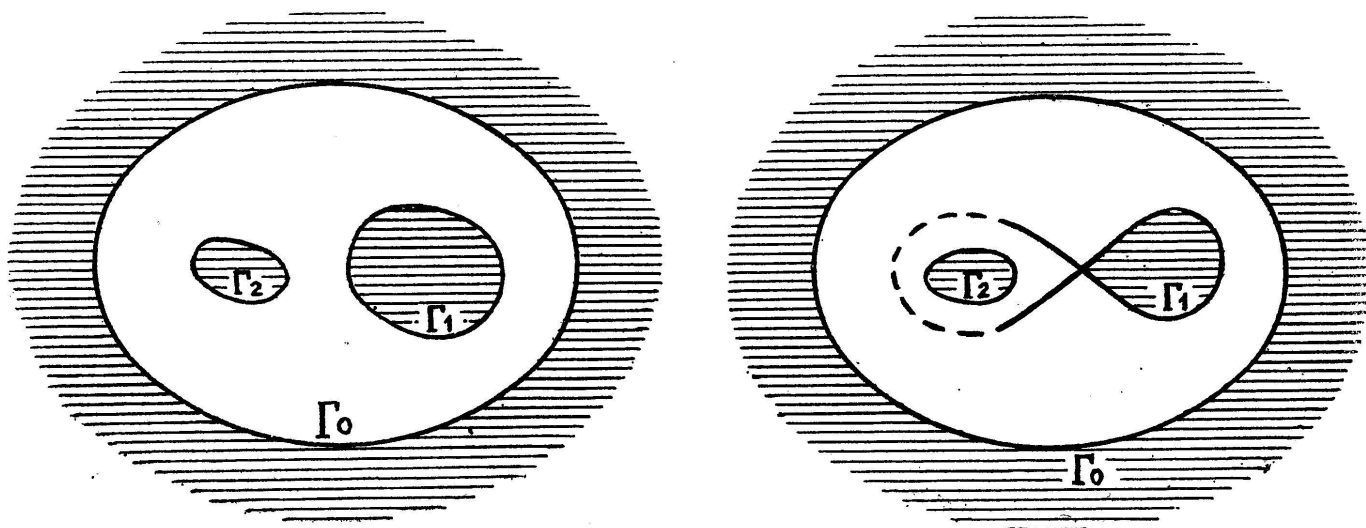


Fig. 5.

Disposition des cassinienues pour  $p = 2$ .

des arcs qui correspondent aux arcs de passage, s'il y a  $2v_i$  zéros de  $F'(z)$  sur  $c_i$ ;  $\Gamma_i$  a  $v_i$  points doubles à tangentes rectangulaires. Topologiquement, les cassinienues tronquées sont des courbes fermées, adjacentes à un ou plusieurs arbres extérieurs.

Partant de  $\Sigma_2$  et de la relation  $F(z) = R(u)$ , les mêmes remarques subsisteront.

## 9. — RETOUR AU POINT DE VUE ALGÈBRE.

Nous voudrions montrer enfin que ces résultats nouveaux peuvent être rattachés fortement aux recherches algébriques anciennes et notamment aux travaux de Schottky.

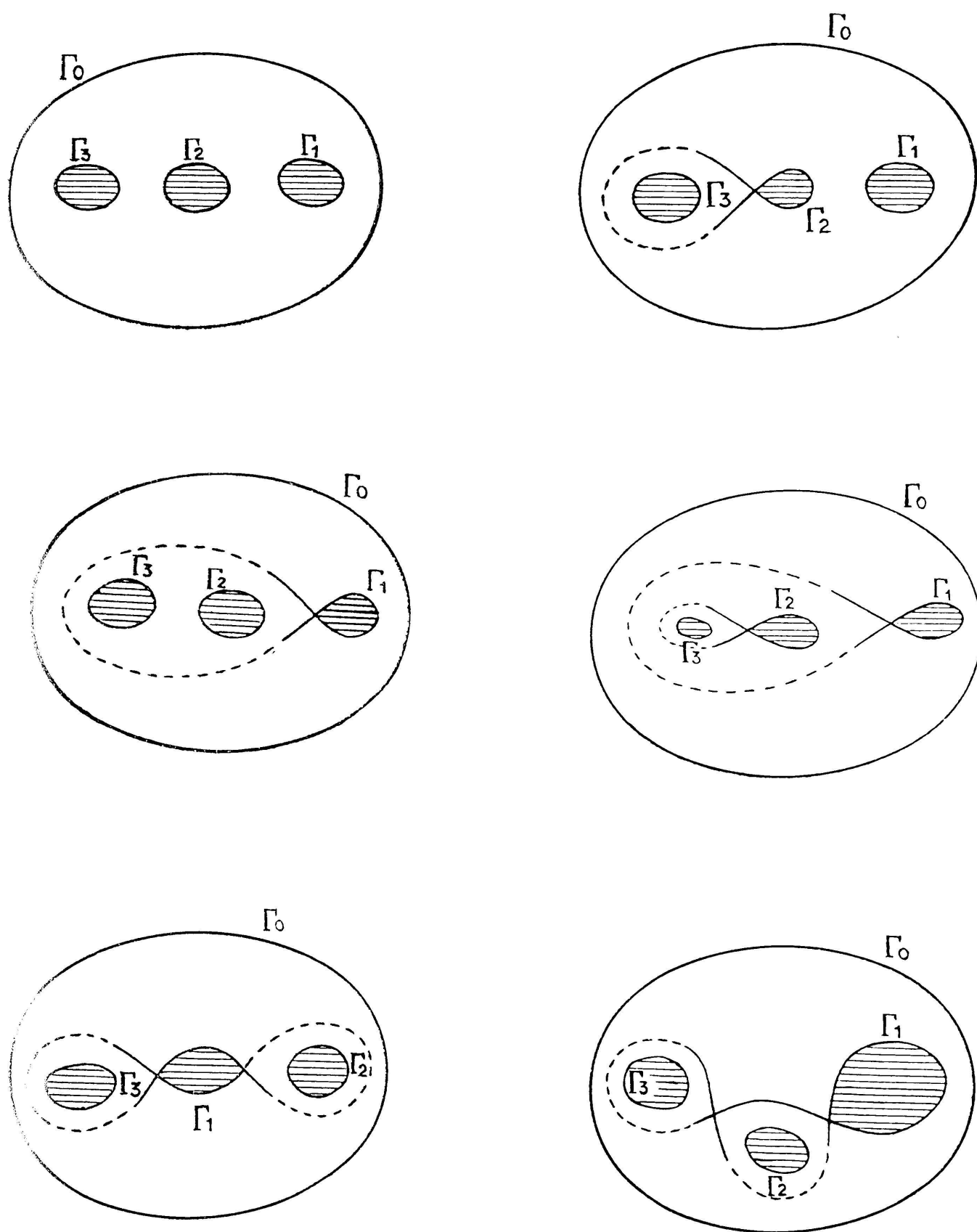


Fig. 6.

 Disposition des cassiniennes pour  $p = 3$ .

Tout d'abord le problème de trouver les aires invariantes par des transformations biunivoques (directement ou inversement conformes) se ramène à la recherche des aires canoniques  $D$  invariantes par des déplacements ou des symétries non euclidiennes. Ce problème est identique au fond à celui de la détermination des courbes algébriques  $A(r, s) = 0$  invariantes par des transformations birationnelles, problème complètement résolu par HURWITZ.

Envisageons la fonction  $f(z) = LF(z) = U + iV$ . Elle est analytique dans  $d$ , non uniforme, mais sa dérivée  $f'(z)$  est uniforme, comme on le vérifie d'après la construction de  $V$ .  $F'(z)$  et  $f'(z)$  ont les mêmes zéros avec le même ordre de multiplicité.  $f'(z)$  est donc holomorphe et uniforme dans  $d$  et sur les contours.

Sur ces derniers  $U$  reste constant,  $\frac{dU}{d\sigma} = 0$ ,  $\sigma$  étant l'arc de  $c_i$  et l'on a

$$f'(z) \frac{dz}{d\sigma} = i \frac{dV}{d\sigma} = -i \frac{dU}{dn}$$

quantité purement imaginaire sur les frontières de  $d$ . La fonction  $f'$  est donc forcément liée aux fonctions  $r(z)$  et  $s(z)$  de SCHOTTKY, introduites précédemment.  $r(z)$  étant méromorphe dans  $d$  et réelle sur  $c_i$ , il en sera de même pour

$$\frac{dr}{d\sigma} = r'(z) \frac{dz}{d\sigma}.$$

Le rapport  $\frac{f'(z)}{ir'(z)}$  sera réel sur les  $c_i$ ; il est uniforme et méromorphe dans  $d$  et sur sa frontière. C'est donc une fonction de la classe  $K(z)$ , c'est-à-dire une fonction rationnelle  $R$  à coefficients réels des deux fonctions fondamentales  $r(z)$  et  $s(z)$  et l'on a

$$f'(z) = iR(r, s)r'(z).$$

Il en résulte que  $f(z)$  est une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique  $A(r, s) = 0$ :

$$f(z) = i \int R(r, s) dr.$$

Elle est de première espèce, parce que  $f$  reste fini d'après la construction de  $U$  et de  $V$ .

Soient  $\sigma$  la transformée biunivoque de  $d$  par  $\zeta = F(z)$  et  $\sigma'$  sa symétrique par rapport à  $\gamma_0$  et décrite, comme on sait, par le point

$$\zeta' = \frac{1}{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\overline{F(z)}} .$$

$\overline{F(z)}$  est une fonction analytique du point qui décrit la face du disque  $d$  située en dessous du plan  $z$ . Donc  $\sigma + \sigma'$  est ici l'image conforme du disque  $d$  à deux faces. Au point de vue topologique, on peut raccorder les points frontières symétriques par rapport à  $\gamma_0$ , et  $\sigma + \sigma'$  devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée de genre  $p$ , homéomorphe aux deux faces d'un disque à  $p$  trous. C'est la surface de RIEMANN-CLIFFORD-KLEIN de la classe des courbes algébriques  $A(r, s) = 0$  associées par Schottky à la classe d'aire  $d$ .

#### 10. — LES DOMAINES A CONNEXION INFINIE.

Nous devons nous contenter de quelques indications sur ce sujet et nous renvoyons pour le reste à la bibliographie. Les méthodes employées ici se rattachent presque toutes au travail de M. Hilbert publié en 1909 dans les *Gött. Nach.*, p. 314. M. Hilbert ne se restreint pas au terrain de la théorie des fonctions mais revient au calcul des variations. Il se rapproche ainsi de la méthode primitive de Riemann qui tentait de résoudre le problème de Dirichlet par la recherche d'une fonction  $\varphi$  rendant minimum l'intégrale

$$\iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy .$$

Il est intéressant de remarquer que les premiers pas faits dans le terrain des connexions infinies s'inspirent des considérations de minimum qui guidèrent Riemann dans le problème de Dirichlet et dans l'étude qui s'y rattache de la représentation conforme des aires simplement connexes.