Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT CONNEXES

Autor: Julia, G.

Kapitel: 7. – SUR LES CORRESPONDANCES TRANSFORMÉES

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25992

faire d'une manière plus naturelle, comme suit. On prendra la symétrique σ_1' de σ_1 par rapport à la frontière γ_0

$$\zeta' = \frac{1}{\bar{\zeta}} ,$$

les points homologues étant toujours pris sur le même feuillet. La réunion Σ_2 de σ_1 et de σ_1' est une surface à p feuillets dont chacun recouvre tout le plan. Elle a $p - 1$ points de ramification de σ_1 et $p - 1$ points de ramification symétriques de σ_1' qui établissent la connexion entre les mêmes feuillets. Σ_2 est de « genre zéro » et elle est encore homéomorphe au plan complet. En vertu du théorème déjà utilisé de Schwarz, Σ_2 se laisse représenter conformément et biunivoquement sur un plan complet.

Soient $u = u(\zeta)$ cette correspondance et $\zeta = \mathrm{R}(u)$ la correspondance inverse. Un raisonnement semblable à celui déjà fait au paragraphe précédent, permet d'affirmer que $\mathrm{R}(u)$ est une fonction rationnelle de degré p à cercle fondamental. Donc σ se transforme en une aire D du plan u biunivoquement et conformément. Comme la correspondance entre d et σ jouissait de la même propriété, la transformation $(z \rightarrow u)$ donnée par

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{R}(u)$$

est une représentation conforme, biunivoque du domaine d sur un domaine D du plan u. Au contour c_0 correspond ainsi le cercle fondamental de rayon unité et aux contours c_i correspondent p cassiniennes généralisées sans point commun, chacune entourant un des zéros de $\mathrm{R}(u)$. Ce sont les représentations que M. Julia a fait connaître récemment.

7. — Sur les correspondances transformées.

Les polynômes $\mathrm{P}(u)$ de M. de la Vallée Poussin ne sont pas entièrement déterminés, mais il est facile de voir que tous ceux qui dérivent d'une même surface Σ_1 se déduisent de l'un d'entre eux par la relation

$$\mathrm{P}(u) = \mathrm{P}_0(au + b) .$$

Nous pourrons toujours normaliser cette classe en imposant aux polynômes $P(u)$ d'avoir un coefficient de u^n égal à un en module. Il est clair qu'alors on doit avoir $|a| = 1$ pour que $P(u)$ satisfasse à cette condition en même temps que $P_0(u)$. L'aire canonique D sur laquelle on représente d n'est donc déterminée qu'à une transformation près de la forme

$$(u \longrightarrow ue^{i\theta} + b)$$

qui n'est qu'un déplacement euclidien.

Concevons, alors, deux domaines d et d' qui puissent être mis en correspondance conforme, puis passons aux aires D et D' correspondantes et canoniques de M. de la Vallée Poussin. Le passage du plan z de d et d' au plan u de D et D' a donc pour effet de *linéariser la correspondance conforme entre* D *et* D'.

De même, les fonctions $R(u)$ appartiennent à une famille dépendant de trois constantes réelles

$$R(u) = R_0\left[\frac{u - a}{1 - \bar{a}u} e^{i\theta}\right].$$

Une correspondance conforme entre deux aires de même classe d et d' du plan z est transformée par $F(z) = R(u)$ en la substitution

$$\left(u \longrightarrow \frac{u - a}{1 - \bar{a}u} e^{i\theta}\right)$$

qui correspond, comme on le sait depuis Poincaré, à un déplacement non euclidien du plan de Lobatchewsky. L'effet de la projection sur le domaine canonique de M. Julia est donc encore de *linéariser au sens non euclidien* la correspondance entre les deux domaines primitivement donnés d et d'.

Nous avons déjà vu que la surface σ dépend de $3p - 3$ paramètres réels. Il en est de même évidemment des domaines canoniques de M. de la Vallée Poussin : p pour $\lambda_1 \ldots \lambda_p$, $2p$ pour fixer les zéros de $P(u)$ et enfin trois à soustraire, un pour θ et deux pour b à cause de l'indétermination due au déplacement euclidien précédent. L'on retrouverait exactement le même nombre de paramètres pour la représentation de M. Julia. Mais ici ces paramètres ne sont *pas entièrement arbitraires*, car nous avons supposé que F' ne s'annulait pas sur la frontière de d.