

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1934)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT CONNEXES
Autor: Julia, G.
Kapitel: 6. — Les représentations de MM. de la Vallée Poussin et Julia.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25992>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Grâce à la fonction uniformisante $z = \varphi(\zeta)$ de Poincaré, toutes les fonctions $K(z)$ de Schottky envisagées précédemment, deviennent des fonctions uniformes de ζ dans C et admettant le groupe G . Elles sont réelles sur Γ et peuvent par suite être prolongées analytiquement à l'extérieur de C par le principe de symétrie. Les coordonnées r et s de la courbe algébrique réelle $A(r, s) = 0$ deviennent ainsi des fonctions uniformes de ζ , définies dans tout le plan¹, réelles sur Γ , invariantes par les substitutions de G : on retrouve ainsi une représentation paramétrique de la courbe $A(r, s) = 0$ par des fonctions fuchsiennes. Les domaines de discontinuité sont les $\overline{D_i}$; chacun d'eux représente la surface de Riemann R envisagée plus haut, D_i et D'_i correspondant respectivement à R_0 et R'_0 .

6. — LES REPRÉSENTATIONS DE MM. DE LA VALLÉE POUSSIN ET JULIA.

En 1930, dans un beau mémoire des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, M. DE LA VALLÉE POUSSIN introduisit de nouveaux domaines canoniques formés par des cassinienes, c'est-à-dire par des courbes d'égal module d'un polynôme:

$$|P(u)| = \text{constante}.$$

Nous dirons que la cassinienne est de degré p si le degré du polynôme est p .

Les domaines de genre un se laissant représenter sur un anneau circulaire convenable

$$|u| = \begin{cases} e^{\lambda_0} \\ e^{\lambda_1} \end{cases} \quad (\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 < \lambda_0).$$

Il y avait lieu de se demander si un domaine de genre p pouvait être représenté sur des aires limitées par $p + 1$ cassinienes de degré p

$$|P(u)| = \begin{cases} e^{\lambda_0} \\ \vdots \\ e^{\lambda_p} \end{cases}.$$

¹ Excepté sur un ensemble de mesure nulle situé sur F .

Sous cette forme, le résultat ne serait pas général et M. Julia qui entreprit ses recherches sur ce sujet, à la demande de M. de la Vallée Poussin, a indiqué ultérieurement des domaines de genre $p > 1$ où ce résultat serait en défaut. Ce que M. de la Vallée Poussin a établi, c'est ceci: tout domaine de genre p peut être mis en correspondance conforme biunivoque avec une aire limitée par des cassiniennes de degré égal ou supérieur à p fournies par un polynôme P ayant seulement p racines distinctes. Ce degré peut être pris égal à p si la dérivée $F'(z)$ d'une fonction $F(z)$, que nous dirons « principale », dont le module est constant sur les frontières, ne s'annule pas sur ces frontières.

Frappé par l'élégance du résultat de M. de la Vallée Poussin où le degré des cassiniennes égale le genre de l'aire à représenter, M. JULIA a cherché une solution qui sauvegardât ce caractère, à son avis essentiel, pour tous les cas possibles, c'est-à-dire même si la dérivée $F'(z)$ s'annule sur les frontières. Il parvint à montrer que tout domaine de genre p peut être représenté sur une aire dont les frontières *appartiennent à des cassiniennes de degré p* . Chaque frontière est soit une cassinienne fermée sans point multiple, soit une partie d'une cassinienne comprenant au moins une boucle. Il montra en plus que les polynômes $P(u)$ pouvaient être remplacés par des fonctions rationnelles $R(u)$ de degré p à cercles fondamentaux, les cassiniennes généralisées : $|R(u)| = \text{constante}$, ayant même caractère que précédemment.

M. de la Vallée Poussin avait introduit également d'autres aires canoniques, limitées en particulier par des courbes de la forme

$$|(u - a_1)^{n_1} \dots (u - a_p)^{n_p}| = \begin{cases} 1 \\ e^{-2\pi} \end{cases},$$

dont l'une est un ovale simple et la seconde se décompose en p ovales simples intérieurs au précédent. Les n_i sont positifs mais généralement irrationnels.

Soit d un domaine du plan z limité par un contour extérieur c_0 et p contours intérieurs $c_1 \dots c_p$. On peut sans restriction supposer ces contours analytiques. M. de la Vallée Poussin construit la fonction

$$F(z) = e^{U+iV}$$

holomorphe dans d et sur les c_i et dont le module e^U prend sur les c_i des valeurs constantes qu'on peut supposer réparties comme suit

$$1 > e^{\lambda_1} \geq e^{\lambda_2} \geq \dots \geq e^{\lambda_p}.$$

L'argument V augmente de -2π lorsque z décrit une des $c_1 \dots c_p$, dans le sens positif par rapport à l'aire, et de $p \cdot 2\pi$ lorsque z décrit c_0 .

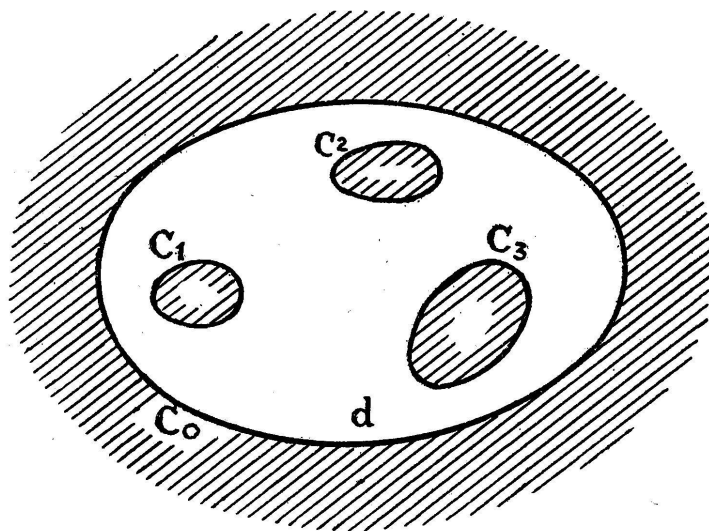


Fig. 4.

Cette construction se ferait au moyen de p fonctions fondamentales U_1, \dots, U_p harmoniques et uniformes dans d et telles que l'on ait

$$U_i = \begin{cases} 1 & \text{sur } c_i \quad i \neq 0 \\ 0 & \text{sur les autres contours.} \end{cases}$$

Ces fonctions existent et sont uniques. Soient alors V_1, \dots, V_p les p fonctions conjuguées; elles ne sont pas uniformes: à chaque c_k correspond une période ω_{ik} pour V_i et le déterminant de ces périodes

$$\| \omega_{ik} \| \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, p \\ k = 1, \dots, p \end{matrix}$$

est différent de zéro, comme SCHOTTKY et M. KOEBE l'ont établi antérieurement. En posant

$$\begin{aligned} U &= \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p \\ V &= \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_p V_p \end{aligned}$$

on aura la fonction $F(z)$ de M. DE LA VALLÉE POUSSIN. U prendra la valeur λ_i sur c_i . Les λ_i sont déterminés d'une façon unique par les conditions de périodes relatives à c_i et le savant belge les appelle les indices de l'aire d . (Voir *Cahiers scientifiques*, fasc. XIV.) La fonction $F(z)$ est donc holomorphe et *uniforme* dans d et satisfait aux conditions demandées. $F(z)$ est, bien entendu, déterminée à un facteur près de module unité. On démontre facilement que tous les λ_i sont négatifs, autrement dit U atteint son maximum sur c_0 et seulement sur c_0 . En posant :

$$F(z) = P(u) \quad \text{ou} \quad F(z) = R(u),$$

au contour c_i correspondra une cassinienne Γ_i , ou une cassinienne généralisée :

$$|P(u)| = e^{\lambda_i} \quad \text{ou} \quad |R(u)| = e^{\lambda_i}.$$

Chaque cassinienne entourera au moins un zéro ou un pôle des fonctions en u ; dans l'hypothèse contraire, les fonctions

$$L |P(u)| \quad \text{ou} \quad L |R(u)|$$

que l'on sait être harmoniques, seraient constantes sur les Γ_i , régulières à l'intérieur de Γ_i et par suite constantes identiquement, ce qui ne peut pas être.

M. de la Vallée Poussin montre qu'il existe effectivement un polynôme P de degré p à racines simples, tel que la correspondance ($z \rightarrow u$) de l'aire donnée d et de l'aire D limitée aux Γ_i soit biunivoque, dans le cas où $F'(z)$ ne s'annule pas sur les frontières de D . C'est par des considérations tirées de la théorie des lacets que le savant belge achève ainsi sa démonstration.

Si élégante et simple que soit la méthode précédente, M. Julia préfère, pour surmonter les difficultés du cas où la dérivée s'annulerait sur les frontières, prendre comme élément central la surface de Riemann σ que décrit le point ζ

$$\zeta = F(z)$$

lorsque z décrit le domaine d . Remarquons que, $F(z)$ étant uniforme dans d , cette surface de Riemann σ est en correspondance biunivoque avec le domaine d balayé par z . σ est donc

à la fois le domaine d'existence et d'uniformité de la fonction inverse, multiforme

$$z = \Phi(\zeta)$$

et le « *domaine des valeurs* » de F dans d .

A deux points z_1 et z_2 de d peut correspondre un même point géométrique $\zeta_1 = \zeta_2$. Nous conviendrons que ζ_1 et ζ_2 ne sont pas sur le même feuillet et ne coïncident qu'en projection.

M. Julia avait déjà, à diverses reprises, attiré l'attention des chercheurs sur cette construction, en quelque sorte inverse de celle de Riemann, à partir d'une fonction uniforme $F(z)$. Cette surface de Riemann σ jouit de propriétés générales: frontières, nombre des feuillets, relation entre le nombre des points de ramification intérieurs et celui des points de ramification sur la frontière, connexion, et l'on démontre que ces propriétés sont caractéristiques de la surface envisagée. Cette surface cano- nique σ met en lumière la nature des difficultés qu'avait rencontrées M. de la Vallée Poussin et la manière de les éviter par des cassiniennes tronquées au lieu d'élever le degré des polynômes $P(u)$.

La construction de la surface σ . — Chaque point z , où $F'(z) \neq 0$, peut être entouré d'une aire (δ) à laquelle correspond biunivoquement par $\zeta = F(z)$ une aire (Δ) circulaire. Chaque point z' de d où $F'(z') = 0$ peut être entouré d'une aire (δ') à laquelle correspond biunivoquement un élément (Δ') de surface de Riemann présentant au point $\zeta' = F(z')$ un point de ramification autour duquel se permutent k feuillets de (Δ') , la frontière de (Δ') étant d'ailleurs constituée par un cercle de centre ζ' parcouru k fois de suite.

En vertu du lemme de BOREL-LEBESGUE, on peut recouvrir d avec un nombre fini d'aires (δ) et (δ') auquel correspondent sur le plan ζ un nombre fini d'aires (Δ) et (Δ') . Les domaines (δ) et (δ') empiètent les uns sur les autres et il en est de même des (Δ) et (Δ') . Partant d'une aire (δ_0) , nous ferons le prolongement de $F(z)$ dans tout d et relierons les domaines (Δ) et (Δ') comme l'étaient les δ , c'est-à-dire en respectant les connexions. Un nombre fini d'opérations permettra ainsi d'engendrer l'aire de Riemann σ , transformée conforme et biunivoque de d par $F(z)$.

La surface σ est limitée par des courbes γ_i , sur lesquelles $|\zeta| = e^{\lambda_i}$, qui correspondent aux contours c_i de d . Les γ_i se projettent donc sur des circonférences γ_i du plan ζ . Quand z décrit c_i , ζ décrit γ_i toujours dans le même sens si $F' \neq 0$ sur c_i , ou avec des rebroussements aux points où cette dérivée serait nulle. Pour cette raison, nous appellerons les γ_i des courbes circulaires.

A tout point z' intérieur à d tel que $F'(z') = 0$ correspond un point de ramification de σ , mais si z' est sur une des frontières de d , le point ζ' correspondant ne peut être regardé comme un point de ramification de σ . Il serait point de ramification pour un prolongement σ^* de σ correspondant à un prolongement de d par des bandes convenables entourant les c_i , et les points de rebroussement précédemment mentionnés sont évidemment les traces de ce que seraient ces points de ramification. On s'assure d'ailleurs (par des propriétés de maximum) que F' ne peut s'annuler sur c_0 et c_p . En plus, chaque zéro de F' étant pris avec son ordre de multiplicité, l'on peut montrer que sur les autres contours les racines de F' sont forcément en nombre pair (par la variation des arguments). Enfin, par des raisonnements que nous ne reproduirons pas ici, M. Julia aboutit à la relation fondamentale suivante:

$$2a + b = 2p - 2 ,$$

a étant le nombre des zéros intérieurs à d , b le nombre des zéros sur la frontière de d et p comme toujours le genre de l'aire. Plaçons-nous alors dans des circonstances simples afin de pouvoir décrire la surface σ sans complications superflues de langage. Supposons $b = 0$ (donc aucune racine sur la frontière et $a = p - 1$), les racines intérieures simples et les λ_i tous différents: $\lambda_p < \lambda_{p-1} < \dots < \lambda_1 < 0$.

Alors, il y a p feuillets de σ limités extérieurement par γ_0 et intérieurement par l'une des circonférences $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Ces feuillets sont unis par $p - 1$ points de ramification simples. Ils se traversent suivant les lignes de croisement issues des points de ramification et s'étendant jusqu'à γ_0 . Ces résultats s'obtiendraient en recherchant le nombre $n(\alpha)$ des racines de l'équation

$$F(z) - \alpha = 0 ,$$

nombre évidemment égal à celui des feuillets situés au-dessus du point α du plan ζ . Ce nombre est, en vertu d'un théorème de Cauchy,

$$n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 \dots c_p} \frac{F'(z)}{F(z) - \alpha} dz,$$

et l'on peut écrire aussi, comme on sait,

$$n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \text{ var. totale de l'arg de } (\zeta - \alpha).$$

Le calcul de cette variation totale montrera l'existence d'un feuillet entre γ_p et γ_{p-1} , de deux feuillets entre γ_{p-1} et γ_{p-2} , enfin de p feuillets entre γ_1 et γ_0 .

La surface σ étant transformée biunivoque de d par $\zeta = F(z)$, aura le même ordre de connexion que d , c'est-à-dire l'ordre $p + 1$. En plus, elle est de *genre zéro* (schlichtartig) car il est impossible de tracer sur σ une rétrosection qui ne morcellerait pas cette surface.

On peut considérer σ comme une aire de Riemann canonique qui caractérise la classe des aires du plan z représentables conformément et biunivoquement sur une aire quelconque d donnée *a priori* et de genre p .

Il y a plus: la marche inverse est possible, car en vertu des théorèmes généraux sur la représentation conforme des surfaces de Riemann (voir KOEBE, Ueber die Uniformisierung..., *Gött. Nachr.*, 11 juillet 1908) on peut trouver une fonction $z(\zeta)$ (et même une infinité) holomorphe à l'intérieur de la surface de Riemann et univalente, de sorte que z décrive une aire simple d ne se recouvrant nulle part lorsque ζ décrit la surface de Riemann σ . (Dans le cas actuel, cette aire d de connexion $p + 1$ pourrait d'ailleurs être choisie dans un des types canoniques vus précédemment de Schottky, de Koebe, de Hilbert.)

La fonction $\zeta(z)$, inverse de la précédente, aura toutes les propriétés qui caractérisent la fonction $F(z)$ (à un facteur constant près). Donc les propriétés de σ auxquelles nous avons fait allusion, sont bien caractéristiques de la classe des aires planes de connexion $p + 1$.

Constatons ici que σ dépend dans le cas le plus général de $3p - 3$ paramètres réels; il y a les p rayons des cercles $\gamma_1 \dots \gamma_p$, puis a points de ramification intérieurs correspondant chacun à deux paramètres réels et b points de ramification sur les frontières, ce qui fait b paramètres réels, enfin, il faut soustraire un paramètre, puisque σ n'était déterminée qu'à une rotation près, ce qui fait, en vertu de l'équation fondamentale,

$$p + 2a + b - 1 = 3p - 3.$$

Prolongement de σ ; la surface σ_1 . — Revenons, pour simplifier, au cas où la surface σ n'a que des points de ramification intérieurs: $b = 0$, $a = p - 1$. On a vu que σ était limitée dans ce cas par les circonférences intérieures $\gamma_1 \dots \gamma_p$ et la circonférence extérieure γ_0 parcourue p fois. Adoptons pour un instant le point de vue de la topologie. Les aires d et σ sont homéomorphes, c'est-à-dire qu'elles se correspondent biunivoquement et bicontinument [par $\zeta = \zeta(z)$].

D'autre part, il est possible d'établir une correspondance analogue entre le cercle limité par $\gamma_i (i > 0)$ et l'intérieur de c_i , qui coïncide sur les frontières avec celle définie par $\zeta = \zeta(z)$. En adjoignant à σ les cercles intérieurs limités aux γ_i , nous obtenons donc une surface de Riemann σ_1 , homéomorphe à l'intérieur de c_0 . Elle possède p feuillets au-dessus de tout point intérieur à c_0 .

La surface Σ_1 et la représentation de M . de la Vallée Poussin. — Adjoignons à la surface σ_1 l'élément σ_2 de surface de Riemann décrit par le point $\zeta = \omega^p$ lorsque ω décrit le domaine $|\omega| \geq 1$. Quand ω décrit la circonférence unité, le point ζ décrit p fois le cercle trigonométrique. On pourra raccorder les p feuillets de σ_2 aux p feuillets de σ_1 dont les frontières extérieures se projetaient sur γ_0 . En soudant ainsi σ_1 et σ_2 , on obtient une surface de Riemann Σ_1 fermée et de « genre zéro », ce qui veut dire que toute courbe fermée tracée dans Σ_1 morcelle Σ_1 : au point de vue topologique, Σ_1 est homéomorphe au plan complet (y compris le point à l'infini). On peut en effet établir entre σ_2 et l'extérieur de c_0 une correspondance biunivoque et continue qui coïncide sur les frontières avec celle définie par $\zeta = \zeta(z)$, ce qui montre que

Σ_1 est homéomorphe au plan complet des z , σ_1 correspondant à l'intérieur de c_0 et σ_2 à l'extérieur.

D'après un théorème de SCHWARZ, toute surface de cette sorte peut être mise en correspondance conforme avec un plan u complet, par une fonction analytique

$$u = u(\zeta) .$$

Cette correspondance peut être établie d'une infinité de façons et devient unique si l'on se donne trois couples de points homologues. Ici nous supposons que le point $\zeta = \infty$ correspond au point $u = \infty$.

La fonction $u(\zeta)$ a p déterminations finies en chaque point, elle a un point critique d'ordre $p - 1$ à l'infini et des points critiques simples aux $p - 1$ points de ramification de σ . C'est donc une fonction algébrique de degré p en ζ . Son inverse

$$\zeta = \zeta(u)$$

est holomorphe en tout u à distance finie et admet $u = \infty$ comme pôle d'ordre p . C'est un polynôme de degré p

$$\zeta = P(u) .$$

Σ_1 est donc la surface de Riemann d'un polynôme et à σ correspond une aire D conformément et biunivoquement. D est connexe et de genre p . Aux contours c_i correspondent les cassiniennes du plan u

$$|P(u)| = e^{\lambda_i} \quad i = 0, 1, \dots, p .$$

Les polynômes P de M. de la Vallée Poussin et les représentations conformes correspondantes ($z \rightarrow u$), par $F(z) = P(u)$, se trouvent ainsi rattachés à la surface de Riemann σ , qui va encore nous donner d'autres représentations au paragraphe suivant.

La surface Σ_2 et la représentation de M. Julia sur des cassiniennes généralisées. — Le prolongement précédent de σ_1 par σ_2 ne dépend en rien de la configuration intérieure de σ et il peut se

faire d'une manière plus naturelle, comme suit. On prendra la symétrique σ'_1 de σ_1 par rapport à la frontière γ_0

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta},$$

les points homologues étant toujours pris sur le même feuillet. La réunion Σ_2 de σ_1 et de σ'_1 est une surface à p feuillets dont chacun recouvre tout le plan. Elle a $p - 1$ points de ramification de σ_1 et $p - 1$ points de ramification symétriques de σ'_1 qui établissent la connexion entre les mêmes feuillets. Σ_2 est de « genre zéro » et elle est encore homéomorphe au plan complet. En vertu du théorème déjà utilisé de SCHWARZ, Σ_2 se laisse représenter conformément et biunivoquement sur un plan complet.

Soient $u = u(\zeta)$ cette correspondance et $\zeta = R(u)$ la correspondance inverse. Un raisonnement semblable à celui déjà fait au paragraphe précédent, permet d'affirmer que $R(u)$ est une fonction rationnelle de degré p à cercle fondamental. Donc σ se transforme en une aire D du plan u biunivoquement et conformément. Comme la correspondance entre d et σ jouissait de la même propriété, la transformation $(z \rightarrow u)$ donnée par

$$F(z) = R(u)$$

est une représentation conforme, biunivoque du domaine d sur un domaine D du plan u . Au contour c_0 correspond ainsi le cercle fondamental de rayon unité et aux contours c_i correspondent p cassiniennes généralisées sans point commun, chacune entourant un des zéros de $R(u)$. Ce sont les représentations que M. Julia a fait connaître récemment.

7. — SUR LES CORRESPONDANCES TRANSFORMÉES.

Les polynômes $P(u)$ de M. de la Vallée Poussin ne sont pas entièrement déterminés, mais il est facile de voir que tous ceux qui dérivent d'une même surface Σ_1 se déduisent de l'un d'entre eux par la relation

$$P(u) = P_0(au + b).$$