Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT CONNEXES

Autor: Julia, G.

Kapitel: 3. — Description des domaines canoniques.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25992

table sur un anneau circulaire déterminé; il faut pour cela que le rapport des rayons des circonférences soit convenable.

C'est là une différence essentielle, dans la théorie de la représentation conforme, entre les domaines d'ordre 1 et ceux d'ordre supérieur.

3. — Description des domaines canoniques.

Schottky [1], inspiré par l'idée des domaines canoniques, introduit des aires d'un type simple et de connexion n. Ainsi on pourra classer les domaines d'ordre p suivant les propriétés des aires canoniques qui leur servent d'images. Deux domaines seront de la même classe s'ils peuvent être représentés sur le même domaine canonique et dans ce cas, comme on l'a vu, ils peuvent être représentés conformément l'un sur l'autre. Les aires canoniques multiplement connexes jouent ici un rôle encore plus fondamental que le cercle pour le problème de *Riemann*, puisque leur détermination complète permet de répartir en classes distinctes les domaines qui peuvent être mis en correspondance conforme.

Pour simplifier, nous supposerons les frontières non dégénérées et le domaine donné tout entier à distance finie.

Dans ces conditions, M. Koebe, poursuivant une idée de Schottky, a montré qu'un domaine limité par $p+1$ contours fermés $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p$ se laisse représenter sur une aire limitée par deux circonférences concentriques et $p-1$ arcs de circonférence situés dans la couronne limitée par les deux courbes précédentes et de même centre; ces arcs seront parcourus une fois dans chaque sens lorsque l'on décrit les courbes c_i qui leur correspondent. La circonférence extérieure correspond à la courbe qui contient toutes les autres et la circonférence intérieure à l'une quelconque des autres courbes. Cette dernière condition, comme celle d'être à distance finie, n'a rien d'essentiel car on sait qu'une substitution

$$z' = \frac{1}{z - z_0}$$

[1] Pour la bibliographie, voir G. Julia, *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*, Gauthier-Villars, 1934.

permet de ramener le domaine à distance finie ou d'intervertir le contour extérieur avec n'importe lequel des autres. Les propriétés essentielles du problème de la représentation ne sont

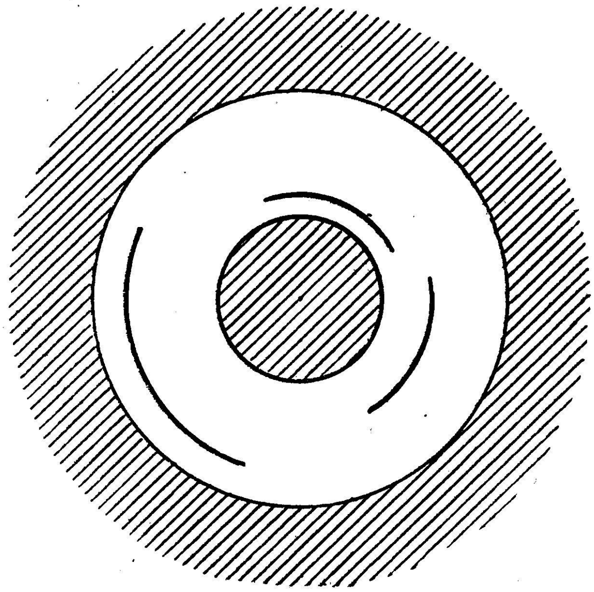

Fig. 3.

pas altérées par cette substitution. Par conséquent un point Z_0 du domaine D peut correspondre au point à l'infini du domaine d, la fonction $z = \varphi(Z)$ admettant un pôle en Z_0.

De combien de paramètres dépend le domaine canonique de M. KOEBE ? Il y a les rayons des deux circonférences, les rayons des $p - 1$ arcs de circonférence, puis les angles des extrémités de ces arcs au nombre de $2(p - 1)$, donc au total $2 + 3(p - 1) = 3p - 1$. Mais un domaine canonique correspond évidemment à une infinité d'autres de même classe obtenus par la similitude

$$Z = aZ^* ,$$

a étant un nombre complexe arbitraire. Il faut donc retrancher deux paramètres réels. Les domaines canoniques de M. Koebe forment une famille à $3p - 3$ paramètres réels. Nous verrons que c'est là une propriété générale.

Donc pour écrire que deux domaines d et d' sont représentables conformément l'un sur l'autre, il faut écrire $3p - 3$ relations qui reviennent à identifier leurs domaines canoniques. Ceci est valable pour $p > 1$. Si $p = 1$, il y a, comme nous l'avons vu, une condition à satisfaire, le rapport des rayons des deux circonférences du domaine canonique devant être convenable.

Schottky avait pris comme aire canonique de représentation d'un domaine de genre p, l'aire limitée par $p + 1$ arcs de circonférences concentriques, le centre et le point à l'infini correspondant respectivement à deux points arbitraires z_0 et z_1 du domaine donné.

En tenant compte de la similitude toujours possible et de la correspondance des deux points arbitraires z_0 et z_1 avec $Z = 0$ et $Z = + \infty$ qui permet de retrancher quatre paramètres réels, on trouvera encore $3p - 3$ paramètres.

Je me dispense de vous donner la démonstration de la possibilité de la correspondance conforme avec les domainesc anoniques envisagés. Vous la trouverez dans mon livre: *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*, je ne veux pas entrer dans des détails que vous pourrez facilement trouver dans cet ouvrage et d'une manière générale, je devrai, étant donné le temps dont je dispose, supposer acquises certaines démonstrations d'existence des solutions des problèmes envisagés et je m'en tiendrai davantage à l'étude des propriétés caractéristiques de ces solutions.

M. Hilbert montre qu'un domaine d'ordre supérieur à 2 est représentable sur le plan complexe muni de coupures rectilignes parallèles à l'axe réel et en nombre égal à l'ordre $p + 1$, naturellement. A un point z_0 il fait correspondre le point à l'infini du plan Z et à une direction issue de z_0 une direction asymptotique du plan Z. La représentation est unique dans ces conditions. Si l'on fait le compte des paramètres, on retrouve $3p - 3$. La méthode de Hilbert, toute inspirée de calcul des variations, sera caractérisée au sujet des aires de connexion infinie car elle s'applique encore à ce cas.

Enfin, M. Koebe montre que l'on peut choisir pour domaine canonique le domaine limité par $p + 1$ cercles non sécants. Ils sont caractérisés par $3p + 3$ paramètres réels, mais une transformation homographique

$$Z^* = \frac{aZ + b}{cZ + d}$$

conserve le caractère des domaines canoniques. C'est la seule, d'ailleurs, qui jouisse de cette propriété; elle dépend de trois paramètres complexes, donc six réels, ce qui donne de nouveau $3p - 3$ paramètres réels et le même nombre de conditions pour que deux domaines soient représentables l'un sur l'autre.

Ce nombre évoque à lui seul la théorie des courbes algébriques.

4. — L'analogie avec les courbes algébriques.

L'analogie entre les domaines de genre p et les courbes algébriques de genre p fut aperçue par Schottky dans son mémoire fondamental paru au tome 83 du *Journal de Crelle*. Cette analogie est très profonde. A cette époque, on savait seulement, par des exemples relatifs aux domaines de genre 1, qu'il n'était pas toujours possible, comme nous l'avons dit, d'effectuer la représentation sur un anneau circulaire donné. Il fallait que le rapport des rayons fût convenable et dans la discussion intervenait le module K^2 des fonctions elliptiques. (On sait, d'autre part, que les fonctions elliptiques permettent d'exprimer les coordonnées des courbes de genre 1 en fonctions uniformes d'un paramètre.)

Appelons alors classe de courbes algébriques l'ensemble des courbes algébriques dont les points peuvent être mis en correspondance rationnelle bi-univoque. Les courbes et les transformations envisagées ici sont celles définies seulement par des équations à coefficients réels. Si les courbes sont de *genre p*, une telle classe, dite de genre p, dépend de $3p - 3$ paramètres, dès que $p > 1$. Schottky montre alors qu'à toute aire de genre p, donc limitée par $p + 1$ contours, est associée une classe de genre p. Réciproquement, à toute classe réelle de genre p correspondent des domaines d de genre p. Et pour que deux domaines soient représentables l'un sur l'autre, il *faut* et il *suffit* que les classes de courbes algébriques qui leur correspondent soient identiques.

Schottky procède par un moyen qui paraît tout d'abord détourné. Il envisage la classe des fonctions $K(z)$ méromorphes dans le domaine donné d et sur sa frontière, réelles sur cette