

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1934)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT  
CONNEXES  
**Autor:** Julia, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25992>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLÉMENT CONNEXES <sup>1</sup>

PAR

G. JULIA, Membre de l'Institut (Paris).

---

En réponse aux paroles qui viennent d'être prononcées, je dirai que nous avons peut-être trop tendance en mathématiques à nous isoler dans une espèce de tour d'ivoire et à fermer les yeux sur les travaux des autres. Il faut, au contraire, être averti de ce que fait le voisin, de manière que les recherches faites dans un domaine puissent être utilisées par ceux qui poursuivent leurs investigations dans d'autres branches de la science. Les mathématiques ne peuvent pas se diviser en compartiments étanches. Les idées directrices sont les mêmes partout, lorsqu'on les dégage du vêtement particulier qui les revêt, et la culture mathématique générale est absolument nécessaire; c'est un point sur lequel j'ai insisté dans ma conférence de Zurich (1932). Nous devons être des hommes de métier, mais des hommes avertis de ce qui se passe autour de nous et bien souvent les sujets de nos études sont empruntés aux autres sciences. Il ne faut donc pas non plus de cloisons qui séparent les mathématiques d'aucune autre branche de la science et la culture générale est nécessaire à ceux qui ne veulent pas se borner à être une moitié d'homme.

Un second point sur lequel je voudrais insister est le suivant: si utiles que soient les constructions didactiques précises, il y a

---

<sup>1</sup> Leçon faite, le 3 mai 1934, dans la série des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève et rédigée par MM. R. WAVRE et G. DE RHAM.



une chose qu'il ne faut pas négliger non plus, c'est la culture de l'intuition. C'est cette dernière qui nous fait saisir les rapports profonds des différentes branches des mathématiques et qui permet de les faire progresser parallèlement.

Ceci dit, j'aborde le sujet de ma conférence.

### 1. — LE PROBLÈME DE RIEMANN.

Le problème que je veux traiter est déjà ancien. Rappelons brièvement en quoi consiste une représentation conforme.

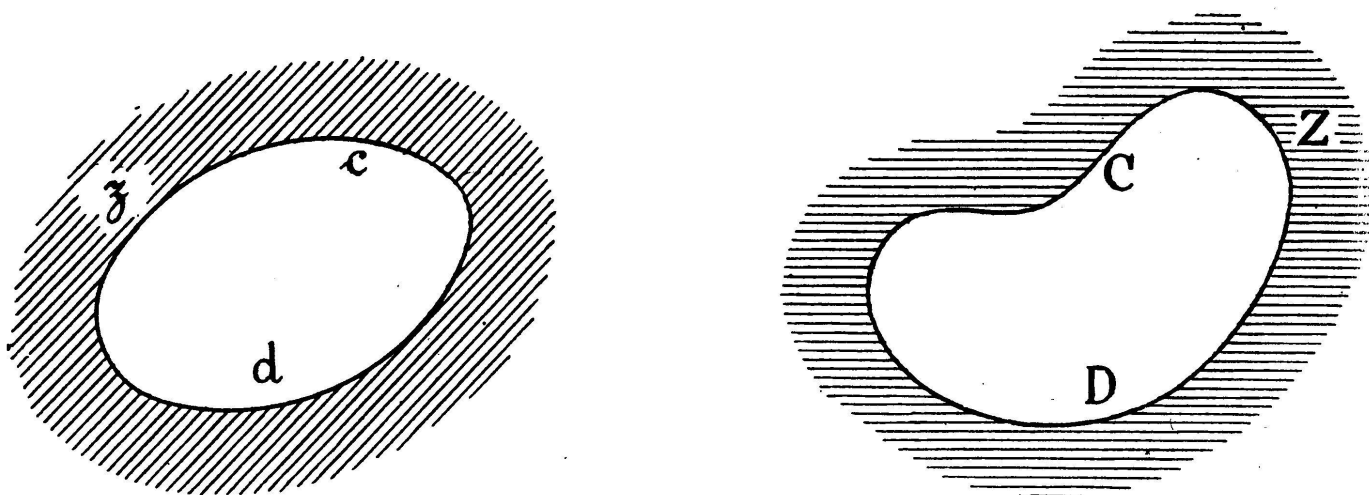


Fig. 1.

Envisageons deux aires, l'une  $d$  dans le plan de la variable complexe  $z$ , l'autre  $D$  dans le plan  $Z$ , limitées par deux courbes  $c$  et  $C$  régulières, simples et fermées. Représenter conformément les domaines  $d$  et  $D$  l'un sur l'autre, c'est établir entre leurs points une correspondance bi-univoque, conservant les angles et respectant leur sens. Cette correspondance ne peut être réalisée, comme on le sait, que par des fonctions holomorphes inverses l'une de l'autre

$$Z = f(z) , \quad z = \varphi(Z)$$

telles que  $z$  parcourant  $d$ ,  $Z$  passe par tous les points de  $D$  et une seule fois par chacun et réciproquement. RIEMANN fut le premier à se poser ce problème. Il a montré que la fonction  $f$

dépendait de trois paramètres réels arbitraires dont on peut disposer pour que deux points donnés et deux directions données issues de ces points se correspondent.

Il est évident que la correspondance entre  $d$  et  $D$  sera établie si l'on peut représenter conformément chacun des deux domaines sur une aire canonique particulière, un cercle par exemple, et c'est ce que fait Riemann. Cette méthode de réduction du problème est générale en mathématique, elle intervient dans l'étude des transformations les plus générales, en géométrie, en algèbre et en arithmétique.

Postérieurement à Riemann, on s'est aperçu qu'il y avait lieu d'étudier des domaines pour lesquels la frontière n'était pas une courbe régulière. Le dernier en date des résultats importants obtenus dans cette direction est le suivant :

Toute aire simplement connexe dont la frontière contient plus d'un point peut être représentée conformément sur le cercle unité et l'on dispose encore, comme dans le cas précédent, de trois paramètres arbitraires.

## 2. — LA CONNEXION D'ORDRE $n$ .

Mais pour aller plus loin, il importe de définir l'*ordre de connexion* d'un domaine. Je supposerai connu le langage de la théorie des ensembles.

Un domaine est un ensemble de points, tous intérieurs tels que deux quelconques d'entre eux puissent être reliés par une courbe de Jordan contenue elle-même dans le domaine.

La frontière peut se composer de  $n$  continus séparés. Dans ce cas, l'*ordre de connexion* est  $n$ . Un continu frontière peut, dans certains cas, se réduire à un seul point. On dira alors qu'il est dégénéré. Si un domaine n'a pas de point frontière, son ordre de connexion est nul. S'il est limité par une seule courbe fermée, il est dit simplement connexe. C'est le cas envisagé par Riemann. Un cercle dont on retranche le centre forme un domaine d'ordre 2, dont une frontière, à savoir le centre, est dégénérée; un cercle dont on retranche  $p$  cercles intérieurs sans point commun, est un domaine d'ordre  $p + 1$ . L'ordre peut être infini. A côté de

cette notion d'ordre  $n$ , nous avons le *genre*, c'est le *nombre*  $n - 1$ . Au point de vue topologique, le genre s'interprète directement comme suit: c'est le nombre maximum de coupures que l'on peut pratiquer dans le domaine sans le morceler. Ces coupures sont des courbes joignant un point frontière à un autre et dont tous les points sont intérieurs au domaine. Un cercle est de

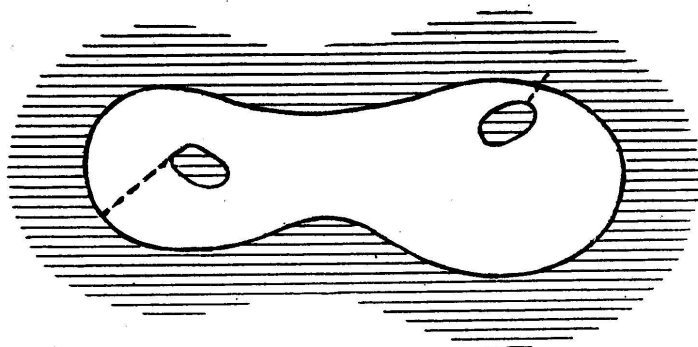


Fig. 2.

Domaine de genre 2, d'ordre de connexion 3.

genre 0, car toute coupure le morcellerait. Un cercle moins le centre est de genre 1, car un rayon ne le morcelle pas. Donc, si je puis faire  $n$  coupures qui ne morcellent pas un domaine, tandis que  $n + 1$  coupures le morcelleraient quelles qu'elles soient, son genre est  $n$ . Le genre ainsi défini est en rapport, comme nous le verrons, avec le genre d'une courbe algébrique.

Dans un domaine d'ordre 1, toute courbe fermée peut être réduite à un point par déformation continue et sans sortir du domaine. C'est impossible si la connexion est d'ordre supérieur. Si l'on effectue  $n$  coupures convenables dans un domaine d'ordre  $n + 1$ , ce domaine devient simplement connexe.

Deux aires ne pourront être mises en correspondance conforme que si leur ordre de connexion est le même. En effet, les fonctions  $f$  et  $\varphi$  qui effectuent la correspondance étant holomorphes et jouissant de la propriété de continuité jusque sur les frontières, à un point frontière de l'un des domaines correspond un point frontière de l'autre et le nombre des continus séparés dont elles se composent est forcément le même. Mais cette condition n'est pas suffisante et un domaine limité par deux courbes fermées, dont l'une est intérieure à l'autre, n'est pas toujours représen-

table sur un anneau circulaire déterminé; il faut pour cela que le rapport des rayons des circonférences soit convenable.

C'est là une différence essentielle, dans la théorie de la représentation conforme, entre les domaines d'ordre 1 et ceux d'ordre supérieur.

### 3. — DESCRIPTION DES DOMAINES CANONIQUES.

SCHOTTKY<sup>1</sup>, inspiré par l'idée des domaines canoniques, introduit des aires d'un type simple et de connexion  $n$ . Ainsi on pourra classer les domaines d'ordre  $p$  suivant les propriétés des aires canoniques qui leur servent d'images. Deux domaines seront de la même classe s'ils peuvent être représentés sur le même domaine canonique et dans ce cas, comme on l'a vu, ils peuvent être représentés conformément l'un sur l'autre. Les aires canoniques multiplement connexes jouent ici un rôle encore plus fondamental que le cercle pour le problème de *Riemann*, puisque leur détermination complète permet de répartir en classes distinctes les domaines qui peuvent être mis en correspondance conforme.

Pour simplifier, nous supposerons les frontières non dégénérées et le domaine donné tout entier à distance finie.

Dans ces conditions, M. KOEBE, poursuivant une idée de Schottky, a montré qu'un domaine limité par  $p + 1$  contours fermés  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_p$  se laisse représenter sur une aire limitée par deux circonférences concentriques et  $p - 1$  arcs de circonférence situés dans la couronne limitée par les deux courbes précédentes et de même centre; ces arcs seront parcourus une fois dans chaque sens lorsque l'on décrit les courbes  $c_i$  qui leur correspondent. La circonférence extérieure correspond à la courbe qui contient toutes les autres et la circonférence intérieure à l'une quelconque des autres courbes. Cette dernière condition, comme celle d'être à distance finie, n'a rien d'essentiel car on sait qu'une substitution

$$z' = \frac{1}{z - z_0}$$

<sup>1</sup> Pour la bibliographie, voir G. JULIA, *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*, Gauthier-Villars, 1934.

permet de ramener le domaine à distance finie ou d'intervertir le contour extérieur avec n'importe lequel des autres. Les propriétés essentielles du problème de la représentation ne sont

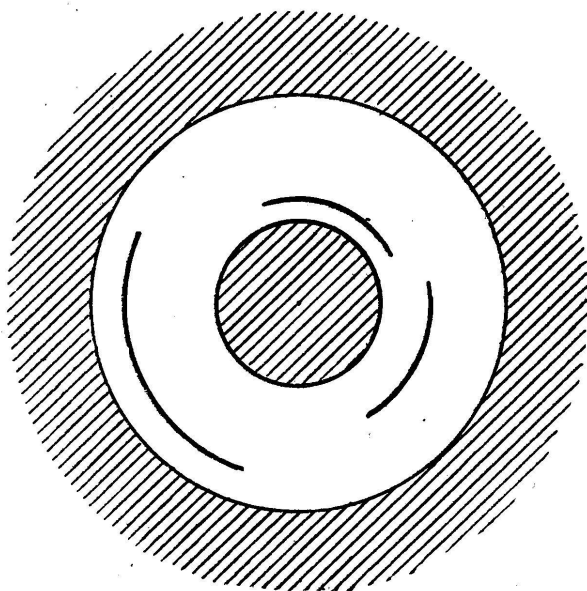


Fig. 3.

pas altérées par cette substitution. Par conséquent un point  $Z_0$  du domaine  $D$  peut correspondre au point à l'infini du domaine  $d$ , la fonction  $z = \varphi(Z)$  admettant un pôle en  $Z_0$ .

De combien de paramètres dépend le domaine canonique de M. KOEBE ? Il y a les rayons des deux circonférences, les rayons des  $p - 1$  arcs de circonférence, puis les angles des extrémités de ces arcs au nombre de  $2(p - 1)$ , donc au total  $2 + 3(p - 1) = 3p - 1$ . Mais un domaine canonique correspond évidemment à une infinité d'autres de même classe obtenus par la similitude

$$Z = aZ^*,$$

$a$  étant un nombre complexe arbitraire. Il faut donc retrancher deux paramètres réels. Les domaines canoniques de M. Koebe forment une famille à  $3p - 3$  paramètres réels. Nous verrons que c'est là une propriété générale.

Donc pour écrire que deux domaines  $d$  et  $d'$  sont représentables conformément l'un sur l'autre, il faut écrire  $3p - 3$  relations qui reviennent à identifier leurs domaines canoniques. Ceci est

valable pour  $p > 1$ . Si  $p = 1$ , il y a, comme nous l'avons vu, une condition à satisfaire, le rapport des rayons des deux circonférences du domaine canonique devant être convenable.

Schottky avait pris comme aire canonique de représentation d'un domaine de genre  $p$ , l'aire limitée par  $p + 1$  arcs de circonférences concentriques, le centre et le point à l'infini correspondant respectivement à deux points arbitraires  $z_0$  et  $z_1$  du domaine donné.

En tenant compte de la similitude toujours possible et de la correspondance des deux points arbitraires  $z_0$  et  $z_1$  avec  $Z = 0$  et  $Z = +\infty$  qui permet de retrancher quatre paramètres réels, on trouvera encore  $3p - 3$  paramètres.

Je me dispense de vous donner la démonstration de la possibilité de la correspondance conforme avec les domaines canoniques envisagés. Vous la trouverez dans mon livre: *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*, je ne veux pas entrer dans des détails que vous pourrez facilement trouver dans cet ouvrage et d'une manière générale, je devrai, étant donné le temps dont je dispose, supposer acquises certaines démonstrations d'existence des solutions des problèmes envisagés et je m'en tiendrai davantage à l'étude des propriétés caractéristiques de ces solutions.

M. HILBERT montre qu'un domaine d'ordre supérieur à 2 est représentable sur le plan complexe muni de coupures rectilignes parallèles à l'axe réel et en nombre égal à l'ordre  $p + 1$ , naturellement. A un point  $z_0$  il fait correspondre le point à l'infini du plan  $Z$  et à une direction issue de  $z_0$  une direction asymptotique du plan  $Z$ . La représentation est unique dans ces conditions. Si l'on fait le compte des paramètres, on retrouve  $3p - 3$ . La méthode de Hilbert, toute inspirée de calcul des variations, sera caractérisée au sujet des aires de connexion infinie car elle s'applique encore à ce cas.

Enfin, M. KOEBE montre que l'on peut choisir pour domaine canonique le domaine limité par  $p + 1$  cercles non sécants. Ils sont caractérisés par  $3p + 3$  paramètres réels, mais une transformation homographique

$$Z^* = \frac{aZ + b}{cZ + d}$$



conserve le caractère des domaines canoniques. C'est la seule, d'ailleurs, qui jouisse de cette propriété; elle dépend de trois paramètres complexes, donc six réels, ce qui donne de nouveau  $3p - 3$  paramètres réels et le même nombre de conditions pour que deux domaines soient représentables l'un sur l'autre.

Ce nombre évoque à lui seul la théorie des courbes algébriques.

#### 4. — L'ANALOGIE AVEC LES COURBES ALGÈBRIQUES.

L'analogie entre les domaines de genre  $p$  et les courbes algébriques de genre  $p$  fut aperçue par SCHOTTKY dans son mémoire fondamental paru au tome 83 du *Journal de Crelle*. Cette analogie est très profonde. A cette époque, on savait seulement, par des exemples relatifs aux domaines de genre 1, qu'il n'était pas toujours possible, comme nous l'avons dit, d'effectuer la représentation sur un anneau circulaire donné. Il fallait que le rapport des rayons fût convenable et dans la discussion intervenait le module  $K^2$  des fonctions elliptiques. (On sait, d'autre part, que les fonctions elliptiques permettent d'exprimer les coordonnées des courbes de genre 1 en fonctions uniformes d'un paramètre.)

Appelons alors classe de courbes algébriques l'ensemble des courbes algébriques dont les points peuvent être mis en correspondance rationnelle bi-univoque. Les courbes et les transformations envisagées ici sont celles définies seulement par des équations à coefficients réels. Si les courbes sont de genre  $p$ , une telle classe, dite de genre  $p$ , dépend de  $3p - 3$  paramètres, dès que  $p > 1$ . Schottky montre alors qu'à toute aire de genre  $p$ , donc limitée par  $p + 1$  contours, est associée une classe de genre  $p$ . Réciproquement, à toute classe réelle de genre  $p$  correspondent des domaines  $d$  de genre  $p$ . Et pour que deux domaines soient représentables l'un sur l'autre, il faut et il suffit que les classes de courbes algébriques qui leur correspondent soient identiques.

Schottky procède par un moyen qui paraît tout d'abord détourné. Il envisage la classe des fonctions  $K(z)$  méromorphes dans le domaine donné  $d$  et sur sa frontière, réelles sur cette

frontière. Toutes ces  $K(z)$  sont alors des fonctions rationnelles à coefficients réels de deux d'entre elles  $r(z)$  et  $s(z)$

$$K = \varphi(r, s).$$

Les deux fonctions  $r$  et  $s$  sont alors liées par une équation algébrique à coefficients réels de genre  $p$ :  $A(r, s) = 0$ . (On sait que  $p$  est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce associées à la courbe algébrique envisagée.) Ce résultat est-il surprenant ? Non !

Soit en effet  $r(z)$  l'une des fonctions  $K(z)$ . Lorsque  $z$  décrit  $d$ ,  $r(z)$  décrit une surface de Riemann  $R_0$  limitée par  $p + 1$  contours situés sur l'axe réel (puisque ces contours correspondent aux contours limitant  $d$ , sur lesquels  $r$  est réel). La surface  $R'_0$  symétrique de  $R_0$  par rapport à l'axe réel (surface décrite par  $\overline{r(z)}$  — imaginaire conjuguée de  $r(z)$  — lorsque  $r$  décrit  $d$ ) peut être soudée à  $R_0$  le long de ces  $p + 1$  courbes et l'on obtient ainsi une surface de Riemann fermée de genre  $p$ . Cette surface  $R$  est l'image du domaine  $d$  pris avec ses deux faces:  $R_0$  correspondant à l'une des faces,  $R'_0$  à l'autre; le domaine  $d$  ainsi considéré est bien une surface fermée de genre  $p$ : on peut en effet l'obtenir en aplatissant une surface fermée à  $p$  trous. A la classe des fonctions  $K(z)$  correspond alors la classe des fonctions de  $r$  uniformes et méromorphes sur  $R$  et réelles sur les lignes de soudure de  $R_0$  avec  $R'_0$  et grâce à cette correspondance, les résultats de Schottky se rattachent directement aux théorèmes de Riemann sur les fonctions algébriques.

##### 5. — LA REPRÉSENTATION CONFORME NON BIUNIVOQUE ET L'UNIFORMISATION SUIVANT POINCARÉ.

Soit  $F(z)$  une fonction définie dans un domaine  $d$  de genre  $p$  fini ou non. Elle sera supposée holomorphe ou au plus méromorphe dans  $d$ , mais elle sera, en général, multiforme, ce qui est fort possible puisque ce domaine est à connexions multiples. Considérons alors un point  $z$  de  $d$  et joignons-le à un point  $O$  quelconque par un chemin tout entier dans  $d$ . Deux chemins



réductibles l'un à l'autre sans sortir de  $d$  seront considérés comme identiques. Un point auquel est ainsi associé un chemin sera dit un point analytique  $z$ . Un point géométrique  $z$  est donc la projection d'une infinité de points analytiques  $z_1, z_2, \dots$ . Les différents points  $z_1, z_2, \dots$  peuvent être conçus comme appartenant à une infinité de feuillets distincts formant une surface de Riemann  $\Sigma$  recouvrant le domaine donné. C'est la *surface de recouvrement* de l'aire multiplement connexe. On passe d'un feuillet à l'autre par soudure le long des coupures pratiquées dans l'aire donnée pour la rendre simplement connexe. C'est un procédé bien connu. Par exemple, si  $d$  est l'anneau  $1 < |z| < 2$ , la surface  $\Sigma$  serait la portion d'un hélicoïde qui se projette sur l'anneau précédent, et un chemin qui fait  $m$  fois le tour de l'anneau parcourt  $m$  feuillets de l'hélicoïde. La fonction  $F(z)$  considérée comme dépendant des points analytiques ne peut être qu'uniforme sur la surface simplement connexe  $\Sigma$ .

Le problème que résout Poincaré consiste alors en ceci: effectuer la représentation conforme biunivoque de la surface de Riemann  $\Sigma$  sur le cercle  $C$  de rayon unité. C'était là une idée extrêmement féconde en même temps que hardie. Cette correspondance

$$z = \varphi(\zeta), \quad (1) \qquad \zeta = f(z), \quad (2)$$

fera donc correspondre à tout point géométrique  $\zeta$  de  $C$  un point analytique  $z$  de  $\Sigma$  et un seul et réciproquement. Mais à un point géométrique  $z$  de  $d$  correspondra en général une infinité de points analytiques de  $\Sigma$ :  $z_1, z_2, \dots$ , donc une infinité de points géométriques  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  de  $C$ . Ceci étant, la fonction  $F(z)$  uniforme de point analytique  $z$  devient une fonction uniforme du point géométrique  $\zeta$

$$\mathcal{G}(\zeta) = F[\varphi(\zeta)], \quad (3)$$

et si l'on associe à (3) la relation (1), on a une représentation de  $z$  et de  $F$  au moyen de deux fonctions uniformes dans le cercle unité  $|\zeta| < 1$ .

C'est par la résolution du problème de Dirichlet, méthode du balayage, que POINCARÉ établit l'existence de la fonction uniformisante  $\varphi(\zeta)$ ; aujourd'hui le procédé d'osculation de Koebe

(Schmiegunungsverfahren) conduit au même but par une voie plus directe et plus élémentaire exposée dans mes Leçons sur la représentation conforme (*Cahiers scientifiques*, fascicules VIII et XIV) et je n'y insiste pas.

Soient

$$\zeta_1 = f_1(z) \quad \text{et} \quad \zeta_2 = f_2(z)$$

deux fonctions établissant la correspondance demandée entre  $\Sigma$  et  $C$ . On en déduit une relation, holomorphe elle aussi,

$$\zeta_2 = (\zeta_1),$$

qui transforme le cercle en lui-même. Mais une telle transformation est forcément homographique. Elle se réduit à l'identité  $\zeta_2 \equiv \zeta_1$  si l'on s'impose que le centre du cercle corresponde à un point donné de la surface  $\Sigma$  et que deux directions données issues de ces points se correspondent également. La transformation est donc unique dans ces conditions-là.

Demandons-nous maintenant quelles sont les conditions pour que deux domaines  $d$  et  $d'$  puissent être mis en correspondance conforme.

Pour cela, une analyse plus approfondie de la relation entre  $\Sigma$  et  $C$  est nécessaire.

Le domaine  $d$  peut être rendu simplement connexe par  $p$  coupures joignant  $C_0$  à  $C_1 \dots C_p$ . (Il s'agit ici de domaines de genre  $p$  fini.) Soit  $d_0$  le domaine dont les coupures et les courbes  $C_i$  forment la frontière.

Chaque branche de la fonction  $f(z)$  est uniforme dans  $d_0$ . Soit  $f_i(z)$  l'une de ces branches. Il lui correspond un domaine  $D_i$  du cercle  $C$ .  $D_i$  est en correspondance conforme et biunivoque avec  $d_0$ . Ces domaines  $D_i$ , dits domaines de discontinuité, sont en nombre infini. Ils n'empiètent pas les uns sur les autres et remplissent le cercle  $C$ . L'on aboutit ainsi à un pavage de  $C$  au moyen des domaines  $D_i$ , pavage bien connu dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Les  $D_i$  correspondent aux différents feuillets de la surface de recouvrement  $\Sigma$  de  $d$ . Envisageons deux branches

$$\zeta_i = f_i(z) \quad \text{et} \quad \zeta_j = f_j(z)$$

de la fonction multiforme  $f(z)$ . L'on aura encore

$$\zeta_i = \psi(\zeta_j)$$

$\psi$  étant holomorphe dans  $C$ . Cette transformation du cercle en lui-même est de nouveau homographique. Nous la représenterons par  $\zeta_i = S\zeta_j$ . Ainsi deux branches quelconques de  $f$  sont liées par une substitution rationnelle et linéaire  $\zeta_i = S\zeta_j$ . Ces substitutions laissent invariante la fonction  $z = \varphi(\zeta)$  qui reprend la même valeur aux deux points  $\zeta_i$  et  $\zeta_j$ .

Ces substitutions  $S$  forment un groupe, c'est-à-dire un ensemble tel que tout produit de substitutions de l'ensemble et les substitutions inverses appartiennent à l'ensemble.

Si l'on étudie la structure de ce groupe  $G$ , on s'aperçoit que le pavage précédent peut être obtenu, ainsi que toutes les substitutions du groupe, au moyen de  $p$  substitutions fondamentales, dépendant chacune de trois paramètres réels.  $3p$  constantes réelles suffisent donc pour définir le groupe  $G$  en question.

Maintenant, supposons que deux domaines  $d$  et  $d'$  puissent être mis en correspondance conforme biunivoque l'un avec l'autre

$$z = z(z') \quad \text{et} \quad z' = z'(z) \quad (4)$$

et soient

$$\zeta = f(z) \quad \text{et} \quad \zeta' = f'(z') \quad (5)$$

les représentations sur le cercle unité des surfaces de recouvrement  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , attachées à  $d$  et  $d'$ , puis  $G$  et  $G'$  les groupes qui leur sont attachés. On déduit de (4) et (5) l'existence d'une substitution

$$\zeta = \zeta(\zeta')$$

homographique qui dépend de trois paramètres.

Nous aurions donc deux transformations de  $\Sigma$  sur  $C$ :

$$\zeta = f(z) \quad \text{et} \quad \zeta' = f'[z'(z)]$$

admettant respectivement pour groupes  $G$  et  $G'$ . Or on sait qu'elles sont identiques, à une substitution homographique près. Donc  $G$  et  $G'$  sont aussi identiques à une substitution homographique près.

Réciproquement, si ces groupes sont identiques, à un point  $z$  de  $d$  correspond une infinité de points  $\zeta_i$  de  $C$ , qui résultent de l'un d'eux par  $G$ . Cette suite  $\zeta_i$  est aussi une suite d'homologues d'un point  $z'$  de  $d'$ . Associons ce point  $z'$  au point  $z$  et nous aurons la correspondance biunivoque et conforme cherchée.

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux domaines  $d$  et  $d'$  puissent être mis en correspondance conforme est donc que les groupes  $G$  et  $G'$  soient identiques, à une substitution homographique près. Cela fait encore  $3p - 3$  relations comme on le vérifie facilement d'après ce qui précède ( $p > 1$ ).

En passant, signalons d'autres applications.

Dans une telle représentation de  $d$  sur  $C$ , les frontières se correspondent évidemment; à chaque  $c_n$  de  $d$  correspondent une infinité d'arcs sur la frontière  $\Gamma$  de  $C$ . La réunion de ces arcs relatifs à tous les  $c_n$  recouvre la circonférence entière à un ensemble de mesure nulle près.

La résolution du problème de Dirichlet pour le domaine  $d$  se ramène, par la fonction uniformisante de Poincaré  $z = \varphi(\zeta)$ , au même problème pour le cercle. La fonction cherchée devra prendre en les points de  $\Gamma$  les mêmes valeurs qu'aux points homologues des courbes  $c_n$ . L'intégrale de Poisson, dans laquelle un ensemble de mesure nulle situé sur  $\Gamma$  n'a aucune influence, d'après la théorie de M. LEBESGUE, résoudra le problème.

Les domaines de discontinuité  $D_i$  sont limités par  $2p$  arcs de la circonférence  $\Gamma$  (correspondant aux arcs délimités sur les contours  $c_n$  par les extrémités des  $p$  coupures pratiquées dans le domaine  $d$ ), et, en outre, par  $2p$  arcs de courbes intérieurs au cercle fondamental  $C$ , correspondant aux deux bords des coupures. Ceux qui correspondent aux deux bords d'une même coupure se correspondent par une substitution de  $G$ , et si les coupures sont pratiquées d'une manière convenable, ce sont des arcs de circonférences orthogonales à  $\Gamma$ .

Adjoignons à  $D_i$  son symétrique  $D'_i$  par rapport à  $\Gamma$ : on obtient un domaine  $\overline{D_i}$  limité par  $2p$  circonférences orthogonales à  $\Gamma$ , deux à deux homologues; en les raccordant convenablement,  $\overline{D_i}$  devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée de genre  $p$ , à laquelle est attachée une classe de courbes algébriques réelles: celle de Schottky que nous retrouvons ainsi.

Grâce à la fonction uniformisante  $z = \varphi(\zeta)$  de Poincaré, toutes les fonctions  $K(z)$  de Schottky envisagées précédemment, deviennent des fonctions uniformes de  $\zeta$  dans  $C$  et admettant le groupe  $G$ . Elles sont réelles sur  $\Gamma$  et peuvent par suite être prolongées analytiquement à l'extérieur de  $C$  par le principe de symétrie. Les coordonnées  $r$  et  $s$  de la courbe algébrique réelle  $A(r, s) = 0$  deviennent ainsi des fonctions uniformes de  $\zeta$ , définies dans tout le plan<sup>1</sup>, réelles sur  $\Gamma$ , invariantes par les substitutions de  $G$ : on retrouve ainsi une représentation paramétrique de la courbe  $A(r, s) = 0$  par des fonctions fuchsiennes. Les domaines de discontinuité sont les  $\overline{D_i}$ ; chacun d'eux représente la surface de Riemann  $R$  envisagée plus haut,  $D_i$  et  $D'_i$  correspondant respectivement à  $R_0$  et  $R'_0$ .

#### 6. — LES REPRÉSENTATIONS DE MM. DE LA VALLÉE POUSSIN ET JULIA.

En 1930, dans un beau mémoire des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, M. DE LA VALLÉE POUSSIN introduisit de nouveaux domaines canoniques formés par des cassinienes, c'est-à-dire par des courbes d'égal module d'un polynôme:

$$|P(u)| = \text{constante}.$$

Nous dirons que la cassinienne est de degré  $p$  si le degré du polynôme est  $p$ .

Les domaines de genre un se laissant représenter sur un anneau circulaire convenable

$$|u| = \begin{cases} e^{\lambda_0} \\ e^{\lambda_1} \end{cases} \quad (\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 < \lambda_0).$$

Il y avait lieu de se demander si un domaine de genre  $p$  pouvait être représenté sur des aires limitées par  $p + 1$  cassinienes de degré  $p$

$$|P(u)| = \begin{cases} e^{\lambda_0} \\ \vdots \\ e^{\lambda_p} \end{cases}.$$

<sup>1</sup> Excepté sur un ensemble de mesure nulle situé sur  $F$ .

Sous cette forme, le résultat ne serait pas général et M. Julia qui entreprit ses recherches sur ce sujet, à la demande de M. de la Vallée Poussin, a indiqué ultérieurement des domaines de genre  $p > 1$  où ce résultat serait en défaut. Ce que M. de la Vallée Poussin a établi, c'est ceci: tout domaine de genre  $p$  peut être mis en correspondance conforme biunivoque avec une aire limitée par des cassiniennes de degré égal *ou supérieur* à  $p$  fournies par un polynôme  $P$  ayant seulement  $p$  racines distinctes. Ce degré peut être pris égal à  $p$  si la dérivée  $F'(z)$  d'une fonction  $F(z)$ , que nous dirons « principale », dont le module est constant sur les frontières, ne s'annule pas sur ces frontières.

Frappé par l'élégance du résultat de M. de la Vallée Poussin où le degré des cassiniennes égale le genre de l'aire à représenter, M. JULIA a cherché une solution qui sauvegardât ce caractère, à son avis essentiel, pour tous les cas possibles, c'est-à-dire même si la dérivée  $F'(z)$  s'annule sur les frontières. Il parvint à montrer que tout domaine de genre  $p$  peut être représenté sur une aire dont les frontières *appartiennent à des cassiniennes de degré  $p$* . Chaque frontière est soit une cassinienne fermée sans point multiple, soit une partie d'une cassinienne comprenant au moins une boucle. Il montra en plus que les polynômes  $P(u)$  pouvaient être remplacés par des fonctions rationnelles  $R(u)$  de degré  $p$  à cercles fondamentaux, les cassiniennes généralisées :  $|R(u)| = \text{constante}$ , ayant même caractère que précédemment.

M. de la Vallée Poussin avait introduit également d'autres aires canoniques, limitées en particulier par des courbes de la forme

$$|(u - a_1)^{n_1} \dots (u - a_p)^{n_p}| = \begin{cases} 1 \\ e^{-2\pi} \end{cases},$$

dont l'une est un ovale simple et la seconde se décompose en  $p$  ovales simples intérieurs au précédent. Les  $n_i$  sont positifs mais généralement irrationnels.

Soit  $d$  un domaine du plan  $z$  limité par un contour extérieur  $c_0$  et  $p$  contours intérieurs  $c_1 \dots c_p$ . On peut sans restriction supposer ces contours analytiques. M. de la Vallée Poussin construit la fonction

$$F(z) = e^{U+iV}$$

holomorphe dans  $d$  et sur les  $c_i$  et dont le module  $e^U$  prend sur les  $c_i$  des valeurs constantes qu'on peut supposer réparties comme suit

$$1 > e^{\lambda_1} \geq e^{\lambda_2} \geq \dots \geq e^{\lambda_p}.$$

L'argument  $V$  augmente de  $-2\pi$  lorsque  $z$  décrit une des  $c_1 \dots c_p$ , dans le sens positif par rapport à l'aire, et de  $p \cdot 2\pi$  lorsque  $z$  décrit  $c_0$ .

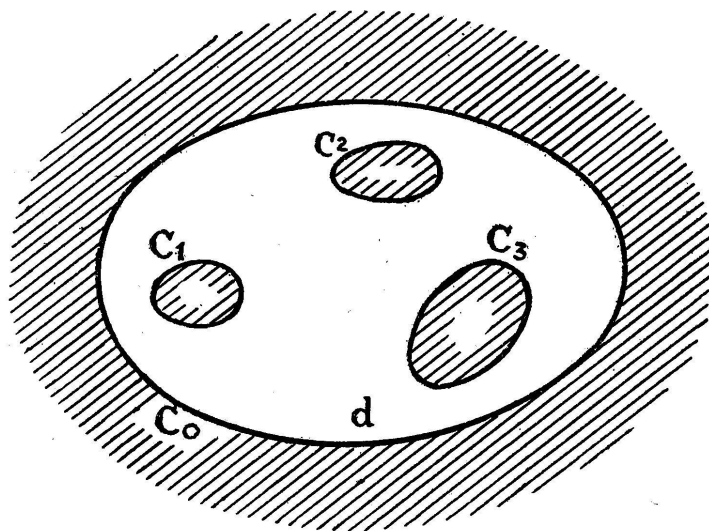


Fig. 4.

Cette construction se ferait au moyen de  $p$  fonctions fondamentales  $U_1, \dots, U_p$  harmoniques et uniformes dans  $d$  et telles que l'on ait

$$U_i = \begin{cases} 1 & \text{sur } c_i \quad i \neq 0 \\ 0 & \text{sur les autres contours.} \end{cases}$$

Ces fonctions existent et sont uniques. Soient alors  $V_1, \dots, V_p$  les  $p$  fonctions conjuguées; elles ne sont pas uniformes: à chaque  $c_k$  correspond une période  $\omega_{ik}$  pour  $V_i$  et le déterminant de ces périodes

$$\| \omega_{ik} \| \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, p \\ k = 1, \dots, p \end{matrix}$$

est différent de zéro, comme SCHOTTKY et M. KOEBE l'ont établi antérieurement. En posant

$$\begin{aligned} U &= \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p \\ V &= \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_p V_p \end{aligned}$$



on aura la fonction  $F(z)$  de M. DE LA VALLÉE POUSSIN.  $U$  prendra la valeur  $\lambda_i$  sur  $c_i$ . Les  $\lambda_i$  sont déterminés d'une façon unique par les conditions de périodes relatives à  $c_i$  et le savant belge les appelle les indices de l'aire  $d$ . (Voir *Cahiers scientifiques*, fasc. XIV.) La fonction  $F(z)$  est donc holomorphe et *uniforme* dans  $d$  et satisfait aux conditions demandées.  $F(z)$  est, bien entendu, déterminée à un facteur près de module unité. On démontre facilement que tous les  $\lambda_i$  sont négatifs, autrement dit  $U$  atteint son maximum sur  $c_0$  et seulement sur  $c_0$ . En posant :

$$F(z) = P(u) \quad \text{ou} \quad F(z) = R(u),$$

au contour  $c_i$  correspondra une cassinienne  $\Gamma_i$ , ou une cassinienne généralisée :

$$|P(u)| = e^{\lambda_i} \quad \text{ou} \quad |R(u)| = e^{\lambda_i}.$$

Chaque cassinienne entourera au moins un zéro ou un pôle des fonctions en  $u$ ; dans l'hypothèse contraire, les fonctions

$$L |P(u)| \quad \text{ou} \quad L |R(u)|$$

que l'on sait être harmoniques, seraient constantes sur les  $\Gamma_i$ , régulières à l'intérieur de  $\Gamma_i$  et par suite constantes identiquement, ce qui ne peut pas être.

M. de la Vallée Poussin montre qu'il existe effectivement un polynôme  $P$  de degré  $p$  à racines simples, tel que la correspondance ( $z \rightarrow u$ ) de l'aire donnée  $d$  et de l'aire  $D$  limitée aux  $\Gamma_i$  soit biunivoque, dans le cas où  $F'(z)$  ne s'annule pas sur les frontières de  $D$ . C'est par des considérations tirées de la théorie des lacets que le savant belge achève ainsi sa démonstration.

Si élégante et simple que soit la méthode précédente, M. Julia préfère, pour surmonter les difficultés du cas où la dérivée s'annulerait sur les frontières, prendre comme élément central la surface de Riemann  $\sigma$  que décrit le point  $\zeta$

$$\zeta = F(z)$$

lorsque  $z$  décrit le domaine  $d$ . Remarquons que,  $F(z)$  étant uniforme dans  $d$ , cette surface de Riemann  $\sigma$  est en correspondance biunivoque avec le domaine  $d$  balayé par  $z$ .  $\sigma$  est donc



à la fois le domaine d'existence et d'uniformité de la fonction inverse, multiforme

$$z = \Phi(\zeta)$$

et le « *domaine des valeurs* » de  $F$  dans  $d$ .

A deux points  $z_1$  et  $z_2$  de  $d$  peut correspondre un même point géométrique  $\zeta_1 = \zeta_2$ . Nous conviendrons que  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  ne sont pas sur le même feuillet et ne coïncident qu'en projection.

M. Julia avait déjà, à diverses reprises, attiré l'attention des chercheurs sur cette construction, en quelque sorte inverse de celle de Riemann, à partir d'une fonction uniforme  $F(z)$ . Cette surface de Riemann  $\sigma$  jouit de propriétés générales: frontières, nombre des feuillets, relation entre le nombre des points de ramification intérieurs et celui des points de ramification sur la frontière, connexion, et l'on démontre que ces propriétés sont caractéristiques de la surface envisagée. Cette surface cano- nique  $\sigma$  met en lumière la nature des difficultés qu'avait rencontrées M. de la Vallée Poussin et la manière de les éviter par des cassiniennes tronquées au lieu d'élever le degré des polynômes  $P(u)$ .

*La construction de la surface  $\sigma$ .* — Chaque point  $z$ , où  $F'(z) \neq 0$ , peut être entouré d'une aire  $(\delta)$  à laquelle correspond biunivoquement par  $\zeta = F(z)$  une aire  $(\Delta)$  circulaire. Chaque point  $z'$  de  $d$  où  $F'(z') = 0$  peut être entouré d'une aire  $(\delta')$  à laquelle correspond biunivoquement un élément  $(\Delta')$  de surface de Riemann présentant au point  $\zeta' = F(z')$  un point de ramification autour duquel se permutent  $k$  feuillets de  $(\Delta')$ , la frontière de  $(\Delta')$  étant d'ailleurs constituée par un cercle de centre  $\zeta'$  parcouru  $k$  fois de suite.

En vertu du lemme de BOREL-LEBESGUE, on peut recouvrir  $d$  avec un nombre fini d'aires  $(\delta)$  et  $(\delta')$  auquel correspondent sur le plan  $\zeta$  un nombre fini d'aires  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Les domaines  $(\delta)$  et  $(\delta')$  empiètent les uns sur les autres et il en est de même des  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Partant d'une aire  $(\delta_0)$ , nous ferons le prolongement de  $F(z)$  dans tout  $d$  et relierons les domaines  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  comme l'étaient les  $\delta$ , c'est-à-dire en respectant les connexions. Un nombre fini d'opérations permettra ainsi d'engendrer l'aire de Riemann  $\sigma$ , transformée conforme et biunivoque de  $d$  par  $F(z)$ .

La surface  $\sigma$  est limitée par des courbes  $\gamma_i$ , sur lesquelles  $|\zeta| = e^{\lambda_i}$ , qui correspondent aux contours  $c_i$  de  $d$ . Les  $\gamma_i$  se projettent donc sur des circonférences  $\gamma_i$  du plan  $\zeta$ . Quand  $z$  décrit  $c_i$ ,  $\zeta$  décrit  $\gamma_i$  toujours dans le même sens si  $F' \neq 0$  sur  $c_i$ , ou avec des rebroussements aux points où cette dérivée serait nulle. Pour cette raison, nous appellerons les  $\gamma_i$  des courbes circulaires.

A tout point  $z'$  intérieur à  $d$  tel que  $F'(z') = 0$  correspond un point de ramification de  $\sigma$ , mais si  $z'$  est sur une des frontières de  $d$ , le point  $\zeta'$  correspondant ne peut être regardé comme un point de ramification de  $\sigma$ . Il serait point de ramification pour un prolongement  $\sigma^*$  de  $\sigma$  correspondant à un prolongement de  $d$  par des bandes convenables entourant les  $c_i$ , et les points de rebroussement précédemment mentionnés sont évidemment les traces de ce que seraient ces points de ramification. On s'assure d'ailleurs (par des propriétés de maximum) que  $F'$  ne peut s'annuler sur  $c_0$  et  $c_p$ . En plus, chaque zéro de  $F'$  étant pris avec son ordre de multiplicité, l'on peut montrer que sur les autres contours les racines de  $F'$  sont forcément en nombre pair (par la variation des arguments). Enfin, par des raisonnements que nous ne reproduirons pas ici, M. Julia aboutit à la relation fondamentale suivante:

$$2a + b = 2p - 2 ,$$

$a$  étant le nombre des zéros intérieurs à  $d$ ,  $b$  le nombre des zéros sur la frontière de  $d$  et  $p$  comme toujours le genre de l'aire. Plaçons-nous alors dans des circonstances simples afin de pouvoir décrire la surface  $\sigma$  sans complications superflues de langage. Supposons  $b = 0$  (donc aucune racine sur la frontière et  $a = p - 1$ ), les racines intérieures simples et les  $\lambda_i$  tous différents:  $\lambda_p < \lambda_{p-1} < \dots < \lambda_1 < 0$ .

Alors, il y a  $p$  feuillets de  $\sigma$  limités extérieurement par  $\gamma_0$  et intérieurement par l'une des circonférences  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ . Ces feuillets sont unis par  $p - 1$  points de ramification simples. Ils se traversent suivant les lignes de croisement issues des points de ramification et s'étendant jusqu'à  $\gamma_0$ . Ces résultats s'obtiendraient en recherchant le nombre  $n(\alpha)$  des racines de l'équation

$$F(z) - \alpha = 0 ,$$

nombre évidemment égal à celui des feuillets situés au-dessus du point  $\alpha$  du plan  $\zeta$ . Ce nombre est, en vertu d'un théorème de Cauchy,

$$n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 \dots c_p} \frac{F'(z)}{F(z) - \alpha} dz,$$

et l'on peut écrire aussi, comme on sait,

$$n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \text{var. totale de l'arg de } (\zeta - \alpha).$$

Le calcul de cette variation totale montrera l'existence d'un feuillet entre  $\gamma_p$  et  $\gamma_{p-1}$ , de deux feuillets entre  $\gamma_{p-1}$  et  $\gamma_{p-2}$ , enfin de  $p$  feuillets entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_0$ .

La surface  $\sigma$  étant transformée biunivoque de  $d$  par  $\zeta = F(z)$ , aura le même ordre de connexion que  $d$ , c'est-à-dire l'ordre  $p + 1$ . En plus, elle est de *genre zéro* (schlichtartig) car il est impossible de tracer sur  $\sigma$  une rétrosection qui ne morcellerait pas cette surface.

On peut considérer  $\sigma$  comme une aire de Riemann canonique qui caractérise la classe des aires du plan  $z$  représentables conformément et biunivoquement sur une aire quelconque  $d$  donnée *a priori* et de genre  $p$ .

Il y a plus: la marche inverse est possible, car en vertu des théorèmes généraux sur la représentation conforme des surfaces de Riemann (voir KOEBE, Ueber die Uniformisierung..., *Gött. Nachr.*, 11 juillet 1908) on peut trouver une fonction  $z(\zeta)$  (et même une infinité) holomorphe à l'intérieur de la surface de Riemann et univalente, de sorte que  $z$  décrive une aire simple  $d$  ne se recouvrant nulle part lorsque  $\zeta$  décrit la surface de Riemann  $\sigma$ . (Dans le cas actuel, cette aire  $d$  de connexion  $p + 1$  pourrait d'ailleurs être choisie dans un des types canoniques vus précédemment de Schottky, de Koebe, de Hilbert.)

La fonction  $\zeta(z)$ , inverse de la précédente, aura toutes les propriétés qui caractérisent la fonction  $F(z)$  (à un facteur constant près). Donc les propriétés de  $\sigma$  auxquelles nous avons fait allusion, sont bien caractéristiques de la classe des aires planes de connexion  $p + 1$ .

Constatons ici que  $\sigma$  dépend dans le cas le plus général de  $3p - 3$  paramètres réels; il y a les  $p$  rayons des cercles  $\gamma_1 \dots \gamma_p$ , puis  $a$  points de ramification intérieurs correspondant chacun à deux paramètres réels et  $b$  points de ramification sur les frontières, ce qui fait  $b$  paramètres réels, enfin, il faut soustraire un paramètre, puisque  $\sigma$  n'était déterminée qu'à une rotation près, ce qui fait, en vertu de l'équation fondamentale,

$$p + 2a + b - 1 = 3p - 3.$$

*Prolongement de  $\sigma$ ; la surface  $\sigma_1$ .* — Revenons, pour simplifier, au cas où la surface  $\sigma$  n'a que des points de ramification intérieurs:  $b = 0$ ,  $a = p - 1$ . On a vu que  $\sigma$  était limitée dans ce cas par les circonférences intérieures  $\gamma_1 \dots \gamma_p$  et la circonférence extérieure  $\gamma_0$  parcourue  $p$  fois. Adoptons pour un instant le point de vue de la topologie. Les aires  $d$  et  $\sigma$  sont homéomorphes, c'est-à-dire qu'elles se correspondent biunivoquement et bicontinument [par  $\zeta = \zeta(z)$ ].

D'autre part, il est possible d'établir une correspondance analogue entre le cercle limité par  $\gamma_i (i > 0)$  et l'intérieur de  $c_i$ , qui coïncide sur les frontières avec celle définie par  $\zeta = \zeta(z)$ . En adjoignant à  $\sigma$  les cercles intérieurs limités aux  $\gamma_i$ , nous obtenons donc une surface de Riemann  $\sigma_1$ , homéomorphe à l'intérieur de  $c_0$ . Elle possède  $p$  feuillets au-dessus de tout point intérieur à  $c_0$ .

*La surface  $\Sigma_1$  et la représentation de  $M$ . de la Vallée Poussin.* — Adjoignons à la surface  $\sigma_1$  l'élément  $\sigma_2$  de surface de Riemann décrit par le point  $\zeta = \omega^p$  lorsque  $\omega$  décrit le domaine  $|\omega| \geq 1$ . Quand  $\omega$  décrit la circonférence unité, le point  $\zeta$  décrit  $p$  fois le cercle trigonométrique. On pourra raccorder les  $p$  feuillets de  $\sigma_2$  aux  $p$  feuillets de  $\sigma_1$  dont les frontières extérieures se projetaient sur  $\gamma_0$ . En soudant ainsi  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , on obtient une surface de Riemann  $\Sigma_1$  fermée et de « genre zéro », ce qui veut dire que toute courbe fermée tracée dans  $\Sigma_1$  morcelle  $\Sigma_1$ : au point de vue topologique,  $\Sigma_1$  est homéomorphe au plan complet (y compris le point à l'infini). On peut en effet établir entre  $\sigma_2$  et l'extérieur de  $c_0$  une correspondance biunivoque et continue qui coïncide sur les frontières avec celle définie par  $\zeta = \zeta(z)$ , ce qui montre que

$\Sigma_1$  est homéomorphe au plan complet des  $z$ ,  $\sigma_1$  correspondant à l'intérieur de  $c_0$  et  $\sigma_2$  à l'extérieur.

D'après un théorème de SCHWARZ, toute surface de cette sorte peut être mise en correspondance conforme avec un plan  $u$  complet, par une fonction analytique

$$u = u(\zeta) .$$

Cette correspondance peut être établie d'une infinité de façons et devient unique si l'on se donne trois couples de points homologues. Ici nous supposons que le point  $\zeta = \infty$  correspond au point  $u = \infty$ .

La fonction  $u(\zeta)$  a  $p$  déterminations finies en chaque point, elle a un point critique d'ordre  $p - 1$  à l'infini et des points critiques simples aux  $p - 1$  points de ramification de  $\sigma$ . C'est donc une fonction algébrique de degré  $p$  en  $\zeta$ . Son inverse

$$\zeta = \zeta(u)$$

est holomorphe en tout  $u$  à distance finie et admet  $u = \infty$  comme pôle d'ordre  $p$ . C'est un polynôme de degré  $p$

$$\zeta = P(u) .$$

$\Sigma_1$  est donc la surface de Riemann d'un polynôme et à  $\sigma$  correspond une aire  $D$  conformément et biunivoquement.  $D$  est connexe et de genre  $p$ . Aux contours  $c_i$  correspondent les cassiniennes du plan  $u$

$$|P(u)| = e^{\lambda_i} \quad i = 0, 1, \dots, p .$$

Les polynômes  $P$  de M. de la Vallée Poussin et les représentations conformes correspondantes ( $z \rightarrow u$ ), par  $F(z) = P(u)$ , se trouvent ainsi rattachés à la surface de Riemann  $\sigma$ , qui va encore nous donner d'autres représentations au paragraphe suivant.

*La surface  $\Sigma_2$  et la représentation de M. Julia sur des cassiniennes généralisées.* — Le prolongement précédent de  $\sigma_1$  par  $\sigma_2$  ne dépend en rien de la configuration intérieure de  $\sigma$  et il peut se

faire d'une manière plus naturelle, comme suit. On prendra la symétrique  $\sigma'_1$  de  $\sigma_1$  par rapport à la frontière  $\gamma_0$

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta},$$

les points homologues étant toujours pris sur le même feuillet. La réunion  $\Sigma_2$  de  $\sigma_1$  et de  $\sigma'_1$  est une surface à  $p$  feuillets dont chacun recouvre tout le plan. Elle a  $p - 1$  points de ramification de  $\sigma_1$  et  $p - 1$  points de ramification symétriques de  $\sigma'_1$  qui établissent la connexion entre les mêmes feuillets.  $\Sigma_2$  est de « genre zéro » et elle est encore homéomorphe au plan complet. En vertu du théorème déjà utilisé de SCHWARZ,  $\Sigma_2$  se laisse représenter conformément et biunivoquement sur un plan complet.

Soient  $u = u(\zeta)$  cette correspondance et  $\zeta = R(u)$  la correspondance inverse. Un raisonnement semblable à celui déjà fait au paragraphe précédent, permet d'affirmer que  $R(u)$  est une fonction rationnelle de degré  $p$  à cercle fondamental. Donc  $\sigma$  se transforme en une aire  $D$  du plan  $u$  biunivoquement et conformément. Comme la correspondance entre  $d$  et  $\sigma$  jouissait de la même propriété, la transformation  $(z \rightarrow u)$  donnée par

$$F(z) = R(u)$$

est une représentation conforme, biunivoque du domaine  $d$  sur un domaine  $D$  du plan  $u$ . Au contour  $c_0$  correspond ainsi le cercle fondamental de rayon unité et aux contours  $c_i$  correspondent  $p$  cassiniennes généralisées sans point commun, chacune entourant un des zéros de  $R(u)$ . Ce sont les représentations que M. Julia a fait connaître récemment.

## 7. — SUR LES CORRESPONDANCES TRANSFORMÉES.

Les polynômes  $P(u)$  de M. de la Vallée Poussin ne sont pas entièrement déterminés, mais il est facile de voir que tous ceux qui dérivent d'une même surface  $\Sigma_1$  se déduisent de l'un d'entre eux par la relation

$$P(u) = P_0(au + b).$$



Nous pourrions toujours normaliser cette classe en imposant aux polynômes  $P(u)$  d'avoir un coefficient de  $u^n$  égal à un en module. Il est clair qu'alors on doit avoir  $|a| = 1$  pour que  $P(u)$  satisfasse à cette condition en même temps que  $P_0(u)$ . L'aire canonique  $D$  sur laquelle on représente  $d$  n'est donc déterminée qu'à une transformation près de la forme

$$(u \rightarrow ue^{i\theta} + b)$$

qui n'est qu'un déplacement euclidien.

Concevons, alors, deux domaines  $d$  et  $d'$  qui puissent être mis en correspondance conforme, puis passons aux aires  $D$  et  $D'$  correspondantes et canoniques de M. de la Vallée Poussin. Le passage du plan  $z$  de  $d$  et  $d'$  au plan  $u$  de  $D$  et  $D'$  a donc pour effet de *linéariser la correspondance conforme entre  $D$  et  $D'$* .

De même, les fonctions  $R(u)$  appartiennent à une famille dépendant de trois constantes réelles

$$R(u) = R_0 \left[ \frac{u - a}{1 - \bar{a}u} e^{i\theta} \right].$$

Une correspondance conforme entre deux aires de même classe  $d$  et  $d'$  du plan  $z$  est transformée par  $F(z) = R(u)$  en la substitution

$$\left( u \rightarrow \frac{u - a}{1 - \bar{a}u} e^{i\theta} \right)$$

qui correspond, comme on le sait depuis Poincaré, à un déplacement non euclidien du plan de Lobatchewsky. L'effet de la projection sur le domaine canonique de M. Julia est donc encore de *linéariser au sens non euclidien* la correspondance entre les deux domaines primitivement donnés  $d$  et  $d'$ .

Nous avons déjà vu que la surface  $\sigma$  dépend de  $3p - 3$  paramètres réels. Il en est de même évidemment des domaines canoniques de M. de la Vallée Poussin:  $p$  pour  $\lambda_1 \dots \lambda_p$ ,  $2p$  pour fixer les zéros de  $P(u)$  et enfin trois à soustraire, un pour  $\theta$  et deux pour  $b$  à cause de l'indétermination due au déplacement euclidien précédent. L'on retrouverait exactement le même nombre de paramètres pour la représentation de M. Julia. Mais ici ces paramètres ne sont *pas entièrement arbitraires*, car nous avons supposé que  $F'$  ne s'annulait pas sur la frontière de  $d$ .

8. — CAS OU  $F'$  A DES ZÉROS SUR LA FRONTIÈRE.

Nous savons que les représentations de MM. de la Vallée Poussin et Julia sont possibles si  $F'$  ne s'annule pas sur la frontière de  $d$ . Les cassiniennes du plan des  $u$  sont alors des courbes analytiques et régulières et n'ont pas de point multiple. Elles ne sont d'autre part régulières que dans ce cas là car, l'annulation de la dérivée introduirait des points multiples des cassiniennes envisagées. Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que les représentations précédentes soient possibles est que  $F'$  ne s'annule pas sur les  $c_i$ .

M. de la Vallée Poussin évitait la difficulté en augmentant le degré du polynôme:  $P(u)$ . M. Julia montre qu'il est encore possible de représenter le domaine donné de connexion  $p + 1$  sur une aire limitée par  $p + 1$  courbes

$$|P(u)| = e^{i\theta}, \quad i = 0, 1, \dots, p$$

$P$  étant toujours de degré  $p$ . Portons notre attention pour fixer les idées, sur le cas  $p = 2$ . Nous avons ici  $2a + b = 2p - 2 = 2$ , ce qui exige  $a = 0$  et  $b = 2$ . Il n'y a plus de point de ramification sur la surface  $\sigma$  elle-même, mais il y a, sur le contour  $c_1$  intermédiaire, deux racines simples ou une racine double. Envisageons le cas de deux racines simples  $z_1$  et  $z_2$  et supposons en plus les  $\lambda$  différents. Alors, lorsque le point  $z$  passe par  $z_1$  ou  $z_2$  en décrivant  $c_1$ , le point  $\zeta = F(z)$  rebrousse chemin sur  $\gamma_1$ : il y a ainsi deux points de rebroussement  $\zeta_1 = F(z_1)$  et  $\zeta_2 = F(z_2)$ . La surface  $\sigma'$ , correspondant par  $\zeta = F(z)$  à un domaine du plan  $z$  débordant sur l'intérieur de  $c_1$ , admettrait les deux points  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , correspondant à  $z_1$  et  $z_2$ , comme points de ramification. Il n'y a toujours, dans ce cas, qu'un seul feuillet entre  $\gamma_2$  et  $\gamma_1$  et deux entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_0$ . L'anneau du feuillet projeté entre  $\gamma_2$  et  $\gamma_1$  est limité extérieurement (outre  $\gamma_2$ ) par un arc  $\zeta_1\zeta_2$  qui appartient à  $\gamma_1$  et par un *arc de passage* qui unit les deux anneaux  $[\gamma_2\gamma_1]$  et  $[\gamma_1, \gamma_0]$ . On trouvera dans un article récent paru en Suisse (*Commentarii Mathematici Helvetici*, volume 4, 1932, p. 106) une étude détaillée de ce cas.



Revenons au cas général de  $p$  quelconque et contentons-nous de décrire la disposition des cassinienues. L'on aurait, en partant de  $\Sigma_1$ ,

$$F(z) = \zeta = P(u) = (u - u_1) \dots (u - u_p) .$$

Alors, le domaine canonique est limité: extérieurement, par la cassinienne  $\Gamma_0: |P(u)| = 1$  qui est régulière et entoure les  $p$  zéros de  $P$ ; intérieurement, par  $p$  cassinienues, tronquées ou non,  $\Gamma_1 \dots \Gamma_p$ .  $\Gamma_p$  est un ovale (courbe régulière) entourant  $u_p$  seul. Les  $\Gamma_i$  intermédiaires se composent d'une boucle fermée entourant un seul zéro de  $P$  et de  $v_i$  boucles tronquées suivant

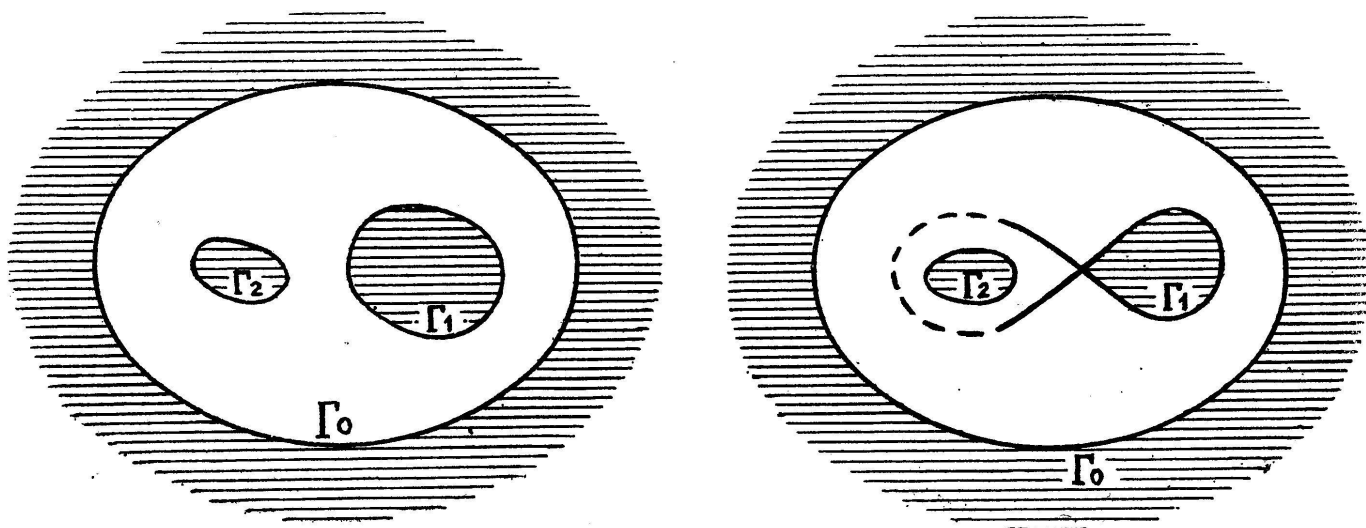


Fig. 5.

Disposition des cassinienues pour  $p = 2$ .

des arcs qui correspondent aux arcs de passage, s'il y a  $2v_i$  zéros de  $F'(z)$  sur  $c_i$ ;  $\Gamma_i$  a  $v_i$  points doubles à tangentes rectangulaires. Topologiquement, les cassinienues tronquées sont des courbes fermées, adjacentes à un ou plusieurs arbres extérieurs.

Partant de  $\Sigma_2$  et de la relation  $F(z) = R(u)$ , les mêmes remarques subsisteront.

## 9. — RETOUR AU POINT DE VUE ALGÈBRE.

Nous voudrions montrer enfin que ces résultats nouveaux peuvent être rattachés fortement aux recherches algébriques anciennes et notamment aux travaux de Schottky.

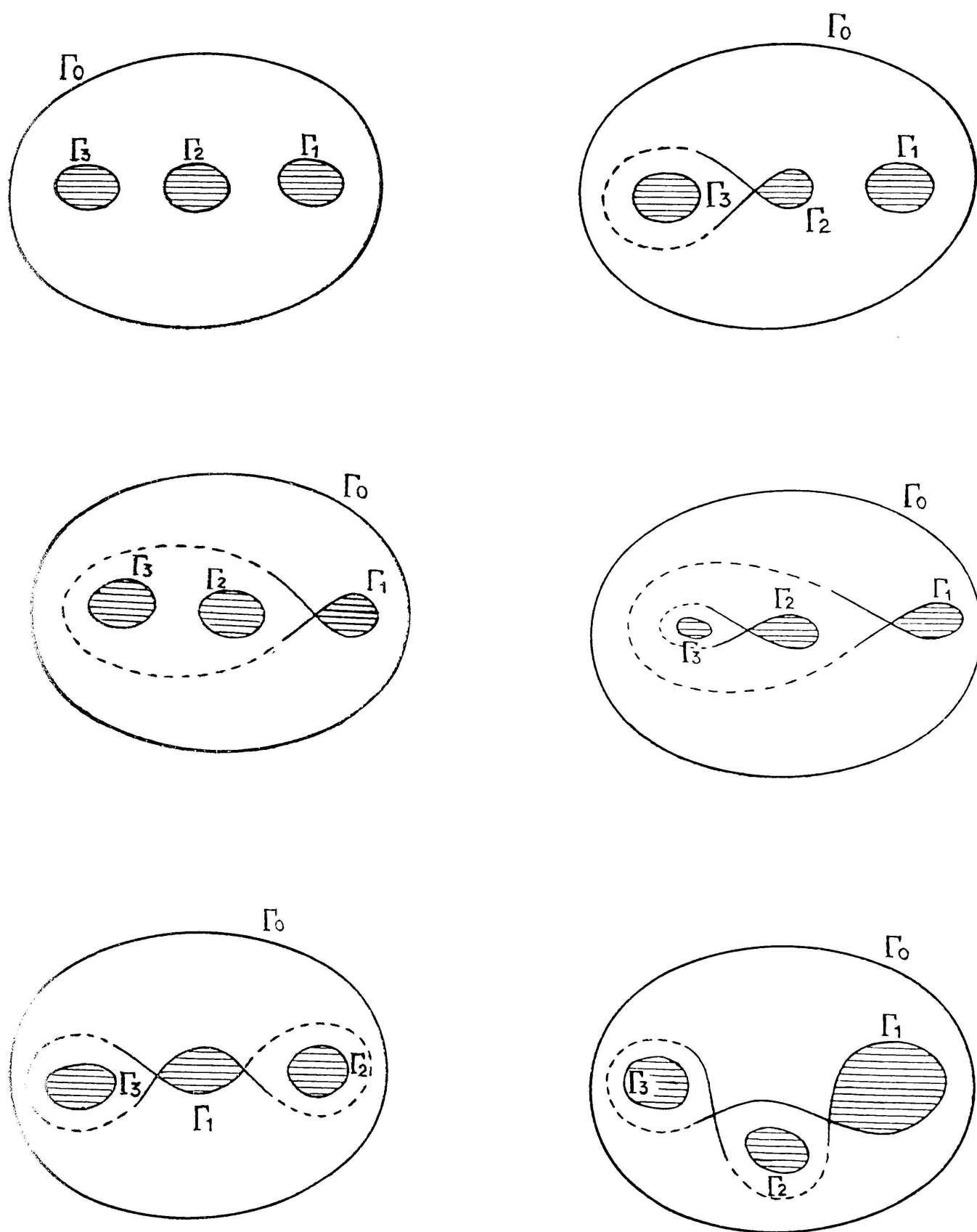


Fig. 6.

Disposition des cassiniennes pour  $p = 3$ .

Tout d'abord le problème de trouver les aires invariantes par des transformations biunivoques (directement ou inversement conformes) se ramène à la recherche des aires canoniques  $D$  invariantes par des déplacements ou des symétries non euclidiennes. Ce problème est identique au fond à celui de la détermination des courbes algébriques  $A(r, s) = 0$  invariantes par des transformations birationnelles, problème complètement résolu par HURWITZ.

Envisageons la fonction  $f(z) = LF(z) = U + iV$ . Elle est analytique dans  $d$ , non uniforme, mais sa dérivée  $f'(z)$  est uniforme, comme on le vérifie d'après la construction de  $V$ .  $F'(z)$  et  $f'(z)$  ont les mêmes zéros avec le même ordre de multiplicité.  $f'(z)$  est donc holomorphe et uniforme dans  $d$  et sur les contours.

Sur ces derniers  $U$  reste constant,  $\frac{dU}{d\sigma} = 0$ ,  $\sigma$  étant l'arc de  $c_i$  et l'on a

$$f'(z) \frac{dz}{d\sigma} = i \frac{dV}{d\sigma} = -i \frac{dU}{dn}$$

quantité purement imaginaire sur les frontières de  $d$ . La fonction  $f'$  est donc forcément liée aux fonctions  $r(z)$  et  $s(z)$  de SCHOTTKY, introduites précédemment.  $r(z)$  étant méromorphe dans  $d$  et réelle sur  $c_i$ , il en sera de même pour

$$\frac{dr}{d\sigma} = r'(z) \frac{dz}{d\sigma}.$$

Le rapport  $\frac{f'(z)}{ir'(z)}$  sera réel sur les  $c_i$ ; il est uniforme et méromorphe dans  $d$  et sur sa frontière. C'est donc une fonction de la classe  $K(z)$ , c'est-à-dire une fonction rationnelle  $R$  à coefficients réels des deux fonctions fondamentales  $r(z)$  et  $s(z)$  et l'on a

$$f'(z) = iR(r, s)r'(z).$$

Il en résulte que  $f(z)$  est une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique  $A(r, s) = 0$ :

$$f(z) = i \int R(r, s) dr.$$

Elle est de première espèce, parce que  $f$  reste fini d'après la construction de  $U$  et de  $V$ .

Soient  $\sigma$  la transformée biunivoque de  $d$  par  $\zeta = F(z)$  et  $\sigma'$  sa symétrique par rapport à  $\gamma_0$  et décrite, comme on sait, par le point

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{F(z)} .$$

$\overline{F(z)}$  est une fonction analytique du point qui décrit la face du disque  $d$  située en dessous du plan  $z$ . Donc  $\sigma + \sigma'$  est ici l'image conforme du disque  $d$  à deux faces. Au point de vue topologique, on peut raccorder les points frontières symétriques par rapport à  $\gamma_0$ , et  $\sigma + \sigma'$  devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée de genre  $p$ , homéomorphe aux deux faces d'un disque à  $p$  trous. C'est la surface de RIEMANN-CLIFFORD-KLEIN de la classe des courbes algébriques  $A(r, s) = 0$  associées par Schottky à la classe d'aire  $d$ .

#### 10. — LES DOMAINES A CONNEXION INFINIE.

Nous devons nous contenter de quelques indications sur ce sujet et nous renvoyons pour le reste à la bibliographie. Les méthodes employées ici se rattachent presque toutes au travail de M. Hilbert publié en 1909 dans les *Gött. Nach.*, p. 314. M. Hilbert ne se restreint pas au terrain de la théorie des fonctions mais revient au calcul des variations. Il se rapproche ainsi de la méthode primitive de Riemann qui tentait de résoudre le problème de Dirichlet par la recherche d'une fonction  $\varphi$  rendant minimum l'intégrale

$$\iint \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy .$$

Il est intéressant de remarquer que les premiers pas faits dans le terrain des connexions infinies s'inspirent des considérations de minimum qui guidèrent Riemann dans le problème de Dirichlet et dans l'étude qui s'y rattache de la représentation conforme des aires simplement connexes.

Désignons par  $D_\infty$  un domaine à un seul feuillet à connexion infinie limite de domaines emboîtés à connexion finie  $D_n$ .

Un *élément de frontière*  $f$  de  $D_\infty$  est un continu de la frontière de  $D_\infty$  qui n'est pas contenu dans un continu plus grand. (A noter que l'ensemble des  $f$  n'est pas toujours dénombrable.)

I. *Représentation conforme de deux  $D_\infty$  l'un sur l'autre.* — Comme cas particulier du théorème général de l'uniformisation, il faut et il suffit, pour que cette représentation soit possible, que les deux groupes fondamentaux soient identiques.

Mêmes références que l'uniformisation (Poincaré, Koebe).

II. *Domaines à fentes parallèles.* — 1<sup>o</sup> Supposons que  $D_\infty$  contienne le point à l'infini. Soit  $\Phi_{D_\infty}$  la famille des fonctions régulières et univalentes dans  $D_\infty$ , qui admettent à l'infini le développement :

$$\omega(z) = z + \frac{a}{z} + \dots \quad (1)$$

Parmi ces fonctions, il en est une et une seule dont la partie réelle rende *minimum* l'intégrale de Dirichlet (prise convenablement pour éviter le pôle). Cette fonction représente  $D_\infty$  sur un domaine  $D'_\infty$  dont tous les éléments de frontière sont des points ou des segments parallèles à l'axe réel. Un tel domaine est dit « *domaine à fentes parallèles* »,  $D'_\infty$  est dit « *domaine à fentes parallèles minimum* ».

Si maintenant on résout ce problème de minimum pour les domaines  $D_n$ , les solutions tendent vers la solution de ce même problème pour  $D_\infty$ .

Enfin la frontière de  $D'_\infty$  a une mesure superficielle nulle, ce qui n'a pas toujours lieu pour un domaine à fentes parallèles non minimum. (Par exemple: le plan moins un ensemble parfait discontinu de mesure positive: tous les éléments de frontière sont des points.)

Dans le cas de la connexion finie tout domaine à fentes parallèles est minimum.

Tout ceci se trouve démontré dans HILBERT, *Gött. Nach.*, 1909, p. 314 et KOEBE, *id.*, p. 324 et 1910, p. 59.

2<sup>o</sup> Ensuite KOEBE (*Gött. Nach.*, 1918) émet l'hypothèse que

pour un domaine minimum, la projection de la frontière sur un axe perpendiculaire aux fentes a une mesure nulle. Cette hypothèse n'est pas exacte (GRÖTZSCH, *Leipz. Ber.*, 1931, p. 185, et DE POSSEL, Thèse). Grötzsch donne même un exemple où cette projection recouvre tout un segment.

3° Le problème qui consiste à rendre  $R(a)$  maximum dans le développement (1) a une solution et une seule dans  $\Phi_{D_\infty}$ ; elle coïncide avec la solution du problème du minimum ci-dessus.

Plus généralement, le domaine exact de variation de  $a$  est un cercle et  $a$  ne se trouve sur la circonférence, à l'extrémité du rayon qui fait l'angle  $\theta$  avec l'axe réel, que pour une fonction représentant  $D_\infty$  sur un domaine minimum dont les fentes sont parallèles à la direction  $\frac{\theta}{2}$ .

Ces deux propriétés se trouvent dans Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1932, et De Possel, *Gött. Nach.*, 1931; *Math. Ann.*, 1932.

4° Si tout l'extérieur du cercle-unité appartient à  $D_\infty$ , et si  $w(z)$  est la fonction extrémale définie ci-dessus, on a :

$$|J(w(z) - z)| < K |a|^{\frac{1}{4}} \quad (K < 1000) .$$

$a$  étant le coefficient du développement (1). — Voir DE POSSEL, *Math. Ann.*, 1932.

III. Domaines à fentes radiales et concentriques. — 1° Koebe étudie aussi le problème du minimum de l'intégrale de Dirichlet pour des singularités autres que le pôle.

Si on introduit deux discontinuités en  $\log \frac{1}{r}$ , pour  $\log |w(z)|$  (au point  $z_1$  et à l'infini) la solution du problème de minimum conduit à un domaine dont tous les éléments de frontière sont des fentes radiales ou des droites passant par  $w(z_1)$ .

Avec deux discontinuités en  $\text{Arctg}$ , en  $z_1$  et à l'infini, on trouve des éléments de frontière sur des cercles concentriques de centre  $w(z_1)$ .

Tous les résultats du cas des fentes parallèles, unicité de la solution du problème de minimum, non-unicité de la solution du problème de représentation conforme dans le cas d'un  $D_\infty$ , identité entre la solution du problème pour  $D_\infty$  et la limite des

solutions du même problème pour les  $D_n$ , subsistent. — Voir Koebe, *Gött. Nachr.*, 1909, p. 314 et 1910, p. 59.

2° Ces solutions correspondent respectivement aux fonctions qui rendent maxima et minima  $|\omega'(z_1)|$  dans la famille  $\Phi_{D_\infty}$ . Plus généralement le domaine exact de variation de  $\log \omega'(z_1)$  est un cercle dont la circonférence n'est atteinte que pour des représentations où les éléments de frontière sont sur des spirales logarithmiques de centre  $\omega(z_1)$  (cas limite: II 3° lorsque  $z_1$  tend vers l'infini). — Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1930, 31, 32 et De Possel, Thèse.

IV. *Autres résultats.* — 1° Le domaine exact de variation de  $\log [\omega(z_1) - \omega(z_2)]$  est un cercle dont la circonférence n'est atteinte que pour des représentations où les éléments de frontière sont sur les trajectoires *isogonales* des coniques homofocales de foyers  $\omega(z_1)$ ,  $\omega(z_2)$ . Ce théorème admet comme cas-limite III lorsque  $z_1$  et  $z_2$  viennent se confondre.

2° Le domaine exact de variation de  $\omega(z_1)$  est un cercle, dont la circonférence n'est atteinte que pour des représentations où les éléments de frontière sont sur des paraboles homofocales dont le foyer est  $\omega(z_1)$ . C'est un cas-limite du IV 1° lorsque  $z_2$  tend vers l'infini. — Grötzsch, *Leipz. Ber.*, 1932, 1933.

3° Enfin Grötzsch étudie encore quelques autres représentations; ainsi le cas de deux éléments de frontière où s'accumulent des éléments de frontière isolés. On représente ces deux éléments sur des cercles concentriques ou des points. L'unicité est également démontrée. — *Leipz. Ber.*, 1929, p. 51.