Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES FAISCEAUX HOMOPONCTUELS DE COURBES PLANES

Autor: d'Ocagne

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25988

constitue, pour la pratique ordinaire du dessin, un écart parfaitement admissible. En tout cas, pour $\omega = 60°$, l'écart n'est plus que de $6' 14''$, environ le dixième de degré, grandeur absolument négligeable; on est donc assuré d'avoir par ce moyen toute la précision désirable en prenant pour la limite λ définie au n° 12 la valeur 60°. Si même on admet pour λ la valeur 45°, l'écart correspondant tombe à $10''$, ce qui équivaut à une précision de même ordre que celle donnée par le procédé Kopf.

Finalement, on peut dire qu'avec une précision suffisante jusqu'à 90° et pleinement satisfaisante jusqu'à 60°, *la droite joignant le milieu* I *du rayon* OO′ *au milieu* M *de l'arc* AB *est parallèle à la trisectrice de l'angle* AOB.

Il ne semble pas possible de pousser plus loin la simplicité de la constrution.

LES FAISCEAUX HOMOPONCTUELS DE COURBES PLANES

PAR

M. d'Ocagne, Membre de l'Institut (Paris).

---

1. — Cette note a pour but d'attirer l'attention sur une notion qui ne semble pas avoir encore été envisagée et qui peut donner lieu à des exercices non dénués d'intérêt.

Si les courbes d'un certain faisceau (système simplement infini) découpent sur toutes les tangentes d'une courbe (M) des ponctuelles semblables entre elles, nous dirons que ce faisceau est *homoponctuel* pour la courbe (M) appelée sa *base.* Si ce faisceau est homoponctuel pour chacune des courbes qui le composent, prise pour base, nous le qualifierons, par raison de simplicité, d'*autoponctuel*, alors que le terme *d'autohomoponctuel* eût sans doute été plus rationnel.

Une ponctuelle de similitude donnée est entièrement définie par deux de ses points A et B, attendu que, pour tout autre C de ses points, le rapport $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}$ a une valeur fixe k. Il en résulte que tout faisceau homoponctuel est entièrement défini par deux quelconques de ses courbes (A) et (B) choisies arbitrairement, qui en seront dites les *fondamentales*. Le rapport k par lequel est déterminée toute autre courbe du faisceau sera dit son *indice*.

2. — On peut tout d'abord, pour une position donnée de la tangente AB à la base (M), se proposer de déduire les normales des diverses courbes du faisceau de celles des fondamentales. Cette détermination résulte d'un théorème bien connu de Mannheim qui dit que si les normales aux courbes (A), (B), (C) coupent la normale à (M) en a, b, c, on a également $\frac{ca}{cb} = k$. Ainsi, *les normales aux courbes* (C) *du faisceau rencontrent la normale à la base en des points* c *formant une ponctuelle semblable à celle des points* C *sur la tangente à la base.*

Autrement dit, *les points* c *engendrent un faisceau homoponctuel ayant pour base la développée de* (M).

La construction de ces points c est, au reste, des plus simples. Si, en effet, les tangentes aux fondamentales (A) et (B) se coupent en T et leurs normales en N, les triangles TAB et Nab, ayant leurs côtés deux à deux perpendiculaires sont semblables, et *les droites* TC *et* Nc, *homologues dans ces triangles semblables, sont également perpendiculaires entre elles.*

3. — On peut aussi chercher à déduire les centres de courbure des courbes du faisceau de ceux des fondamentales. D'après ce qui vient d'être vu, les normales aux courbes décrites par les points c découpent sur la normale à la développée de (M), c'est-à-dire à la perpendiculaire élevée à la normale Mμ de la base par son centre de courbure μ, une ponctuelle de points c' semblable à celle des points c, ce qui permet de déduire des points a' et b' de cette ponctuelle correspondant aux deux fondamentales (A) et (B), celui c' qui correspond à toute autre courbe (C) du faisceau. Si, dès lors, on trouve la relation géométrique liant chacun de ces points a', b', c' au centre de courbure correspondant

α, β, γ de (A), (B), (C), le problème sera entièrement résolu. Cette relation permettra, en effet, de déduire des centres de courbure α et β les points a' et b', puis de c' le centre de courbure γ.

Cherchons cette relation, par exemple pour la courbe (A); elle sera, bien entendu, la même pour (B) et (C).

La normale à la courbe (a) coupant la normale à la développée (μ) de (M) en a' (fig. 1) coupe, en outre, la normale à la déve-

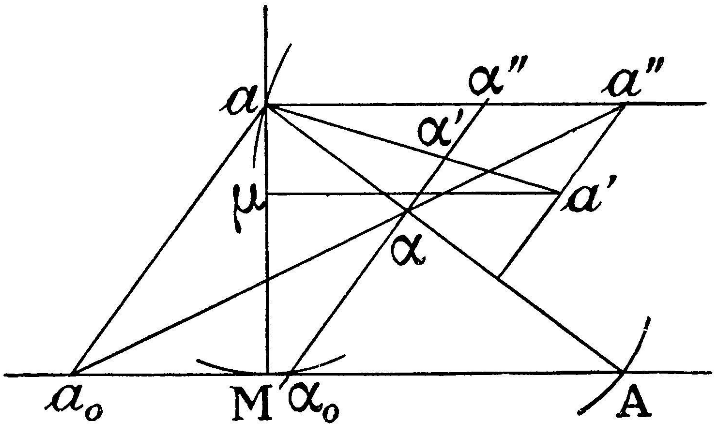

Fig. 1.

loppée (α) de (A) (c'est-à-dire la perpendiculaire menée par α à Aα) en α'. Entre les arcs infiniment petits d (M), d (A), d (a) décrits simultanément par les points M, A, a, on a, en vertu d'une autre formule bien connue de Mannheim,

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{M}\mu}{\mathrm{A}a}\,, \qquad \frac{d(\mathrm{A})}{d(a)} = \frac{\mathrm{A}\alpha}{a\alpha'}\,, \qquad \frac{d(a)}{d(\mathrm{M})} = \frac{aa'}{\mathrm{M}\mu}\,,$$

d'où, par multiplication de ces trois égalités membre à membre,

$$\frac{\mathrm{A}\alpha \cdot aa'}{\mathrm{A}a \cdot a\alpha'} = 1\,,$$

ou

$$\frac{\mathrm{A}\alpha}{\mathrm{A}a} = \frac{a\alpha'}{aa'}\,.$$

Si la droite $\alpha\alpha'$ rencontre AM en α_0 et la parallèle à AM menée par a en α'', si, de plus, les perpendiculaires à Aa menées par a

et a' coupent respectivement AM en a_0 et $a\alpha''$ en a'', l'égalité précédente donne

$$\frac{A\,\alpha_0}{Aa_0} = \frac{a\,\alpha''}{aa''}\,;$$

ce qui montre que *les points* a_0, α *et* a'' *sont en ligne droite*. Si le centre de courbure α est donné, la droite $a_0\,\alpha$ coupe la parallèle menée par a à MA en a'' et la perpendiculaire menée par a'' à Aa coupe la normale à la développée (μ) en a'. Si, au contraire, c'est la normale aa' à (a) qui est donnée, la perpendiculaire menée par a' à Aa donne a'' et la droite $a_0\,a''$ coupe Aa au centre de courbure α.

Cette construction se simplifie sensiblement dans le cas où (A) est une droite, parce que le point α étant alors à l'infini sur Aa, la droite $a_0\,\alpha$ est parallèle à Aa (fig. 2). Elle coupe en a'' la

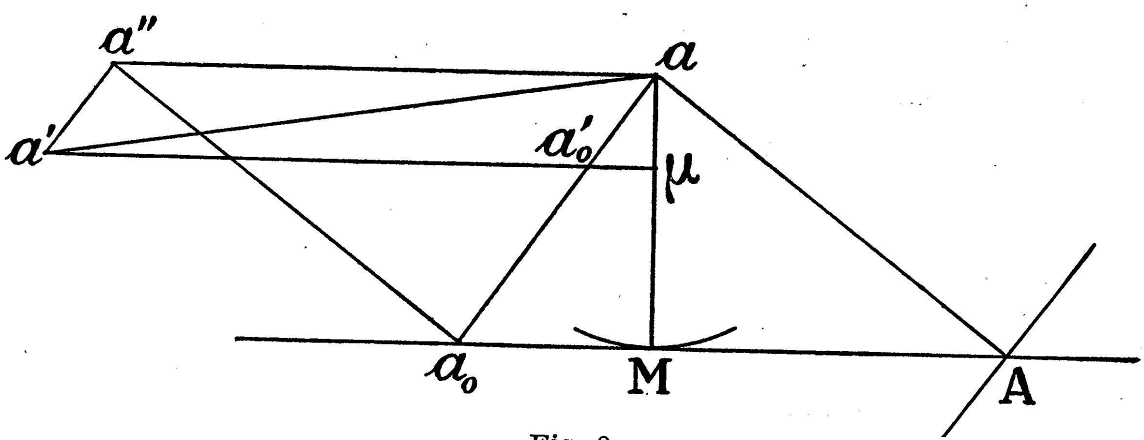

Fig. 2.

parallèle à MA menée par a, et la perpendiculaire menée par a'' à Aa, donc aussi à $a_0\,a''$, coupe en a' la normale en μ à la développée de (M), c'est-à-dire la parallèle à MA menée par μ qui coupe aa_0 en a'_0. Les parallélogrammes A$aa''a_0$ et $aa''a'a'_0$ montrent que $a'_0\,a' =$ Aa_0, ce qui réduit la construction de a', sur la normale à la développée, à porter sur cette normale, à partir de son point de rencontre a'_0 avec aa_0, le segment a'_0a' équipollent à Aa_0.

4. — Avant d'aller plus loin, une remarque accessoire en passant. La construction qui vient d'être obtenue en généralise à la fois deux autres que j'ai précédemment fait connaître et que je vais rappeler:

1° Si AM est constant, auquel cas (M) est une tractrice de (A), les points a et μ se confondent et le point a' devient le centre de courbure de la développée (μ) de (M). Donc, en ce cas, *le centre de courbure* α *de* (A) *est sur la droite joignant* a_0 *au centre de courbure de* (μ).

2° Si M se réduit à un point, auquel cas a est l'extrémité de la normale polaire de (A) pour le pôle M, les points M et μ se confondent; le point a' est donc sur MA et la figure $aa_0a'a''$ est un parallélogramme. Dès lors, *le centre de courbure* α *est sur la diagonale* $a_0 a''$ *de ce parallélogramme.*

Il va sans dire que chacun de ces deux théorèmes particuliers permet, comme le théorème général, de déduire le centre de courbure α de (A) de la normale aa' à (a), et *vice-versa.* C'est ainsi, notamment, que nous avons utilisé le second pour construire les centres de courbure des *polaires généralisées* [1].

Revenons maintenant aux faisceaux homoponctuels.

5. — Il est facile de former les équations sur lesquelles repose la détermination d'un tel faisceau.

Si l'on appelle (X, Y), (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x, y) les coordonnées des points M, A, B, C, les données sont l'équation de la base (M)

$$F(X, Y) = 0 , \tag{1}$$

et celles des fondamentales (A) et (B)

$$f_0(x_0, y_0) = 0 , \qquad f_1(x_1, y_1) = 0 . \tag{2}$$

L'alignement des points A, B, C sur la tangente en M s'exprime par

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y - y}{X - x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - y_1}{x - x_1} . \tag{3}$$

Enfin la condition CA $= k$. CB se traduit par

$$x - x_0 = kx . \tag{4}$$

L'élimination de X, Y, x_0, y_0, x_1, y_1 entre ces sept équations fera connaître l'équation en x et y de (C) pour la valeur choisie de l'indice k.

[1] *Enseignement mathématique*, t. 31 (1932), p. 34.

6. — Le problème se simplifie notablement lorsque les fondamentales (A) et (B) se réduisent à des droites. Si, en effet, on prend alors ces droites pour axes Ox et Oy, les équations (2) deviennent

$$y_0 = 0 \,, \qquad x_1 = 0 \,,$$

et les équations (3),

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y - y}{X - x} = \frac{y}{x - x_0} = \frac{y - y_1}{x} \,.$$

De là, en tenant compte de (4), on déduit

$$\frac{dY}{dX} = \frac{y}{kx} \,, \tag{5}$$

équation qui permet à son tour, par élimination de y, de transformer la première des équations (3) en

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{(k-1)x + X} \,. \tag{6}$$

Tout se réduit alors à éliminer X et Y entre (1), (5) et (6).

Tirant d'ailleurs $\frac{dY}{dX}$ de l'équation (1) différentiée, on met les deux dernières sous la forme

$$kxF'_X + yF'_Y = 0 \,, \tag{5'}$$

$$(k-1)xF'_X + XF'_X + YF'_Y = 0 \,, \tag{6'}$$

ou, si F est un polynome en X et Y, rendu homogène au moyen de la variable t,

$$(k-1)xF'_X - F'_t = 0 \,. \tag{6''}$$

7. — A titre d'application, prenons comme base (M) une hyperbole d'asymptotes Ox et Oy, c'est-à-dire d'équation

$$XY - \lambda^2 = 0 \,. \tag{7}$$

Ici,

$$F'_X = Y \,, \qquad F'_Y = X \,, \qquad F'_t = -2\lambda^2 \,.$$

Les équations (5′) et (6″) sont alors

$$kxY + yX = 0 ,$$
$$(k - 1)xY + 2\lambda^2 = 0 ,$$

d'où

$$X = \frac{2k\lambda^2}{(k-1)y} , \qquad Y = \frac{-2\lambda^2}{(k-1)x} .$$

Ces valeurs portées dans (7) donnent

$$xy + \frac{4k}{(k-1)^2}\lambda^2 = 0 . \tag{8}$$

Cette équation définit le faisceau de toutes les hyperboles d'asymptotes Ox et Oy, y compris ce couple d'asymptotes pour $k = 0$, et l'hyperbole de base pour $k = -1$, ce qui montre que *ce faisceau d'hyperboles est autoponctuel.*

Si l'on met l'équation (8) sous la forme

$$xy - \lambda'^2 = 0 ,$$

on a

$$\lambda'^2 = -\frac{4k}{(k-1)^2}\lambda^2 . \tag{9}$$

Cette équation, que l'on peut écrire

$$\lambda'^2 k^2 - 2(\lambda'^2 - 2\lambda^2)k + \lambda'^2 = 0 \tag{9'}$$

fait connaître k si λ' est donné. Elle donne deux valeurs k_1 et k_2 de k parce qu'en effet l'hyperbole (λ') rencontre chaque tangente à l'hyperbole de base (λ) en deux points C_1 et C_2. L'équation (9′) montre que $k_1 k_2 = 1$, c'est-à-dire que

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{C_2A}{C_2B} = 1$$

ou

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_2B}{C_2A} ,$$

ce qui entraîne la conséquence que les segments AB et $C_1 C_2$ ont même milieu, ainsi qu'il est bien connu.

Si, inversement, on prend pour base du faisceau l'hyperbole

(λ'), l'hyperbole (λ) a un indice k'. La relation liant k et k' est ce qu'on peut appeler l'*équation aux indices réciproques* du faisceau. Il est facile de la former. La formule (9) appliquée au second cas donne, en effet,

$$\lambda^2 = -\frac{4k'}{(k'-1)^2}\lambda'^2 ,$$

et, si l'on divise (9) par cette dernière équation, on obtient

$$(k-1)^2(k'-1)^2 - 16kk' = 0 \tag{10}$$

qui est l'équation aux indices réciproques cherchée.

8. — Prenons maintenant comme base (M) une parabole de diamètre ox, tangente en O à Oy, c'est-à-dire d'équation

$$Y^2 - 2\lambda X = 0 , \tag{11}$$

λ étant le paramètre de la parabole quand les axes sont rectangulaires.

Ici,

$$F'_X = -2\lambda , \qquad F'_Y = 2Y , \qquad F'_t = -2\lambda X .$$

Les équations (5′) et (6″) sont alors

$$\lambda kx - Yy = 0 ,$$
$$(k-1)x - X = 0 ,$$

d'où

$$X = (k-1)x , \qquad Y = \frac{\lambda kx}{y} .$$

Portées dans (11) ces valeurs donnent

$$y^2 - \frac{\lambda k^2}{2(k-1)}x = 0 . \tag{12}$$

Cette équation définit le faisceau de toutes les paraboles de diamètre Ox, tangentes en O à Oy, y compris la parabole de base pour $k = 2$. *Ce faisceau de paraboles est donc, lui aussi, autoponctuel.*

Si l'on met l'équation (12) sous la forme

$$y^2 - 2\lambda' x = 0 ,$$

on a

$$\lambda' = \frac{\lambda k^2}{4(k-1)} \tag{13}$$

ou

$$\lambda k^2 - 4\lambda' k + 4\lambda' = 0 . \tag{13'}$$

Les deux racines k_1 et k_2 de cette équation correspondent aux deux points de rencontre C_1 et C_2 de la parabole (λ') avec la tangente à la parabole de base (λ). L'équation (13') montre d'ailleurs que

$$k_1 + k_2 = k_1 k_2 ,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 1 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{C_1 B}{C_1 A} + \frac{C_2 B}{C_2 A} = 1 .$$

Comme au n° précédent, on forme aisément l'équation aux indices réciproques qui est ici

$$k^2 k'^2 - 16(k-1)(k'-1) = 0 . \tag{14}$$

On peut remarquer l'analogie de forme de (10) et (14) qui diffèrent l'une de l'autre par la simple permutation du produit des indices et du produit de leurs compléments à l'unité [car le produit $(k-1)(k'-1)$ équivaut à $(1-k)(1-k')$].

9. — On peut se demander s'il existe des faisceaux autoponctuels de coniques, autres que ceux qui ont été trouvés aux n^{os} 7 et 8.

Remarquons tout d'abord que, tout faisceau de coniques comprenant trois couples de droites, dont un au moins nécessairement réel, on peut toujours adopter les droites de ce couple comme fondamentales et les prendre pour axes Ox et Oy. Nous sommes ainsi amenés à rechercher le système autoponctuel le plus général admettant ces axes pour fondamentales.

La base (M) du faisceau devant, puisqu'il est autoponctuel, faire partie de ce faisceau, il faut, si la tangente en M à cette base coupe Ox et Oy en A et B, que

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k \, ,$$

ce qui se traduit par

$$y = kx\frac{dy}{dx} \, ,$$

équation différentielle où les variables sont immédiatement séparées, et dont l'intégrale peut être écrite

$$x = \lambda^{1-k} y^k \, , \tag{15}$$

la forme donnée à la constante arbitraire répondant à une raison d'homogénéité.

Cette équation ne peut donner une conique que dans les deux seuls cas où l'on prend soit $k = -1$, soit $k = 2$, auxquels correspondent respectivement les faisceaux trouvés aux nos 7 et 8. *Il n'existe donc aucun faisceau autoponctuel de coniques en dehors de ces deux-ci :*

1° *Hyperboles de mêmes asymptotes ;*

2° *Paraboles de même direction axiale, toutes tangentes entre elles en un même point.*