Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE RATIONNELLE DU PROBLÈME DE LA TRISECTION DE L'ANGLE

Autor: d'Ocagne

Kapitel: Troisième solution normale (a écart ouvert).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25987

le tableau des valeurs de ε pour ω variant de 12 en 12°, de 0 à 90°. Voici ce tableau:

ω	ε	ω	ε	ω	ε
0° . . .	0	36° . . .	4″,23	72° . . .	14″,76
12° . . .	0″,18	48° . . .	8″,58	84° . . .	8″,47
24° . . .	1″,38	60° . . .	13″,08	90° . . .	0

Au surplus le maximum de ε, qui a lieu pour $\omega = 69° 57' 40''$, a pour valeur 14″,912.

Cette étonnante précision montre que la solution de M. Kopf est incontestablement celle qui serre de plus près la solution rigoureuse non réalisable, au point même que, non en théorie sans doute, mais en fait, elle peut en être prise pour l'équivalent.

Redisons en quoi elle consiste: I *étant le milieu de* OO′ *et* IC″ *égal à* $\frac{\mathrm{IH}}{3}$, *si la droite* O′B *coupe en* B″ *le cercle de centre* C″ *et de rayon* C″A, *la droite* O″B″ *est, sans aucune erreur appréciable, parallèle à la trisectrice de l'angle* AOB.

Mais, quel que soit le très grand intérêt théorique de cette curieuse solution normale, on peut en imaginer d'autres plus simples qui, sans aboutir à d'aussi minimes écarts, n'en comportent pourtant que de pratiquement négligeables. A ce point de vue, la solution suivante semble mériter une mention spéciale.

Troisième solution normale (a écart ouvert).

12. — Rappelons tout d'abord qu'une solution normale est à écart ouvert si l'écart ε entre l'angle θ construit et $\frac{\omega}{3}$ croît constamment avec ω variant de 0 à 90°. Si la valeur atteinte par ε pour $\omega = 90°$ est acceptable, la solution est entièrement valable. Sans qu'il en soit ainsi, ε peut atteindre une limite acceptable pour une valeur λ de ω comprise entre 45 et 90°; si d'ailleurs il n'en était pas ainsi, la solution serait à rejeter. Supposons donc que λ satisfasse à la condition requise; alors, lorsque ω est supérieur à λ, il suffit de trisecter le complément de ω, qui est, lui, inférieur à λ, et de retrancher le tiers obtenu de l'angle de 30°, construit rigoureusement.

13. — Tirons maintenant par le milieu M de l'arc AB (donné par la parallèle OM à O′B) la parallèle à la trisectrice de l'angle AOB. Elle a pour équation, si l'origine est, cette fois, prise en O,

$$\left(y - \sin\frac{\omega}{2}\right)\cos\frac{\omega}{3} = \left(x - \cos\frac{\omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{3} .$$

L'abscisse de son point de rencontre avec Ox, pour $y = 0$, est donnée par

$$x = -\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3}\right)}{\sin\frac{\omega}{3}} = -\frac{\sin\frac{\omega}{6}}{2\sin\frac{\omega}{6}\cos\frac{\omega}{6}} = -\frac{1}{2\cos\frac{\omega}{6}} .$$

L'angle $\frac{\omega}{6}$ étant au plus égal à 15°, son cosinus diffère peu de l'unité et cette abscisse n'est que de peu supérieure en valeur absolue à $\frac{1}{2}$. De façon plus précise, le point obtenu sur Ox n'est, au-delà du milieu I de OO′ (dans le sens de O vers O′), qu'à une distance δ de ce milieu I donnée par

$$\delta = \frac{1 - \cos\frac{\omega}{6}}{\cos\frac{\omega}{6}} .$$

Le plus grande valeur, pour $\frac{\omega}{6} = 15°$, est

$$\delta = 0{,}01765 ,$$

grandeur pratiquement négligeable. Si l'on prend, dès lors, pour direction de la trisectrice celle de la droite IM, le tiers d'angle approché θ ainsi construit sera donné par

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{1}{2} + \cos\frac{\omega}{2}} = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{2\cos\left(30° + \frac{\omega}{4}\right)\cos\left(30° - \frac{\omega}{4}\right)} .$$

Pour $\omega = 90°$, cette formule donne $\theta = 30°\,21'\,41''$, donc un écart de $21'\,41''$ qui ne dépasse le tiers de degré, c'est-à-dire les $20'$, que de $1'\,41''$, quantité négligeable. Or, le tiers de degré constitue, pour la pratique ordinaire du dessin, un écart parfaitement admissible. En tout cas, pour $\omega = 60°$, l'écart n'est plus que de $6' \, 14''$, environ le dixième de degré, grandeur absolument négligeable; on est donc assuré d'avoir par ce moyen toute la précision désirable en prenant pour la limite λ définie au n° 12 la valeur 60°. Si même on admet pour λ la valeur 45°, l'écart correspondant tombe à $10''$, ce qui équivaut à une précision de même ordre que celle donnée par le procédé Kopf.

Finalement, on peut dire qu'avec une précision suffisante jusqu'à 90° et pleinement satisfaisante jusqu'à 60°, *la droite joignant le milieu* I *du rayon* OO′ *au milieu* M *de l'arc* AB *est parallèle à la trisectrice de l'angle* AOB.

Il ne semble pas possible de pousser plus loin la simplicité de la constrution.

LES FAISCEAUX HOMOPONCTUELS DE COURBES PLANES

PAR

M. D'OCAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

---

1. — Cette note a pour but d'attirer l'attention sur une notion qui ne semble pas avoir encore été envisagée et qui peut donner lieu à des exercices non dénués d'intérêt.

Si les courbes d'un certain faisceau (système simplement infini) découpent sur toutes les tangentes d'une courbe (M) des ponctuelles semblables entre elles, nous dirons que ce faisceau est *homoponctuel* pour la courbe (M) appelée sa *base.* Si ce faisceau est homoponctuel pour chacune des courbes qui le composent, prise pour base, nous le qualifierons, par raison de simplicité, d'*autoponctuel*, alors que le terme *d'autohomoponctuel* eût sans doute été plus rationnel.