

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	33 (1934)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 ÉTUDE RATIONNELLE DU PROBLÈME DE LA TRISECTION DE L'ANGLE
<b>Autor:</b>	d'Ocagne
<b>Kapitel:</b>	PREMIERE SOLUTION NORMALE (A ÉCART FERMÉ).
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-25987">https://doi.org/10.5169/seals-25987</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

telle sorte que  $CD = r$ , est parallèle à la trisectrice cherchée. En effet, les triangles OBC et COD étant isocèles, on a les égalités d'angles  $\text{AOB} = \text{OBD} + \text{ODB}$ , et  $\text{OBD} = \text{OCB} = 2\text{ODB}$ , d'où  $\text{AOB} = 3\text{ODB}$ .

J'ai, pour ma part, fait connaître<sup>1</sup> une propriété fort simple se traduisant par une autre construction anormale: *si la trisectrice issue de O coupe en E la corde AB du cercle et en F le cercle de centre A et de rayon AO, on a EF = OA*. En effet, si l'on pose  $\text{AOB} = \omega$ , les angles AOF et AFO sont égaux à  $\frac{\omega}{3}$ , OAB et OBA à  $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$ , on en déduit que  $\text{OAF} = \pi - \frac{2\omega}{3}$ , puis que  $\text{EAF} = \text{OAF} - \text{OAB} = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$  et que  $\text{AEF} = \pi - \text{EOB} - \text{OBA} = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$ ; donc  $\text{EAF} = \text{AEF}$ ; par suite, le triangle FAE est isocèle et  $EF = AF = r$ .

Mais les solutions les plus intéressantes, au point de vue du tracé, sont les solutions normales; nous allons en examiner ici quelques-unes particulièrement dignes de remarque.

4. — Rappelons tout d'abord qu'il n'est ici question que d'angles  $\omega$  compris entre 0 et  $90^\circ$ . Toute construction normale appliquée à un tel angle fournit un angle  $\theta$  présentant par rapport à  $\frac{\omega}{3}$  un certain écart  $\varepsilon$ , d'ailleurs supposé négligeable, mais qui peut se déterminer mathématiquement et dont la considération conduit à une nouvelle distinction à observer parmi ces solutions normales: suivant que, pour  $\omega$  variant de 0 à  $90^\circ$ ,  $\varepsilon$  croît constamment à partir de 0 jusqu'à une certaine valeur  $\mathcal{E}$ , ou s'annule pour  $\omega = 0$  et  $\omega = 90^\circ$ , en présentant un maximum dans l'intervalle, la solution est dite à *écart ouvert jusqu'à  $\mathcal{E}$* , ou à *écart fermé*. Notre attention va d'abord se porter sur deux solutions à écart fermé, puis sur une troisième à écart ouvert.

#### PREMIÈRE SOLUTION NORMALE (A ÉCART FERMÉ).

5. — Marquons sur l'axe Ox les points  $O''$ ,  $O'$  et  $A$  tels qu'en suivant le sens positif on ait  $O''O' = O'O = OA = 1$ , les

<sup>1</sup> *Revue générale des sciences*, t. XLIV, p. 625; 1933.

perpendiculaires à  $Ox$  menées par ces points étant dénotées  $O''y, O'y, Oy, Ay$  (comme si  $y$  désignait le point à l' $\infty$  dans la direction perpendiculaire à  $Ox$ ), et menons par les points  $O, O', O''$  les droites  $OB, O'B, O''B_1 B_2$  (qui coupe  $OB$  en  $B_1$  et  $O'B$  en  $B_2$ )<sup>1</sup> faisant respectivement avec  $Ox$  les angles  $\omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}$ .

Le lieu du point  $B$  est, bien entendu, le cercle  $\Gamma$  de centre  $O$ , de diamètre  $O'A$ . Cherchons le lieu du point  $B_1$ .

Si nous plaçons l'origine en  $O''$ , les droites  $OB_1$  et  $O''B_1$  ont respectivement pour équations

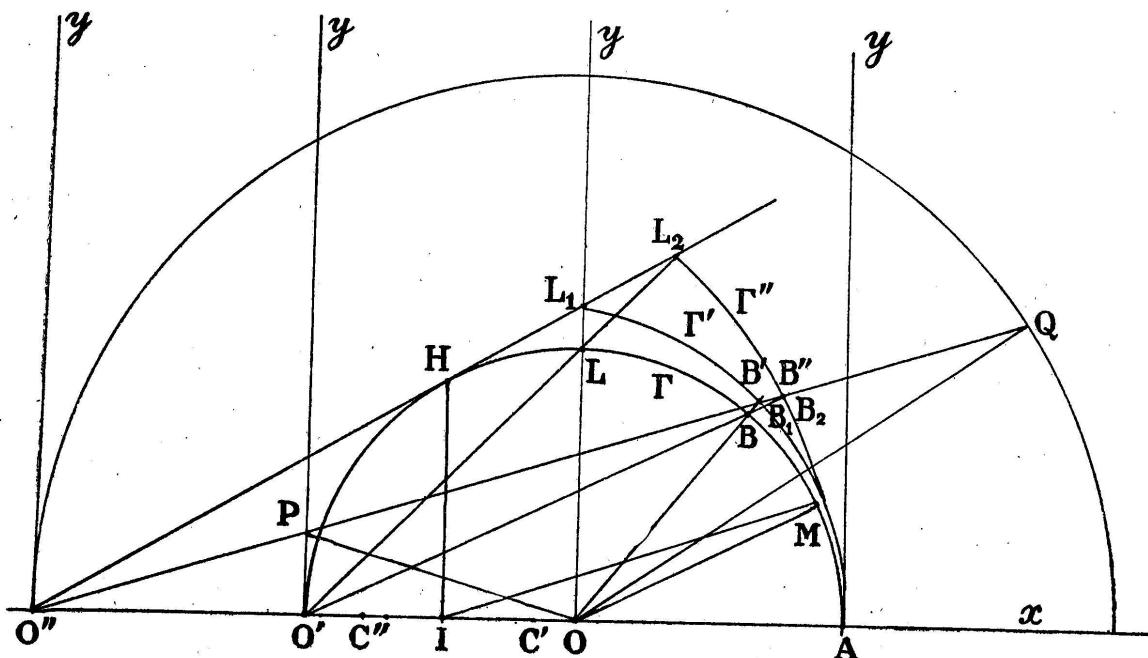
$$y = (x - 2) \operatorname{tg} \omega \quad \text{et} \quad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3}.$$

Comme on sait que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} - \operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{3}},$$

il en résulte, par élimination de  $\omega$ , pour le lieu cherché, l'équation

$$x(x^2 + y^2) - 3x^2 + y^2 = 0, \quad (1)$$



<sup>1</sup> Les points  $B_1$  et  $B_2$  dont il est ici question se confondent, à un écart tout à fait insensible près, avec les points désignés sur la figure par  $B'$  et  $B''$ , qui seront définis plus loin.

cubique circulaire  $\Gamma_1$  bien connue, dite *trisectrice de Maclaurin*. Symétrique par rapport à  $Ox$ , elle se compose d'une boucle tangente en  $A$  à  $Ay$ , ayant en  $O''$  un point double où les tangentes sont inclinées à  $60^\circ$  sur  $Ox$ , et se prolongeant au-delà par deux branches infinies ayant pour asymptote commune la droite symétrique de  $O'y$  par rapport à  $O''$ .

6. — Avant d'aller plus loin faisons voir très simplement que cette cubique  $\Gamma_1$  est une *cissoïdale*, ce terme désignant une courbe dont, pour un certain pôle, le vecteur est la somme algébrique des vecteurs d'une droite et d'un cercle, ou la différence algébrique de ces vecteurs (ce cas se ramenant immédiatement au précédent si l'on prend la symétrique par rapport au pôle, soit de la droite, soit du cercle intervenant dans la définition).

Pour démontrer la propriété en question, il suffit de remarquer que, puisque par définition  $B_1OA = 3B_1O''A$ , on a  $O''B_1O = 2B_1O''A$ . Mais si  $O''B_1$  coupe  $O'y$  en  $P$ , le triangle  $POO''$  étant isocèle, on a aussi  $OPB_1 = 2B_1O''A$ , d'où résulte que le triangle  $OPB_1$  est isocèle comme ayant ses angles à la base égaux. Si maintenant  $O''B_1$  coupe en  $Q$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OO''$ , le triangle  $OO''Q$  est également isocèle; il s'ensuit que  $O''P = B_1Q$  et que  $O''B_1 = O''Q - O''P$ , ce qui montre que *la cubique  $\Gamma_1$  est une cissoïdale pour la droite  $O'y$  et le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OO''$* .

7. — Mais, puisque nous nous bornons aux seuls angles inférieurs à  $90^\circ$ , nous n'avons à considérer que l'arc de  $\Gamma_1$  allant du point  $A$  au point  $L_1$  où  $Oy$  est coupé par la droite issue de  $O''$  inclinée à  $30^\circ$  sur  $O''x$ , qui n'est autre que la tangente  $O''H$  au cercle  $\Gamma$ .

Si on effectue (notamment par le procédé résultant de la dernière propriété indiquée) le tracé de cet arc  $AL_1$ , on ne peut manquer d'être frappé de son analogie d'aspect avec un arc de cercle, ce qui conduit à comparer cet arc de la cubique  $\Gamma_1$  avec l'arc de cercle  $\Gamma'$  qui, partant du point  $A$  tangentiellement à  $Ay$ , aboutit au point  $L_1$ .

Si l'on prend encore  $O''$  comme origine des coordonnées, on a, pour le point  $A$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ , pour le point  $L_1$ ,  $x = 2$ ,  $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,

et, si on appelle  $\alpha$  l'abscisse du centre  $C'$  de  $\Gamma'$ , l'équation de ce cercle s'écrit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 6\alpha - 9 = 0 . \quad (2)$$

Il suffit d'exprimer que cette équation est satisfaite par les coordonnées de  $L_1$  pour en tirer  $\alpha = \frac{11}{6}$ , ce qui donne pour le rayon du cercle

$$r = 3 - \alpha = \frac{7}{6} , \quad (3)$$

d'où résulte que

$$C'O = \frac{O'O}{6} {}^1 .$$

Finalement, le cercle  $\Gamma'$  a pour équation

$$3x^2 + 3y^2 - 11x + 6 = 0 . \quad (4)$$

Si l'on représente par  $f$  le premier membre de cette équation, la pente de la tangente en tout point de  $\Gamma'$  est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{6x - 11}{6y} .$$

Elle prend, au point  $L_1$ , la valeur

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sqrt{3}}{12} . \quad (5)$$

Comparons aux valeurs (4) et (5) de  $r$  et  $\frac{dy}{dx}$ , celles des mêmes éléments ( $r$  désignant alors le rayon de courbure) pour la cubique  $\Gamma_1$  aux mêmes points  $A$  et  $L_1$ .

L'équation (1) de cette cubique donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 6x , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x + 1) , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x + 1) ,$$

et comme, en  $A$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , il vient, pour la valeur

<sup>1</sup> Il est clair, puisque le segment  $O'O$  pris comme unité de longueur est arbitraire, que l'on pourra prendre pour sa mesure un nombre de millimètres multiple de 6, par exemple 30 mm., ce qui donnera  $C'O = 5$  mm.

absolue de  $r$  en ce point,

$$r = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{8} . \quad (6)$$

Quant à la pente en  $L_1$ , elle est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2 - 6x}{2y(x+1)} = -\frac{\sqrt{3}}{9} . \quad (7)$$

La différence des  $r$ , évalués en (3) et (6), est donc égale à  $\frac{7}{6} - \frac{9}{8}$ , ou  $\frac{2}{48} = 0,041$ ; celle des pentes, évaluées en (5) et (7), à  $-\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{9}$  ou  $\frac{\sqrt{3}}{36} = 0,048$ . Si petites sont ces différences que l'on peut en conclure que, de  $A$  en  $L_1$ , l'arc du cercle  $\Gamma'$ , partout extérieur à l'arc de la cubique  $\Gamma_1$ , est tout près de se confondre avec lui. On pourra donc, sans grande erreur, substituer le premier au second, et, au lieu de prendre le point de rencontre  $B_1$  de  $OB$  et de  $\Gamma_1$ , prendre celui  $B'$  de  $OB$  et de  $\Gamma'$ , pour le joindre à  $O''$  en vue de déterminer la direction de la trisectrice cherchée.

8. — Pour mieux se rendre compte du degré de précision ainsi obtenu, on peut calculer la valeur exacte de l'angle  $B'O''A = \theta$ , ainsi construit, et la comparer à celle de  $\frac{\omega}{3}$ . Si l'on pose  $\operatorname{tg} \omega = t$ , l'équation de  $OB$ , toujours avec l'origine en  $O''$ , est

$$y = t(x - 2) . \quad (8)$$

Remplaçant  $y$  par cette valeur dans l'équation (4) de  $\Gamma'$ , on a

$$3(1 + t^2)x^2 - (12t^2 + 11)x + 12t^2 + 6 = 0 .$$

Le point  $B'$  étant celui des points de rencontre de  $OB$  et de  $\Gamma'$  qui a la plus grande abscisse, il faut, dans l'expression tirée de là pour  $x$ , prendre le radical avec le signe  $+$ , ce qui donne

$$x = \frac{12t^2 + 11 + \sqrt{48t^2 + 49}}{6(1 + t^2)} . \quad (9)$$

Remarquons en passant que, si l'on pose  $6(1 + t^2) = u$ , on peut mettre cette formule sous la forme plus simple

$$x = \frac{2u - 1 + \sqrt{8u + 1}}{u} . \quad (9 \text{ bis})$$

Ayant calculé  $x$  et  $y$  par (9) et (8), on en tire

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} ,$$

et, par suite,  $\theta$ .

Faisons ce calcul pour  $\omega = 45^\circ$ , valeur moyenne entre les limites  $0$  et  $90^\circ$ . Ici,  $t = 1$ , et l'on trouve

$$x = 2,737 , \quad y = 0,737 ,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0,737}{2,737} \quad \text{et} \quad \theta = 15^\circ 4' 15'' .$$

Par suite,

$$\epsilon = \theta - \frac{\omega}{3} = 4' 15'' .$$

Cet écart est inférieur à  $6'$ , le dixième de degré, que l'on peut regarder comme l'extrême limite de la précision qui puisse être atteinte dans le dessin, qui même, sans doute, ne l'est effectivement jamais; on est donc en droit de le tenir pour strictement négligeable. Ainsi se trouve justifiée la construction normale, non encore proposée, semble-t-il, qui peut s'énoncer ainsi:

*Si  $OC' = \frac{AO}{6}$  et  $OO'' = 2AO$ , et que l'on trace le cercle  $\Gamma'$  de centre  $C'$  et de rayon  $C'A$ , la droite joignant  $O''$  au point de rencontre  $B'$  de  $OB$  et de  $\Gamma'$  est parallèle à la trisectrice de l'angle  $AOB$ .*

#### DEUXIÈME SOLUTION NORMALE (A ÉCART FERMÉ).

9. — Cherchons maintenant le lieu du point  $B_2$  d'intersection des droites  $O'B$  et  $O''B_1$ , respectivement inclinées à  $\frac{\omega}{2}$  et  $\frac{\omega}{3}$  sur  $Ox$ , dont les équations sont

$$y = (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad \text{et} \quad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} .$$