Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1934)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DEUX THÉORÈMES REMARQUABLES DE STEWART

Autor: Toscano, Letterio

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26002

DEUX THÉORÈMES REMARQUABLES DE STEWART

PAR

Letterio Toscano (Messine).

---

1. — Dans l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* (troisième édition conforme à la première, Paris, Gauthier-Villars, 1889), Chasles s'exprime ainsi à propos des œuvres de Stewart (p. 174-175):

« Le livre des *Théorèmes généraux* contient soixante-quatre propositions, dont cinquante seulement ont le titre de théorèmes; des quatorze autres, trois sont au commencement de l'ouvrage et servent pour les démonstrations des théorèmes, et les onze autres le terminent; celles-ci sont, pour la plupart, des propriétés du cercle.

« Des soixante-quatre propositions, les huit premières seulement sont démontrées; on y trouve les cinq premiers théorèmes. L'auteur annonce, dans une courte préface, que, pour démontrer tant de théorèmes si généraux et de si grande difficulté, il lui aurait fallu plus de temps qu'il ne pouvait en consacrer à ce travail.

« Je ne sais si, dans la suite, Stewart a restitué les démonstrations de ses théorèmes, ou si on les a trouvées dans ses papiers, et quel usage on en a fait. »

D'après ce texte, nous ne concluons pas à l'existence de démonstrations ultérieures de ces théorèmes, qui ne furent qu'énoncés et sont maintenant presque oubliés.

Cependant, dans cette note, nous nous proposons de démontrer les propositions 40 et 42 de l'œuvre de Stewart, qui sont les plus générales et qui en contiennent beaucoup d'autres comme cas particuliers.

2. — Pour démontrer nos théorèmes, nous calculons d'abord la somme des puissances semblables des racines pour une équation fondamentale de la polygonométrie.

On connaît l'équation de Waring

$$x^m - \frac{m}{1}\binom{m-2}{0}\rho^{\frac{2}{m}}x^{m-2} + \frac{m}{2}\binom{m-3}{1}\rho^{\frac{4}{m}}x^{m-4} - \frac{m}{3}\binom{m-4}{2}\rho^{\frac{6}{m}}x^{m-6} + \dots$$

$$\dots + (-1)^r\frac{m}{r}\binom{m-r-1}{r-1}\rho^{\frac{2r}{m}}x^{m-2r} + \dots - 2\rho\cos\varphi = 0 ,$$

qui admet les racines

$$x_k = 2\rho^{\frac{1}{m}}\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, (m-1) .$$

En posant $\rho = \frac{1}{2^m}$ nous avons l'équation

$$2^m x^m - \frac{m}{1}2^{m-2}\binom{m-2}{0}x^{m-2}$$

$$+ \frac{m}{2}2^{m-4}\binom{m-3}{1}x^{m-4} - \frac{m}{3}2^{m-6}\binom{m-4}{2}x^{m-6} + \dots$$

$$\dots + (-1)^r\frac{m}{r}2^{m-2r}\binom{m-r-1}{r-1}x^{m-2r} + \dots - 2\cos\varphi = 0 ,$$

qui admet les racines

$$x_k = \cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2k\pi}{m}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, (m-1) .$$

Calculons, pour cette seconde équation, la somme

$$S_i = x_0^i + x_1^i + x_2^i + \dots + x_{m-1}^i , \qquad (i < m) .$$

Par l'application de la formule de Newton, nous avons

$$S_1 = 0 ; \qquad S_2 - 2\frac{m}{2^2} = 0 , \qquad \text{d'où} \qquad S_2 = \frac{1}{2}m , \qquad S_3 = 0 .$$

$$S_4 - \frac{1}{2^2}\frac{m}{1}S_2 + 4\frac{1}{2^4}\frac{m}{2}\binom{m-3}{1} = 0 , \quad \text{d'où} \quad S_4 = \frac{1.3}{2.4}m ; \quad S_5 = 0 ;$$

$$S_6 - \frac{1}{2^2}\frac{m}{1}S_4 + \frac{1}{2^4}\frac{m}{2}\binom{m-3}{1}S_2 - 6\frac{1}{2^6}\frac{m}{3}\binom{m-4}{2} = 0 ,$$

d'où

$$S_6 = \frac{1.3.5}{2.4.6} m \; ; \qquad S_7 = 0 \; ;$$

$$S_8 - \frac{1}{2^2}\frac{m}{1} S_6 + \frac{1}{2^4}\frac{m}{2}\binom{m-3}{1} S_4 - \frac{1}{2^6}\frac{m}{3}\binom{m-4}{2} S_2 + 8\frac{1}{2^8}\frac{m}{4}\binom{m-5}{3} = 0 \, ,$$

d'où

$$S_8 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} m \, .$$

En général, les relations

$$S_{2k-1} = 0 \, , \qquad S_{2k} = \frac{1.3 \ldots (2k-1)}{2.4 \ldots 2k} m \, ,$$

étant vérifiés pour une valeur de k, pourront, par la méthode d'induction, se démontrer pour $k+1$.

Sans donner la démonstration, nous admettons ces formules pour le cas général, tant que $2k < m$.

Proposition 40 de Stewart. — Soit un polygone régulier de m côtés, circonscrit à un cercle de rayon R; soit n un nombre quelconque plus petit que m. Si, d'un point quelconque (pris à l'intérieur du polygone si n est impair, et pris partout où l'on voudra si n est pair), on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du polygone: la somme des puissances n de ces perpendiculaires sera égale à

$$m(R^n + A\nu^2 R^{n-2} + B\nu^4 R^{n-4} + C\nu^6 R^{n-6} + \ldots) \, ,$$

où ν est la distance du point au centre du cercle et où l'on a

$$A = \frac{1}{2}\binom{n}{2}, \qquad B = \frac{1.3}{2.4}\binom{n}{4}, \qquad C = \frac{1.3.5}{2.4.6}\binom{n}{6}, \ldots$$

Démonstration. — Etant donné un polygone régulier de m côtés, soient O et R le centre et le rayon du cercle inscrit et soit $\mathfrak{T}$ un point quelconque intérieur au polygone; soit ν la distance de $\mathfrak{T}$ au centre O.

Désignant par α le plus petit des angles que forme $O\mathfrak{T}$ avec les apothèmes et par $d_1, d_2, \ldots, d_m$, les distances de $\mathfrak{P}$ aux côtés du polygone, on a

$$\begin{aligned}
d_1 &= \mathrm{R} - \nu \cos \alpha \\
d_2 &= \mathrm{R} - \nu \cos \left(\frac{2\pi}{m} - \alpha\right) \\
d_3 &= \mathrm{R} - \nu \cos \left(\frac{4\pi}{m} - \alpha\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_k &= \mathrm{R} - \nu \cos \left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_m &= \mathrm{R} - \nu \cos \left(\frac{2(m-1)\pi}{2} - \alpha\right).
\end{aligned}$$

Si le point $\mathfrak{P}$ est extérieur au polygone, il faut remplacer dans les formules précédentes certains d_k par $-d_k$.

Alors, pour n quelconque si $\mathfrak{P}$ est intérieur au polygone, et n pair si $\mathfrak{P}$ est extérieur au polygone, on a

$$d_k^n = \left\{ \mathrm{R} - \nu \cos \left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right) \right\}^n,$$

c'est-à-dire

$$d_k^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \mathrm{R}^{n-i} \nu^i \cos^i \left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right).$$

En effectuant la somme par rapport à l'indice k, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} = d_1^n + d_2^n + \ldots + d_m^n &= \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \mathrm{R}^{n-i} \nu^i \cos^i \left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \mathrm{R}^{n-i} \nu^i \sum_{k=1}^{k=m} \cos^i \left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right).
\end{aligned}$$

Mais au n°2 nous avons trouvé que

$$\sum_{k=1}^{k=m} \cos^i \left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right)$$

est égal à zéro si i est impair, et égal à $\frac{1.3 \ldots (i-1)}{2.4 \ldots i} m$ si i est pair; donc en posant $i = 2j$, on a finalement

$$S = m \sum_{j=0}^{j=\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1.3 \ldots (2j-1)}{2.4 \ldots 2j} \binom{n}{2j} R^{n-2j} \nu^{2j} ,$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ étant la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Proposition 42 de Stewart. — Soit un polygone régulier de m côtés, inscrit dans un cercle de rayon R; et soit n un nombre entier plus petit que m. Si l'on prend arbitrairement un point du plan du polygone dont la distance au centre du cercle soit ν, la somme des puissances $2n$ des distances de ce point à tous les sommets du polygone sera égale à

$$m(R^{2n} + a^2 \nu^2 R^{2n-2} + b^2 \nu^4 R^{2n-4} + c^2 \nu^6 R^{2n-6} + \ldots) ,$$

où

$$a = \binom{n}{1}, \quad b = \binom{n}{2}, \quad c = \binom{n}{3}, \ldots$$

Démonstration. — Etant donné un polygone régulier de m côtés, soient O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit et soit $\mathfrak{P}$ un point quelconque intérieur ou extérieur au polygone; soit ν la distance de $\mathfrak{P}$ au centre O.

Désignant par α le plus petit des angles que forme ν avec les rayons R et par $d_1, d_2, \ldots, d_m$, les distances de $\mathfrak{P}$ aux sommets du polygone, on a dans tous les cas:

$$d_1^2 = R^2 + \nu^2 - 2R\nu \cos \alpha$$

$$d_2^2 = R^2 + \nu^2 - 2R\nu \cos\left(\frac{2\pi}{m} - \alpha\right)$$

$$d_3^2 = R^2 + \nu^2 - 2R\nu \cos\left(\frac{4\pi}{m} - \alpha\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_k^2 = R^2 + \nu^2 - 2R\nu \cos\left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_m^2 = R^2 + \nu^2 - 2R\nu \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m} - \alpha\right) .$$

Il s'ensuit que

$$S = d_1^{2n} + d_2^{2n} + \dots + d_m^{2n} = \sum_{k=1}^{k=m} \left\{ R^2 + \nu^2 - 2R\nu\cos\left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right) \right\}^n$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} (R^2 + \nu^2)^{n-i} 2^i R^i \nu^i \cos^i\left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i 2^i \binom{n}{i} (R^2 + \nu^2)^{n-i} R^i \nu^i \sum_{k=1}^{k=m} \cos^i\left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right).$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{k=m} \cos^i\left(\frac{2(k-1)\pi}{m} - \alpha\right)$$

est égal à zéro si i est impair, et égal à $\frac{1.3 \dots (i-1)}{2.4 \dots i} m$ si i est pair; donc en posant $i = 2j$, on a

$$S = m \sum_{j=0}^{j=\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} 2^{2j} \frac{1.3 \dots (2j-1)}{2.4 \dots 2j} R^{2j} \nu^{2j} (R^2 + \nu^2)^{n-2j}.$$

En outre

$$2^{2j} \frac{1.3 \dots (2j-1)}{2.4 \dots 2j} = \binom{2j}{j}$$

et ainsi

$$S = m \sum_{j=0}^{j=\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} \binom{2j}{j} R^{2j} \nu^{2j} (R^2 + \nu^2)^{n-2j}.$$

Par le développement de $(R^2 + \nu^2)^{n-2j}$ on obtient

$$S = m \sum_{j=0}^{j=\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{l=0}^{l=n-2j} \binom{n}{2j} \binom{2j}{j} \binom{n-2j}{l} R^{2n-(2j+2l)} \nu^{2j+2l},$$

et en développant le second membre et ordonnant suivant les puissances de R on a

$$S = m \sum_{t=0}^{t=n} C_t R^{2n-2t} \nu^{2t},$$

où

$$C_t = \binom{n}{0}\binom{0}{0}\binom{n}{t} + \binom{n}{2}\binom{2}{1}\binom{n-2}{t-1} + \binom{n}{4}\binom{4}{2}\binom{n-4}{t-2} + \dots$$
$$\dots + \binom{n}{2h}\binom{2h}{h}\binom{n-2h}{t-h} + \dots + \binom{n}{2t}\binom{2t}{t}\binom{n-2t}{0},$$

c'est-à-dire

$$C_t = \sum_{h=0}^{h=t}\binom{n}{2h}\binom{2h}{h}\binom{n-2h}{t-h}.$$

D'autre part

$$\binom{n}{2h}\binom{2h}{h}\binom{n-2h}{t-h} = \frac{n\,!}{(h\,!)^2\,(t-h)\,!\,(n-t-h)\,!} =$$
$$= \frac{n\,!}{(h\,!)^2\,(t-h)\,!\,(n-t-h)\,!}\;\frac{(t-h+1)\,(t-h+2)\dots t}{(t-h+1)\,(t-h+2)\dots t}$$
$$\frac{(n-t-h+1)\,(n-t-h+2)\dots(n-t)}{(n-t-h+1)\,(n-t-h+2)\dots(n-t)} =$$
$$= \frac{n\,!}{t\,!\,(n-t)\,!}\;\frac{(n-t)\,(n-t-1)\dots(n-t-h+1)}{h\,!}\;\frac{t\,(t-1)\dots(t-h+1)}{h\,!} =$$
$$= \binom{n}{t}\binom{n-t}{h}\binom{t}{t-h},$$

et ainsi

$$C_t = \sum_{h=0}^{h=t}\binom{n}{t}\binom{n-t}{h}\binom{t}{t-h} = \binom{n}{t}\sum_{h=0}^{h=t}\binom{n-t}{h}\binom{t}{t-h}.$$

Mais

$$\sum_{h=0}^{h=t}\binom{n-t}{h}\binom{t}{t-h} = \binom{n}{t}\;;$$

il s'ensuit

$$C_t = \binom{n}{t}^2.$$

Alors, on a en définitive

$$S = m\sum_{t=0}^{t=n}\binom{n}{t}^2 R^{2n-2t}\nu^{2t}\;.$$

Messine, 8 décembre 1933 (XII).

(Traduction de M. A. Pittet, Genève.)