SUR LE TRANGHET D'ARCHIMEDE

Autor(en): **Thébault, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26001

SUR LE TRANCHET D'ARCHIMEDE

PAR

V. Thébault, Le Mans (Sarthe).

M. M. d'Ocagne a repris des propriétés de la figure constituée par trois demi-cercles de diamètres BC, AC et AB, décrits d'un même côté d'une droite, sur laquelle sont marqués trois points A, B, C (A entre B et C), pour montrer les avantages que peut offrir la méthode de l'inversion en tant que moyen de démonstration [1].

Cette configuration, qui fait l'objet des Propositions IV et V du *Livre des Lemmes* d'Archimède, a beaucoup occupé les géomètres. Cochez semble avoir eu le premier l'idée de transformer la figure par rayons vecteurs réciproques [2]. De notre côté, nous avons employé le même procédé pour généraliser la figure envisagée par le géomètre grec [3].

Peut-être n'est-il pas sans intérêt d'ajouter encore des compléments.

1. — Soient A, B, C trois points marqués sur une droite (A entre B et C). D'un même côté de cette droite, traçons les demi-cercles (O), (O_1), (O_2) de diamètres $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$, puis un demi-cercle, de rayon $R = b + c + d$, concentrique au demi-cercle (O), d étant une longueur donnée. Ce dernier demi-cercle coupe la droite BC en des points B_1, C_1, et $BB_1 = CC_1 = d$, puis la tangente commune aux demi-cercles

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1934, p. 73.

[2] *Journal* de Bourget, 1878, p. 354.

[3] *Mathesis*, 1931, p. 187; *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, janvier 1935.

(O_1), (O_2) en A, en un point T. Traçons les cercles (ω_1), (ω_2) qui touchent la droite AT, le demi-cercle (O), de rayon R, puis respectivement les demi-cercles (O_1), (O_2). Nous allons montrer que *les rayons* ρ_1, ρ_2 *des cercles* (ω_1), (ω_2) *sont égaux.*

En prenant A comme pôle d'inversion avec une puissance égale, en valeur absolue, au produit AB . AC $= 4bc$, avec des

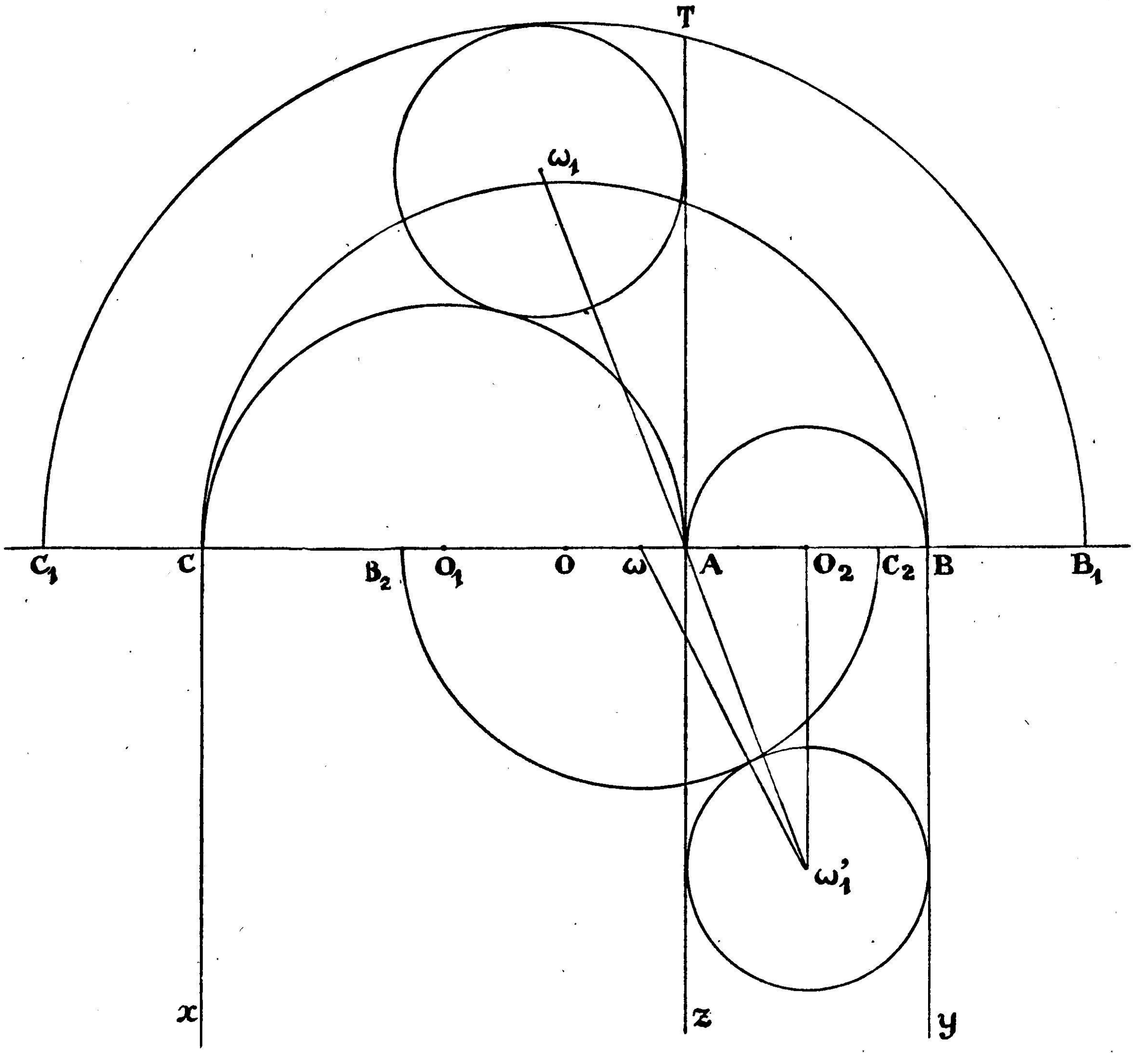

Fig. 1.

rayons vecteurs réciproques directement opposés, la droite AT et le cercle (O) se conservent, toutefois avec échange pour chacun d'eux de la partie située en dessus et de la partie située en dessous de la droite BC. Les cercles de diamètres AC et AB ont pour inverses respectivement les perpendiculaires Cx et By à la BC en B et C. Le demi-cercle (O), de rayon R, se transforme en un demi-cercle, situé en dessous de BC, dont les extrémités B_2, C_2 du diamètre situé sur BC, sont des points tels que

$$AC_2 = \left|\frac{AB \cdot AC}{AC_1}\right| = \frac{4\,bc}{2\,b + d}\,, \qquad AB_2 = \frac{4\,bc}{2\,c + d}\,. \tag{1}$$

Mais, quand on transforme un cercle de rayon R par inversion, pour obtenir un cercle de rayon ρ, le rapport $\frac{\rho}{R}$ est égal à celui de la puissance d'inversion à celle du pôle par rapport au premier cercle. Appliquant cette remarque au calcul du rayon ρ du cercle (ω) de diamètre B_2C_2 qui est le transformé du cercle (O), de rayon R, dans l'inversion de pôle A et de module $(AB \cdot AC) = 4bc$, on a, en valeur absolue,

$$\frac{\rho}{R} = \frac{4\,bc}{R^2 - \overline{AO}^2} = \frac{4\,bc}{(b + c + d)^2 - (b - c)^2}\,;$$

d'où

$$\rho = \frac{4\,bcR}{(2\,b + d)\,(2\,c + d)} = \frac{4\,(b + c + d)\,bc}{(2\,b + d)\,(2\,c + d)}\,. \tag{2}$$

Dans la même inversion, les cercles (ω_1), (ω_2) deviennent des cercles (ω_1'), (ω_2') tangents à la droite Az, symétrique de AT par rapport au point A, puis tangents respectivement aux droites By et Cx; les rayons de ces cercles valent donc $\rho_1' = c$, $\rho_2' = b$.

En vertu de la remarque relative au rapport des rayons de deux cercles inverses,

$$\frac{\rho_1}{\rho_1'} = \frac{\rho_1}{c} = \left|\frac{AB \cdot AC}{\overline{A\,\omega_1'}^2 - \rho_1'^2}\right| = \frac{4\,bc}{\overline{A\,\omega_1'}^2 - c^2} = \frac{4\,bc}{\overline{O_2\,\omega_1'}^2}\,. \tag{3}$$

Or,

$$\overline{O_2\,\omega_1'}^2 = \overline{\omega\,\omega'}^2 - \omega\,\overline{O}_2^3 = (\rho + c)^2 - \omega\,\overline{O}_2^2 \tag{4}$$

$$\omega\,O_2 = \omega A + AO_2 = \frac{\rho}{R}(b - c) + c\,, \tag{5}$$

car, eu égard à (1) et (2),

$$\omega A = \left(\frac{4\,bc}{2\,b + d}\right) \cdot \left(\frac{b - c}{2\,c + d}\right) = \frac{\rho}{R}(b - c)\,. \tag{6}$$

Introduisant la valeur (2) du rayon ρ dans l'égalité (4), il vient, après réductions,

$$\overline{O_2 \omega_1'}^2 = \frac{8\,bc^2(2R + d)}{(2b + d)(2c + d)}, \tag{7}$$

et finalement

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(2b + d)(2c + d)}{2b + 2c + d}\right]. \tag{8}$$

Si, au lieu du cercle (ω_1) on considère le cercle (ω_2), il suffit d'intervertir les rôles des demi-cercles (O_1), (O_2), c'est-à-dire de permuter b et c, pour avoir $\rho_1 = \rho_2$. *Dans la configuration d'*ARCHIMÈDE (PROPOSITION V), *si l'on remplace le demi-cercle* (O), *décrit sur* BC *comme diamètre, par un demi-cercle concentrique au premier, les demi-cercles* (O_1), (O_2) *décrits sur* AC, AB *comme diamètres restant fixes, les rayons des cercles* (ω_1), (ω_2) *tangents au dernier demi-cercle de centre* O, *à la perpendiculaire en* A *à* BC, *puis respectivement aux demi-cercles* (O_1), (O_2), *sont égaux.*

Remarques. — 1° Lorsque $d = 0$, on retrouve la formule connue

$$\rho_1 = \frac{bc}{b + c} = \frac{bc}{a} = \rho_2. \tag{9}$$

2° La relation (8) conduit aisément à la suivante

$$\frac{1}{2\rho_1} = \frac{1}{2\rho_2} = \frac{1}{2b + d} + \frac{1}{2c + d} - \frac{d}{(2b + d)(2c + d)} \tag{10}$$

qui, pour $d = 0$, devient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{11}$$

3° Supposons que les demi-cercles (O_1), (O_2) ne se touchent plus. Soient AC $= 2b$, BD $= 2c$ leurs diamètres; Δ l'axe radical de ces cercles; (O) le demi-cercle de rayon $R = a + d$ concentrique au demi-cercle (O) de diamètre BC. *Les rayons* ρ_1, ρ_2 *des cercles* (ω_1), (ω_2) *tangents à* Δ, *au demi-cercle* (O), *de rayon* R, *puis tangents respectivement aux demi-cercles* (O_1), (O_2), *sont égaux* [1].

[1] Cette proposition a été énoncée, sans démonstration, par STEINER (*Œuvres complètes*, t. I, p. 178).

Dans ce cas général, l'évaluation des rayons ρ_1, ρ_2 au moyen de l'inversion est assez laborieuse. Par un calcul direct simple, nous avons obtenu [1]

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{2a(a-b)(a-c)}{(2a+d)(2a-b-c)} + \frac{d}{2} \,. \tag{12}$$

2. — U et V étant les intersections des demi-cercles décrits sur BO_1, CO_2 comme diamètres avec les demi-cercles (O_1), (O_2), *les rayons des cercles inscrits aux triangles curvilignes* ABU *et* BCU *sont égaux ainsi que les rayons des cercles inscrits aux triangles curvilignes* ACV *et* CBV. Cette propriété que M. M. d'Ocagne supposait n'avoir peut-être pas encore été remarquée, paraît appartenir à Cochez qui l'a obtenue au moyen de l'inversion [2].

Conservons les notations utilisées jusqu'ici, puis considérons les transformés M_1, M_2 des points C et B par l'homothétie de centre A et de module [3] k. Au-dessus de BC, traçons les demi-cercles (O_1'), (O_2') sur BM_1, CM_2 comme diamètres, puis les cercles (ω_1), (ω_2) tangents au demi-cercle (O), à la droite $AT \equiv \Delta$ et respectivement aux demi-cercles (O_1'), (O_2'). Soient X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les contacts respectifs. Nous allons prouver que *les rayons des cercles* (ω_1), (ω_2) *sont égaux.*

Observons d'abord que la droite $AT \equiv \Delta$ est l'axe radical des cercles (O_1'), (O_2'), puisque

$$|AM_1 \cdot AB| = |k \cdot AC \cdot AB| = |AM_2 \cdot AC| \,. \tag{13}$$

De plus, le point X_1 étant l'un des centres de similitude des cercles (O) et (O_1'), la droite CX_1 rencontre le cercle (O_1') au point T_1 de contact de la tangente à ce cercle qui est perpendiculaire à BC. La droite AY_1 coupe le cercle (O_1') au contact de ce cercle avec la tangente perpendiculaire à BC, c'est-à-dire au point Z_1. Soient M, N les points de rencontre des droites CT, BT avec les demi-cercles (O_1'), (O_2'); μ la projection orthogonale du point M sur BC.

---

[1] *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* loc. cit.

[2] Loc. cit.

[3] Pour fixer les idées, nous supposons $k < 1$.

Transformons la figure par une inversion, de pôle C, ayant pour module, en valeur absolue, les produits égaux

$$CM \cdot CT = CY_1 \cdot CZ_1 = CT_1 \cdot CX_1 = C\mu \cdot CB \,. \tag{14}$$

La droite $T_1M = \Delta_1$ est la transformée du demi-cercle (O) et par conséquent cette droite est perpendiculaire à BC. Le cercle

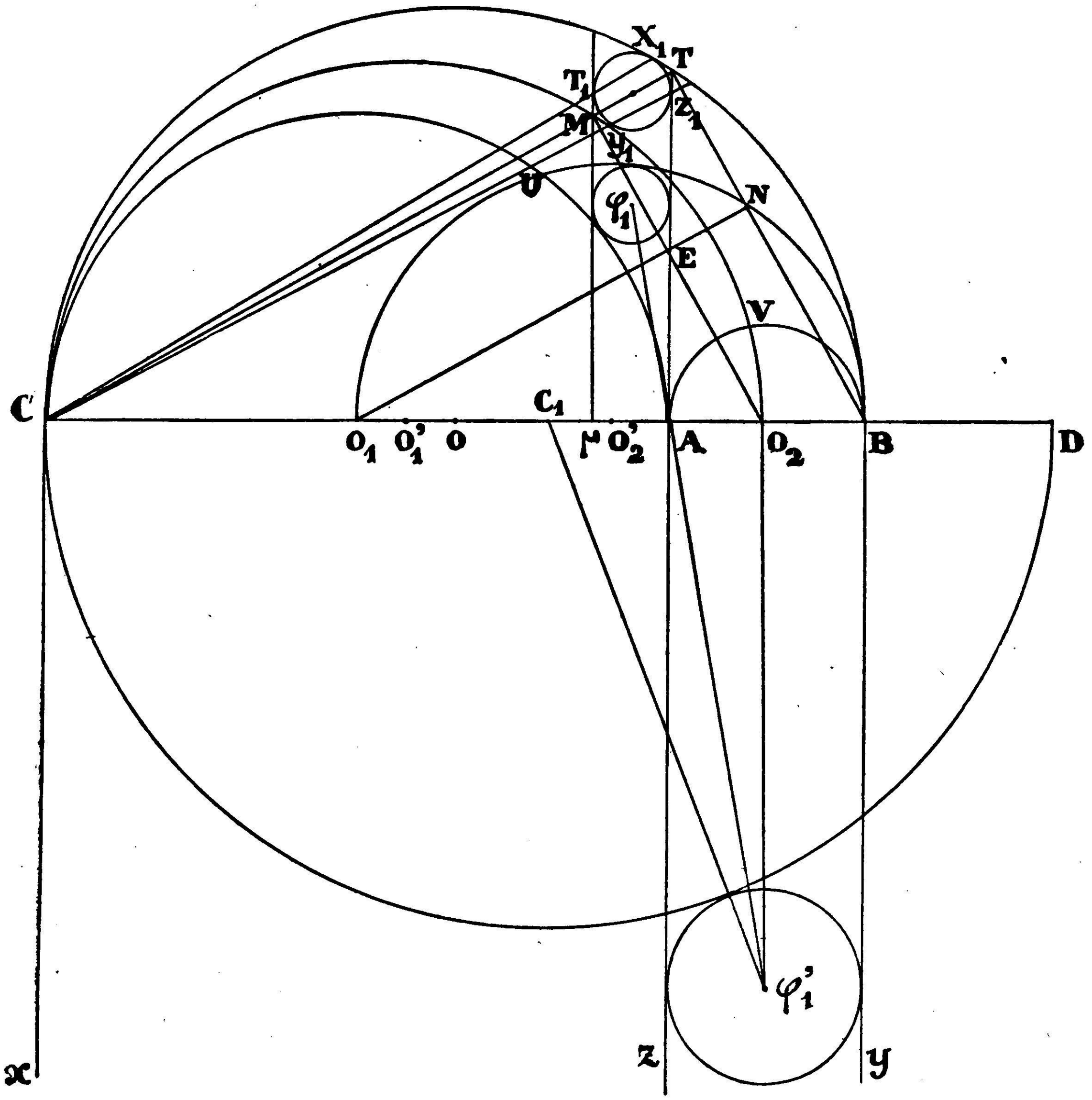

Fig. 2.

(ω_1) se transforme en lui-même, ce qui prouve qu'il est inscrit au trapèze mixtiligne déterminé par les demi-circonférences (O) et (O_1') et par les droites Δ et Δ_1; son diamètre est donc égal à $T_1Z_1 = 2\,\rho_1$. Par analogie, le cercle (ω_2) est inscrit au trapèze mixtiligne formé par les demi-circonférences (O) et (O_2') et par les droites Δ et Δ_2, Δ_2 étant la perpendiculaire à BC qui passe par le point N; le diamètre du cercle (ω_2) est égal à $T_2Z_2 = 2\rho_2$.

Les diamètres des cercles (ω_1), (ω_2), égalant les distances des sommets M, N du rectangle MTNE formé par les droites CT, BT, $O_1'N$, $O_2'M$ à sa diagonale TE, *sont égaux*, ce qui justifie la proposition que nous avons énoncée.

Si l'on observe que

$$AO_1 = k \cdot AC = 2kb \ , \qquad AO_2 = k \cdot AB = 2kc \ , \tag{15}$$

les égalités

$$\frac{CA}{C\mu} = \frac{CB}{CM_2} = \frac{CB}{CA + AM_2} = \frac{a}{b + kc} \ , \tag{16}$$

$$\frac{b}{\rho_1} = \frac{CA}{\mu A} = \frac{CA}{CA - C\mu} = \frac{a}{a - (b + kc)} \ , \tag{17}$$

conduisent à l'expression des rayons des cercles (ω_1), (ω_2),

$$\rho_1 = \frac{b[a - (b + kc)]}{a} = \frac{b(b + c - b - kc)}{a} = (1 - k)\frac{bc}{a} = \rho_2 \ . \tag{18}$$

Si $\alpha = \frac{bc}{a}$ désigne le rayon des cercles égaux inscrits aux triangles mixtilignes ATB et ACT,

$$\frac{\rho_1}{\alpha} = \frac{\rho_2}{\alpha} = 1 - k \ . \tag{19}$$

3. — Reprenons la figure envisagée par M. M. D'OCAGNE, où les demi-cercles (O_1'), (O_2') sont décrits sur CO_2, BO_1 comme diamètres et pour laquelle $k = 1 : 2$. Cherchons les rayons ρ_1', ρ_2' des cercles (φ_1), (φ_2) inscrits aux triangles mixtilignes AUP, APV.

Transformons la figure par une inversion (A, 4 bc). Le demi-cercle (O_2'), de diamètre BO_1, devient le demi-cercle de diamètre CD, en dessous de BC, le point D étant tel que

$$|AO_1 \cdot AD| = |AB \cdot AC| = 4bc \ ,$$

d'où

$$AD = \frac{4bc}{b} = 4c = 2AB \ . \tag{20}$$

Le demi-cercle (O_1) et la droite AT se transforment en les perpendiculaires By et Az à la droite BC, en dessous de cette droite. Le cercle (φ_1'), inverse du cercle (φ_1), touche donc les droites By, Az et le cercle (C_1) dont le centre C_1 est au milieu du segment rectiligne O_1D; le rayon du cercle (φ_1) est égal à c.

En vertu de la remarque relative au rapport des rayons de deux cercles inverses, déjà utilisée,

$$\frac{\rho_1'}{c} = \left|\frac{AB \cdot AC}{O_2 \overline{\varphi_1'}^2}\right| = \frac{4\,bc}{C_1 \overline{\varphi_1'}^2 - C_1 \overline{O}_2^2} . \tag{21}$$

Mais

$$C_1 \varphi_1' = \frac{1}{2} CD + c = \frac{1}{2}(CA + AD) + c = \frac{1}{2}(2\,b + 4\,c) + c = b + 3\,c\ , \tag{22}$$

$$C_1 O_2 = CO_2 - CC_1 = CO_2 - \frac{1}{2} CD = 2\,b + c - (b + 2\,c) = b - c\ . \tag{23}$$

Dès lors,

$$\frac{\rho_1'}{c} = \frac{4\,bc}{(b + 3\,c)^2 - (b - c)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{b + c}\ ,$$

$$\rho_1' = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{b + c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a}\ , \tag{24}$$

et, permutant b et c,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a} = \rho_1' = \rho_2'\ . \tag{25}$$

Si α_1, α_2 désignent les rayons des cercles inscrits aux triangles mixtilignes ACT, ATB, α_1', α_2' ceux des cercles inscrits aux triangles mixtilignes CTP, BPT,

$$\alpha_1 = \frac{bc}{a} = \alpha_2\ , \qquad \alpha_1' = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a} = \alpha_2'\ , \tag{26}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\,\alpha_1' = 2\,\alpha_2' = 2\,\rho_1' = 2\,\rho_2'\ . \tag{27}$$

Les diamètres des cercles inscrits aux triangles mixtilignes CTP, BPT, AUP, APV *sont égaux aux rayons des cercles inscrits aux triangles mixtilignes* CTA, ATB.

4. — Envisageons les cercles (β_1), (β_2), de rayons γ_1, γ_2, inscrits aux triangles mixtilignes ACP, APB. Dans la même inversion (A, 4 bc), le cercle (β_1), par exemple, devient un cercle (β_1') tangent aux droites By, Az et au cercle (B_1) de diamètre $BE = BC + 2\,AC = 2\,(2b+c)$; le rayon du cercle (β_1') est égal à c. Dès lors, on a

$$\frac{\gamma_1}{c} = \frac{4\,bc}{\overline{O_2\beta_1'}^2} = \frac{4\,bc}{\overline{B_1\beta_1'}^2 - \overline{B_1O_2}^2} \,. \tag{28}$$

Or,

$$B_1\beta_1' = \frac{1}{2}BE + c = 2b + c + c = 2(b + c) \tag{29}$$

$$B_1B_2 = B_1B - O_2B = \frac{1}{2}BE - c = 2b + c - c = 2b \,. \tag{30}$$

Par suite,

$$\frac{\gamma_1}{c} = \frac{4\,bc}{4[(b+c)^2 - b^2]} = \frac{b}{2b+c}\,; \qquad \gamma_1 = \frac{bc}{2b+c} = \frac{bc}{a+b}\,; \tag{31}$$

puis, permutant b et c,

$$\frac{bc}{b+2c} = \frac{bc}{a+c} = \gamma_2 \,. \tag{32}$$

Finalement, on déduit les relations remarquables

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\text{[1]} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\,, \tag{33}$$

β, γ étant les rayons des cercles inscrits aux triangles curvilignes ABU et BCU, ACV et CBV.

5. — En passant, M. M. D'OCAGNE (*loc. cit.*), a rappelé l'expression

$$\frac{\pi}{2}(a^2 - b^2 - c^2) = \frac{\pi}{2}\left[(b+c)^2 - b^2 - c^2\right] = \pi\,bc\,, \tag{34}$$

de l'aire du triangle curviligne ABC qui a reçu le nom de *tranchet d'Archimède.* Elle est donc *égale à celle du cercle de diamètre* AT.

---

[1] M. D'OCAGNE, loc. cit.

Considérons la figure constituée par deux cercles *quelconques* (O_1), (O_2) que, pour fixer les idées, nous supposons *extérieurs* l'un à l'autre. Leur ligne des centres O_1O_2 rencontre ces cercles respectivement en des points A et C, D et B (A et D entre B et C). Traçons les demi-cercles (O), (O′) sur BC, AD comme diamètres, le premier en dessus, le second en dessous de BC. Soit Δ l'axe radical des cercles (O_1), (O_2) qui coupe le demi-cercle (O) en un point T, le demi-cercle (O′) en un point T′.

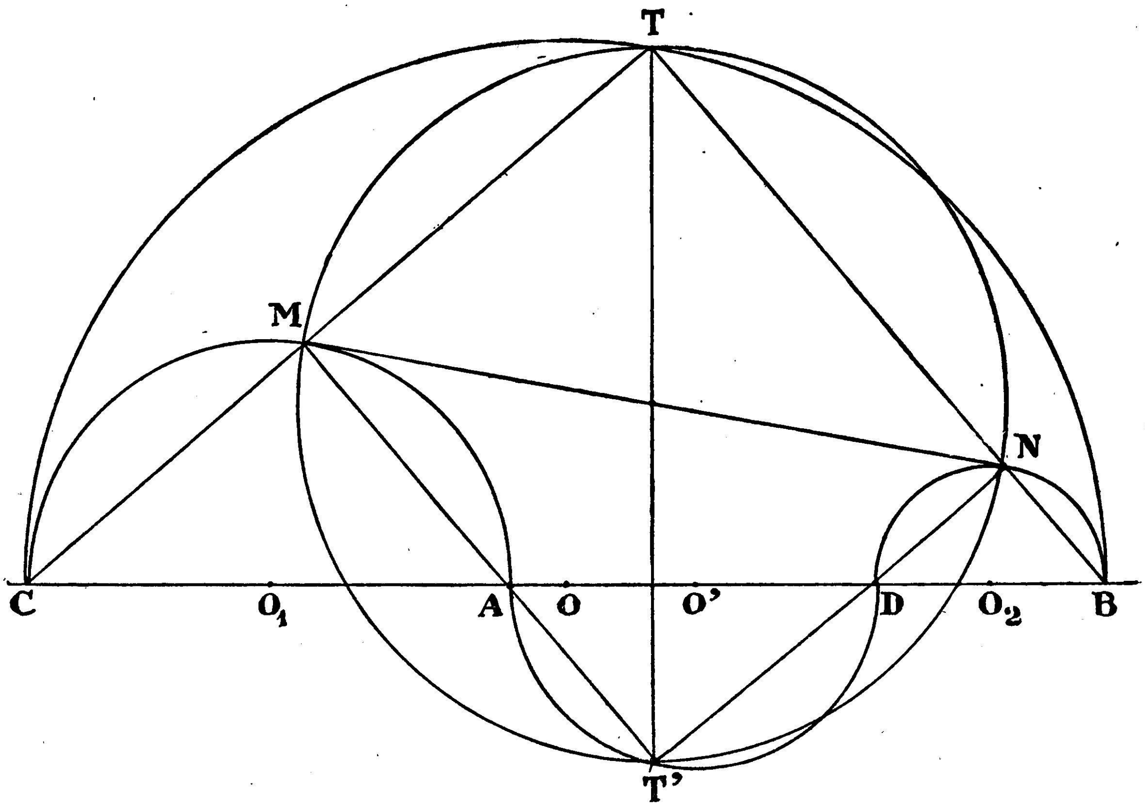

Fig. 3.

Les droites CT et AT′, BT et DT′ rencontrent les cercles (O_1), (O_2) aux contacts M, N de ces cercles avec leur tangente commune extérieure et la figure MTNT′ est un rectangle. Si l'on pose

$$BC = 2a\,, \quad AC = 2b\,, \quad DB = 2c\,, \quad CD = 2a - b - c\,,$$

on obtient aisément

$$\overline{MN}^2 = \overline{TT'}^2 = 4\,(a - b)\,(a - c)\,. \qquad (35)$$

L'aire S, intérieure au cercle (O), limitée par les demi-circonférences (O), (O_1), (O_2), (O′) a pour expression

$$S = \frac{\pi}{2}\left[a^2 - b^2 - c^2 + (2a - b - c)^2\right] = \pi\left[a^2 + bc - a(b + c)\right]$$

$$= \pi(a - b)(a - c) = \pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{TT'}{2}\right)^2 . \qquad (36)$$

Lorsque les demi-cercles (O_1), (O_2) se touchent en A, l'aire S ainsi déterminée est celle du *tranchet.* Si les demi-cercles (O_1), (O_2) ont des rayons égaux, la figure limitée par les quatre demi-circonférences, considérée aussi par ARCHIMÈDE [1], est connue sous le nom de *Salinon*, ou *feuille d'ache* (σέλινον). Notre formule (36) permet donc d'énoncer le théorème suivant qui généralise les PROPOSITIONS IV et XIV du géomètre grec:

Sur le diamètre BC *d'un cercle* (O), *on marque deux points* A *et* D (entre B et C), *puis on décrit les demi-cercles* (O_1), (O_2), (O′) *sur* AC, DB, AD, *comme diamètres, les deux premiers en dessus, le troisième en dessous de* BC. *Soit* Δ *l'axe radical des cercles* (O_1), (O_2) *qui rencontre les demi-cercles* (O), (O′) *en des points* T, T′. *L'aire limitée par les demi-circonférences* (O), (O_1), (O_2), *en dessus de* BC, *et par la demi-circonférence* (O′), *en dessous de* BC, *est équivalente à celle du cercle décrit sur* TT′ *comme diamètre.*

N. B. — Si les cercles (O_1), (O_2) sont sécants, il y a lieu de faire intervenir un sens à l'aire comprise entre les demi-circonférences, et la propriété subsiste.

---

[1] *Livre des heures.*