Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TÉTRAÈDRE ET GÉOMÉTRIE DES MASSES

Autor: Turrière, Emile

Kapitel: II. — La géométrie des quadruplets.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25999

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

la droite M_5M_6 est donc l'intersection de ces deux plans: d'où les expressions des coordonnées de cette droite. En outre, on obtient pour les sommets le lieu

$$\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right)\left(\frac{x^2}{A} - \frac{1}{3}\right) = 0 \;;$$

(c'est la surface déduite de la surface normopolaire en écrivant que le point de coordonnées $-3x$, $-3y$, $-3z$ est sur la surface normopolaire). Le lieu des sommets du tétraèdre est ainsi la courbe d'intersection de la quadrique

$$\sum \frac{x^2}{A} = 3$$

et de la surface du quatrième degré:

$$\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^2}{A} - 3\right)\left(\frac{x^2}{A} - \frac{1}{3}\right) = 0 \,.$$

II. — La géométrie des quadruplets.

9. — *Généralités.* — Soit un tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$. Nous désignerons par A_i l'aire de la face opposée au sommet A_i et par a_{ij} la longueur de l'arête joignant les sommets A_i et A_j. V désignera le volume du tétraèdre.

L'équation d'un plan quelconque P en coordonnées barycentriques étant $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$, les coordonnées u_i du plan seront les distances respectives de ce plan aux sommets A_i du tétraèdre, sous l'unique condition que ces coordonnées u_i satisfassent à la relation fondamentale:

$$\Phi = 9V^2 \,,$$

dans laquelle Φ représente la forme quadratique suivante à 6 termes

$$\Phi = \Sigma \varpi_{ij} (u_i - u_j)^2 \,.$$

les ϖ_{ij} sont 6 coefficients, liés aux aires de faces par les quatre relations:

$$A_1^2 = \varpi_{12} + \varpi_{13} + \varpi_{14} ,$$

$$A_2^2 = \varpi_{21} + \varpi_{23} + \varpi_{24} ,$$

$$A_3^2 = \varpi_{31} + \varpi_{32} + \varpi_{34} ,$$

$$A_4^2 = \varpi_{41} + \varpi_{42} + \varpi_{43} ,$$

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji} .$$

Les distances n'intervenant dans la relation fondamentale que par leurs différences mutuelles (ce qui exprime que la relation reste invariante lorsque le plan P se déplace parallèlement à lui-même) il y a intérêt à introduire les 6 fonctions suivantes:

$$U_{ij} = u_i - u_j ,$$

avec $U_{ij} = - U_{ji}$. Alors Φ prend la forme

$$\Phi = \Sigma \varpi_{ij} U_{ij}^2 .$$

L'équation tangentielle du cercle à l'infini est:

$$\Phi = 0 .$$

Les coordonnées barycentriques x_i d'un point quelconque M de l'espace et celles x_i' d'un second point quelconque M′ étant supposées multipliées par deux facteurs non déterminés, nous poserons:

$$\Delta x_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} - \frac{x_i'}{x_1' + x_2' + x_3' + x_4'} .$$

Dans le cas particulier de coordonnées barycentriques absolues, $\Sigma x_i = \Sigma x_i' = V$, l'expression précédente se réduit à

$$\Delta x_i = \frac{x_i - x_i'}{V} ;$$

ou encore si les coordonnées absolues ont été réduites par division par V, $\Sigma x_i = \Sigma x_i' = 1$, l'expression précédente est $\Delta x_i = x_i - x_i'$.

En prenant, en tout cas, l'expression générale de Δx_i, la distance de deux points quelconques MM′ est donnée en coordonnées barycentriques par la formule à six termes :

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = - \Sigma a_{12}^2 \Delta x_1 \,.\, \Delta x_2 \,.$$

L'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre en résulte immédiatement :

$$\Sigma a_{ij}^2 \Delta x_i \,.\, \Delta x_j = 0 \ ;$$

les coefficients sont les carrés des longueurs des arêtes du tétraèdre.

Si quatre masses (m_1, m_2, m_3, m_4) sont respectivement placées aux sommets du tétraèdre de référence, le centre des masses Γ a des coordonnées barycentriques proportionnelles aux quatre nombres m_i. Inversement tout point de l'espace peut être considéré comme étant centre de quatre masses placées aux sommets A_i et proportionnelles aux coordonnées barycentriques du point.

Soit maintenant un plan quelconque P; ses coordonnées u_i sont supposées vérifier la relation fondamentale; elles représentent dès lors les distances respectives du plan aux sommets du tétraèdre. En outre, la distance d'un point quelconque de l'espace de coordonnées barycentriques proportionnelles à des nombres x_i est

$$\mathrm{D} = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \,.$$

Le moment d'inertie I par rapport au plan P du système matériel constitué par les quatre masses m_i placées aux sommets A_i du tétraèdre est donc égal à

$$\mathrm{I} = \Sigma m_i u_i^2 \,.$$

Si le plan P passe par le centre Γ des masses,

$$\Sigma m_i u_i = 0 \ ,$$

on peut écrire (avec la masse totale M)

$$\begin{aligned} \mathrm{MI} &\equiv \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4\right)\left(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 + m_4 u_4^2\right) \\ &\quad - (m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4)^2 \\ &\equiv \Sigma\, m_i m_j (u_i - u_j)^2 \,. \end{aligned}$$

Par suite, pour un plan quelconque passant par Γ, l'expression du moment d'inertie planaire I prend la forme:

$$\mathrm{MI} = \Sigma\, m_i m_j \mathrm{U}_{ij}^2 \,.$$

10. — *Détermination des axes de l'ellipsoïde central d'inertie du quadruplet.* — I est une fonction de deux variables quand le plan P pivote autour du centre Γ. Posons

$$f(u_1\,,\, u_2\,,\, u_3\,,\, u_4) \equiv \mathrm{I} + 2\sigma \cdot \Sigma\, m_i u_i - \rho \sum \varpi_{ij} \mathrm{U}_{ij}^2 \;;$$

et écrivons les quatre équations de maximum — minimum:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \,.$$

$$m_1 (u_1 + \sigma) + \rho\left(- \mathrm{A}_1^2 u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4\right) = 0 \,. \quad \text{etc.}$$

En ajoutant membre à membre ces quatre équations linéaires, il vient $\mathrm{M}\sigma = 0$; et, par suite, en général, le paramètre σ doit être pris égal à zéro. Le système des quatre équations linéaires et homogènes, en u_i

$$\left(\frac{m_1}{\rho} - \mathrm{A}_1^2\right) u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4 = 0 \,,$$

conduit à l'équation suivante du troisième degré en ρ:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{m_1}{\rho} - \mathrm{A}_1^2 & \varpi_{12} & \varpi_{13} & \varpi_{14} \\ \varpi_{21} & \dfrac{m_2}{\rho} - \mathrm{A}_2^2 & \varpi_{23} & \varpi_{24} \\ \varpi_{31} & \varpi_{32} & \dfrac{m_3}{\rho} - \mathrm{A}_3^2 & \varpi_{34} \\ \varpi_{41} & \varpi_{42} & \varpi_{43} & \dfrac{m_4}{\rho} - \mathrm{A}_4^2 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

A chaque racine de cette équation correspond un système de coordonnées (u_i) d'un plan principal d'inertie au centre Γ.

Comme les équations linéaires ne sont autres que les équations

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0 ,$$

en les ajoutant membre à membre, après multiplications respectives par les u_i, il vient

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{I} - \Phi = 0 \ ; \qquad \Phi = 9\mathrm{V}^2$$

et par suite

$$\rho = \frac{\mathrm{I}}{9\mathrm{V}^2} .$$

L'équation cubique en ρ n'est autre, à un facteur près affectant l'inconnue, que l'équation aux moments d'inertie centraux (moments planaires).

Le développement du déterminant du quatrième ordre donne:

$$\mathcal{R}_0\rho^3 - \mathcal{R}_1\rho^2 + \mathcal{R}_2\rho - m_1 m_2 m_3 m_4 = 0$$

avec

$$\mathcal{R}_0 = \sum m_1(\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_4^2 - 2\varpi_{23}\varpi_{24}\varpi_{34} - \mathrm{A}_2^2\varpi_{34} - \mathrm{A}_3^2\varpi_{24} - \mathrm{A}_4^2\varpi_{32}) ,$$

$$\mathcal{R}_1 = \sum m_i m_j(\mathrm{A}_i^2\mathrm{A}_j^2 - \varpi_{ij}^2) ,$$

$$\mathcal{R}_2 = \sum \mathrm{A}_1^2 m_2 m_3 m_4 = m_1 m_2 m_3 m_4 \sum\frac{\mathrm{A}_i^2}{m_i} .$$

Mais les formules (avec les diêdres ζ_{ij})

$$\varpi_{12} = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cos\zeta_{34} , \quad \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\sin\zeta_{34} = \frac{3}{2}\mathrm{V}a_{34} ,$$

transforment $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ en les expressions suivantes:

$$\mathcal{R}_0 = \sum m_1 . \mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_4^2(1 - \cos^2\zeta_{12} - \cos^2\zeta_{13} - \cos^2\zeta_{14} -$$
$$2\cos\zeta_{12}\cos\zeta_{13}\cos\zeta_{14}) ,$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{9}{4}\mathrm{V}^2 \cdot \sum m_i m_j a_{ij}^2 ;$$

l'expression trigonométrique entre parenthèses dans l'expression de $\mathcal{R}_0$ n'est autre que le carré du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre A_1. L'expression de ce sinus est:

$$\Omega_1' = \frac{9}{2} \cdot \frac{V^2}{A_2 A_3 A_4},$$

ce qui réduit $\mathcal{R}_0$ à la valeur

$$\mathcal{R}_0 = \frac{81}{4} MV^2 .$$

Finalement *l'équation aux moments planaires centraux d'inertie du quadruplet est:*

$$I = M\omega ,$$

$$\omega^3 - \omega_0 \omega^2 + \omega_1 \omega - \frac{36 V^2}{M^4} m_1 m_2 m_3 m_4 = 0 ;$$

les coefficients ω_0, ω_1 de l'équation cubique en ω ayant pour expressions:

$$M^2 \omega_0 = \sum a_{ij}^2 m_i m_j .$$

$$\omega_1 = \frac{4 m_1 m_2 m_3 m_4}{M^3} \cdot \sum \frac{A_i^2}{m_i} .$$

La puissance du point Γ par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre a pour expression

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{M^2} \sum a_{ij}^2 m_i m_j ;$$

ainsi le moment d'inertie polaire en Γ, égal à $M\omega_0$, a pour expression $- M . \mathfrak{T}$.

Le moment d'inertie polaire du quadruplet au centre des masses Γ *est égal au produit par la masse totale de la puissance, changée de signe, du centre* Γ *par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre.*

Cette proposition se déduit du reste de la remarque que le moment d'inertie polaire au centre O de la sphère circonscrite (de rayon R) est MR^2. Au centre de gravité Γ du système matériel, le moment polaire prend donc la valeur $M(R^2 - \overline{O\Gamma}^2)$, c'est-à-dire $- M . \mathfrak{T}$.

Si, d'autre part, I (coordonnées A_i) est le centre de la sphère inscrite (rayon r) au tétraèdre et si D_I et D_Γ représentent respectivement les distances du centre I et du centre des masses Γ au plan polaire du point I par rapport à la quadrique conjuguée $\sum \frac{X_i^2}{m_i} = 0$ de centre Γ, les relations

$$3V = r \cdot \Sigma A_i \,, \qquad MD_\Gamma = \Sigma A_i \,,$$

$$rD_\Gamma = \frac{3V}{M} \,,$$

$$\frac{3V}{r} \cdot D_I = \sum \frac{A_i^2}{m_i} \,,$$

$$M \cdot D_\Gamma \cdot D_I = \sum \frac{A_i^2}{m_i} \,,$$

conduisent à d'intéressantes interprétations géométriques du coefficient ω_1.

Le coefficient ω_0 est nul, lorsque Γ est sur la sphère circonscrite et réciproquement.

Le coefficient ω_1 est nul lorsque Γ est sur la surface, du troisième degré d'équation

$$\sum \frac{A_i^2}{m_i} = 0$$

et réciproquement. Cette surface généralise le cercle circonscrit au triangle: dans la transformation inverse (généralisant la transformation isogonale du plan) elle est la transformée du plan de l'infini. Elle est aussi la généralisation du cercle circonscrit au triangle, sous le point de vue du théorème des droites de Simon-Wallace.

En résumé, les formules relatives aux trois moments centraux d'inertie en Γ sont:

$$\begin{cases} M(I + I' + I'') = \sum a_{ij}^2 m_i m_j \,, \\ M(I\,I' + I'\,I'' + I''\,I) = 4 m_1 m_2 m_3 m_4 \sum \frac{A_i^2}{m_i} \,, \\ M \cdot I\,I'\,I'' = 36 V^2 m_1 m_2 m_3 m_4 \,. \end{cases}$$

11. — *Application au tétraèdre solide et homogène.* — La masse totale du tétraèdre étant M, nous prenons aux sommets quatre masses égales:

$$m_i = \frac{M}{20},$$

la cinquième masse en G n'intervenant pas dans les calculs des moments d'inertie centraux. Les formules relatives aux carrés des rayons de gyration ω, ω' et ω'' sont:

$$\begin{aligned} I &= M\omega , \\ 16(\omega + \omega' + \omega'') &= \sum a_{ij}^2 , \\ 16(\omega\omega' + \omega'\omega'' + \omega''\omega) &= \sum A_i^2 , \\ \omega\omega'\omega'' &= \frac{9}{64} V^2 . \end{aligned}$$

12. — D'une manière générale, les cosinus directeurs (δ_i) d'une direction définie comme orthogonale à un plan donné (u_i) sont donnés par la formule:

$$\delta_i = -\frac{1}{2\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

c'est-à-dire:

$$9V^2 \cdot \delta_i = -A_1^2 u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4 .$$

Dans le cas actuel, d'un axe de symétrie de la quadrique d'inertie de centre (m_i), l'équation trouvée précédemment

$$\left(\frac{m_1}{\rho} - A_1^2\right) u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4 = 0 ,$$

conduit à la formule

$$\delta_i = -\frac{m_i u_i}{I} ;$$

la condition $\Sigma\,\delta_i = 0$ qui exprime que (δ_i) sont des coordonnées du point à l'infini de l'axe est équivalente à celle, $\Sigma m_i u_i = 0$ qui exprime que le plan principal contient le centre de la quadrique d'inertie.

Tout plan donné peut être considéré comme plan central d'inertie pour un choix convenable du centre Γ *des quatre masses. A tout plan donné, peut être associé un point de ce plan, qui est le centre* Γ *et dont les coordonnées seront définies par les formules*

$$m_i = \frac{\psi}{u_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_i},$$

ψ *étant arbitraire.*

Il en résulte:

$$\Sigma\, m_i u_i = 0 \;;$$

et si les u_i sont les distances aux sommets, il vient pour le moment d'inertie central correspondant, l'expression suivante:

$$\mathrm{I} = \sum m_i u_i^2 = 2\psi\Phi\,, \qquad \mathrm{I} = 18\,\mathrm{V}^2 \cdot \psi\,.$$

13. — *Lieu du centre* Γ *des masses associé à un plan se déplaçant parallèlement à une direction donnée.* — Prenons un plan de coordonnées $u_i + \lambda$, λ étant un paramètre variable. La direction de la perpendiculaire (δ_i) à ce plan est invariable. Le lieu de Γ, associé à ce plan variable, est défini par les équations

$$m_i = \frac{\delta_i}{u_i + \lambda},$$

qui représentent une *cubique gauche, circonscrite au tétraèdre.* La cubique a pour points à l'infini le point de paramètre λ infini, de coordonnées δ_i et qui n'est autre que le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à ces plans. Les deux autres points à l'infini de la cubique ont des paramètres définis par l'équation du second degré:

$$\sum_1^4 \frac{\delta_i}{u_i + \lambda} = 0\,.$$

De l'identité

$$\sum m_i u_i = -\lambda \cdot \sum \frac{\delta_i}{u_i + \lambda},$$

il résulte que le plan $\lambda = 0$, rencontre la cubique au point $\Gamma\left(m_i = \frac{\delta_i}{u_i}\right)$ qui lui est associé et aux deux points à l'infini qui viennent d'être mis en évidence.

Tout plan de la direction donnée rencontre la cubique en le point Γ *associé et en deux points à l'infini.*

14. — *Questions relatives aux axes centraux.* — Les coordonnées plückériennes de l'axe central d'inertie Δ, perpendiculaire au plan (u_i) au centre associé Γ sont, à un facteur près:

$$p_{12} = m_3 m_4 U_{34} = m_3 m_4 (u_3 - u_4) \; .$$

Dans un tétraèdre quelconque, un axe central Δ *peut-il passer par le sommet* A_1 ?

Les conditions

$$p_{12} = 0 \; , \qquad p_{13} = 0 \; , \qquad p_{14} = 0$$

exigent que $u_2 = u_3 = u_4$. Le plan doit être parallèle à la face opposée et Δ coïncide avec la hauteur A_1H_1.

Un axe central Δ *peut-il rencontrer l'arête* A_3A_4 ?

$$p_{12} = 0 \; , \qquad u_3 = u_4 \; ;$$

le plan doit être parallèle à l'arête A_3A_4 et réciproquement.

Cas d'un plan parallèle à deux arêtes opposées A_1A_2 *et* A_3A_4.

$$u_1 = u_2 \; , \qquad u_3 = u_4 \; , \qquad p_{12} = 0 \; , \qquad p_{34} = 0 \; .$$

L'axe central d'inertie perpendiculaire à un tel plan, au centre Γ associé, est la perpendiculaire commune aux deux arêtes considérées. D'où la construction géométrique du centre Γ.

La cubique gauche lieu des centres Γ associés aux plans ayant cette direction commune dégénère en une droite Δ.