Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1934)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TÉTRAÈDRE ET GÉOMÉTRIE DES MASSES
Autor: Turrière, Emile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25999

TÉTRAÈDRE ET GÉOMÉTRIE DES MASSES

PAR

Emile Turrière (Montpellier).

Dans un précédent article, *Sur l'équivalence en Géométrie des masses* [1], j'ai traité principalement de la géométrie des masses dans ses rapports avec la Géométrie du triangle. J'ai rapidement énoncé quelques résultats concernant la géométrie tétraédrique des masses. Les considérations qui suivent sont relatives à cette dernière question.

I. — Le système des tétraèdres équivalents.

1\. — Reprenons l'étude des tétraèdres T: *tout système de masses est équivalent à une infinité de systèmes de quatre masses ponctuelles égales. Les quatre points d'application de ces masses sont situés aux sommets de tétraèdres* T, *de même volume, inscrits à un ellipsoïde* E, *circonscrits à un ellipsoïde* E'; *les arêtes des tétraèdres* T *sont tangentes en leurs milieux à un ellipsoïde* E''; *les tétraèdres sont conjugués par rapport à un ellipsoïde* E''' (imaginaire). *Ces divers ellipsoïdes sont concentriques, leur centre commun est le centre de gravité* G *des tétraèdres. Ils sont homothétiques.*

Les plans tangents aux sommets des tétraèdres à l'ellipsoïde circonscrit E sont respectivement parallèles aux faces opposées des tétraèdres.

Il existe une infinité de tétraèdres T qui sont orthocentriques. Les hauteurs des tétraèdres d'orthocentre H sont quatre des

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1931, XXX, pp. 62-90.

normales issues de H à l'ellipsoïde E. L'arête A_1A_2 coïncide avec l'une des directions principales de l'ellipsoïde E″ au milieu de A_1A_2. L'arête A_3A_4 est parallèle à l'autre direction principale.

Ces résultats rappelés, prenons les équations suivantes pour représenter ces divers ellipsoïdes:

E circonscrit : $\dfrac{X^2}{A} + \dfrac{Y^2}{B} + \dfrac{Z^2}{C} = 3$;

E′ inscrit : $= \dfrac{1}{3}$;

E″ tangent aux arêtes : $= 1$;

E‴ autopolaire ; $= -1$.

L'origine est le centre G de gravité; les axes sont les axes centraux d'inertie.

Tout d'abord nous allons établir quelques formules générales relatives aux tétraèdres T en mettant en évidence les coordonnées elliptiques du milieu de l'arête A_1A_2 sur l'ellipsoïde E″ tangent aux arêtes.

2. — *Formules générales pour les tétraèdres* T. — Soit une quadrique (Q) d'équation $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$; posons sur cette quadrique :

$$X^2 = \frac{A(A+\lambda)(A+\mu)}{(A-B)(A-C)}, \quad \text{etc.},$$

(λ, μ) étant les coordonnées elliptiques du point courant M. Une tangente quelconque à cette quadrique au point M aura des cosinus directeurs α, β, γ qui pourront être mis sous la forme:

$$\alpha = X\left(\frac{l}{A+\lambda} + \frac{m}{A+\mu}\right), \quad \text{etc.}$$

l, m étant deux paramètres. Il en résulte les relations:

$$\Sigma\frac{\alpha X}{A} = 0\,, \qquad \Sigma\alpha X = l + m\,,$$

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4(El^2 + Gm^2)\,,$$

$$\Sigma\frac{\alpha^2}{A} = -4\left(\frac{El^2}{\lambda} + \frac{Gm^2}{\mu}\right),$$

où:

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda(\lambda - \mu)}{(A+\lambda)(B+\lambda)(C+\lambda)}, \quad G = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu(\mu - \lambda)}{(A+\mu)(B+\mu)(C+\mu)}.$$

En posant

$$l = \frac{\sin\omega}{2\sqrt{E}}, \qquad m = \frac{\cos\omega}{2\sqrt{G}},$$

on obtient:

$$\Sigma \frac{\alpha^2}{A} = -\left(\frac{\sin^2\omega}{\lambda} + \frac{\cos^2\omega}{\mu}\right).$$

La tangente ainsi définie au point M de la quadrique (Q) rencontre la quadrique concentrique et homothétique (Q′) d'équation

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 3,$$

aux points de coordonnées $X + \alpha\rho$, $Y + \beta\rho$, $Z + \gamma\rho$, où le paramètre ρ a la valeur définie par l'une ou l'autre des conditions équivalentes:

$$\rho^2 \Sigma \frac{\alpha^2}{A} = 2\ ;$$

$$\frac{4}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)\cos 2\omega - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Considérons d'autre part une autre tangente à la quadrique (Q), au point M′ symétrique de M par rapport au centre G de (Q). Soient $\alpha'\beta'\gamma'$ les cosinus directeurs de cette tangente; nous poserons

$$\alpha' = -X\left(\frac{l'}{A+\lambda} + \frac{m'}{B+\mu}\right), \quad \text{etc.}$$

$$l' = \frac{\sin\omega'}{2\sqrt{E}} \qquad m' = \frac{\cos\omega'}{2\sqrt{G}}\ ;$$

$$\Sigma \frac{\alpha'^2}{A} = -\left(\frac{\sin^2\omega'}{\lambda} + \frac{\cos^2\omega'}{\mu}\right)\ ;$$

$$\frac{4}{\rho'^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right)\cos 2\omega' - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Entre les deux tangentes existent les relations:

$$\Sigma \alpha\alpha' = \cos(\omega - \omega') ,$$

$$\Sigma \frac{\alpha\alpha'}{A} = -\left[\frac{\sin\omega \sin\omega'}{\lambda} + \frac{\cos\omega \cos\omega'}{\mu}\right] ;$$

Ces deux tangentes définissent par leurs intersections avec la quadrique (Q′) un tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées respectives:

$$\begin{array}{lll} A_1 & X + \rho\alpha , & \text{etc.,} \\ A_2 & X - \rho\alpha , & \text{etc.,} \\ A_3 & -X + \rho'\alpha' , & \text{etc.,} \\ A_4 & -X - \rho'\alpha' , & \text{etc.} \end{array}$$

Les arêtes A_1A_2 et A_3A_4 sont par construction tangentes en leurs milieux à la quadrique (Q). La condition de conjugaison des arêtes A_1A_2 et A_3A_4 par rapport à la quadrique Q,

$$\Sigma \frac{\alpha\alpha'}{A} = 0 ,$$

assure le contact des quatre autres arêtes, en leurs milieux respectifs, avec la même quadrique. Cette condition est du reste:

$$\operatorname{tang}\omega \,.\, \operatorname{tang}\omega' = -\frac{\lambda}{\mu} .$$

Les carrés des longueurs des arêtes a_{ij} du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont:

$$a_{12}^2 = 4\rho^2 ,$$

$$a_{34}^2 = 4\rho'^2 ,$$

$$a_{13}^2 = 4(\lambda + \mu + A + B + C) + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')$$
$$+ 4\rho(l + m) - 4\rho'(l' + m') ; \quad \text{etc.}$$

elles donnent les relations suivantes:

$$\begin{cases} a_{12}^2 + a_{34}^2 = 4(\rho^2 + \rho'^2) , \\ a_{13}^2 + a_{24}^2 = 8(\lambda + \mu + A + B + C) + 2\left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')\right] , \\ a_{14}^2 + a_{23}^2 = 8(\lambda + \mu + A + B + C) + 2\left[\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')\right] , \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12}^2 - a_{34}^2 = 4(\rho^2 - \rho'^2) , \\ a_{13}^2 - a_{24}^2 = 8\left[\rho(l + m) - \rho'(l' + m')\right] , \\ a_{14}^2 - a_{23}^2 = 8\left[\rho(l + m) + \rho'(l' + m')\right] ; \end{cases}$$

et pour les six arêtes:

$$\Sigma a_{ij}^2 = 16(\lambda + \mu + A + B + C) + 8(\rho^2 + \rho'^2) .$$

Les lignes moyennes 2L, 2M, 2N de ce tétraèdre ont des expressions définies par les relations

$$L^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 ,$$
$$4M^2 = \rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega') ,$$
$$4N^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega') ,$$

avec

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda + \mu + A + B + C = \lambda + \mu + 3s .$$

Mais la relation de conjugaison des arêtes opposées, mise sous la forme

$$\frac{\sin\omega \ \sin\omega'}{\lambda} + \frac{\cos\omega \ \cos\omega'}{\mu} = 0$$

montre que l'introduction dans les calculs de l'angle $\omega - \omega' = \varphi$ des arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4 simplifie notablement les diverses expressions; posons

$$\sin\omega \ \sin\omega' = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \cos\varphi ,$$

$$\cos\omega \ \cos\omega' = \frac{\mu}{\mu - \lambda} \cos\varphi ,$$

d'où:

$$\cos(\omega + \omega') = \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda} \cos\varphi .$$

Nous prendrons:

$$\rho\rho' \sin\varphi = 2\sqrt{\lambda\mu} \ .$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = -2(\lambda + \mu) \ ;$$

et par suite,

$$\Sigma a_{ij}^2 = 16(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) = 48s \ ,$$

$$\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 3s \ .$$

Pour les tétraèdres considérés inscrits dans la quadrique Q′ *et dont les arêtes sont tangentes en leurs milieux à la quadrique* (Q), *sont donc constantes la somme des carrés des six arêtes et celle des carrés des trois lignes moyennes.*

La plus courte distance δ des arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4 est la distance des plans tangents à la quadrique Q au point (X, Y, Z) et au point diamétralement opposé. On a donc:

$$\delta = \frac{\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} + 1}{\sqrt{\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2}}} = 2\sqrt{\frac{ABC}{\lambda\mu}} \ ;$$

et par suite le volume V a pour expression:

$$V = \frac{\delta}{6} \cdot A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \sin\varphi = \frac{4}{3}\rho\rho' \sin\varphi \cdot \sqrt{\frac{ABC}{\lambda\mu}} = \frac{8}{3}\sqrt{ABC} \ .$$

Les tétraèdres considérés ont même volume V. Si ABC sont tous trois positifs:

$$\frac{\text{volume ellipsoïde (Q)}}{\text{volume tétraèdre}} = \frac{\pi}{2} \ .$$

3. — *Tétraèdres équifaciaux du système.* — L'égalité des arêtes opposées donne les trois conditions suivantes:

$$\rho^2 = \rho'^2 \ , \qquad l + m = 0 \ , \qquad l' + m' = 0 \ .$$

C'est aussi aux mêmes conditions que conduit l'orthogonalité deux à deux des lignes moyennes.

Les milieux des arêtes sont les sommets de la quadrique Q si le tétraèdre est équifacial. On est ainsi conduit à prendre pour milieu de l'arête A_1A_2 le sommet

$$X = \sqrt{A} , \qquad Y = 0 , \qquad Z = 0 ,$$

et à poser

$$\alpha = 0 , \qquad \beta = \sin\theta , \qquad \gamma = \cos\theta ,$$

$$\alpha' = 0 , \qquad \beta' = -\beta , \qquad \gamma' = \gamma .$$

avec

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{B}{C}} .$$

Si a, b, c désignent les demi-axes de l'ellipsoïde (Q), les coordonnées des sommets d'un des tétraèdres équifaciaux appartenant au système sont

A_1	a	b	c
A_2	a	$-b$	$-c$
A_3	$-a$	b	c
A_4	$-a$	$-b$	c .

D'où une construction immédiate de ce tétraèdre équifacial et de ceux qui s'en déduisent par symétries.

Tout tétraèdre équifacial est représentable dans ce mode de représentation analytique. D'une manière générale, *le système des trois lignes moyennes d'un tétraèdre quelconque est un système de diamètres conjugués pour la quadrique tangente aux arêtes en leurs milieux.*

Le système des lignes moyennes constitue donc un système d'axes obliques pouvant être utile dans certains cas. Mais lorsque le tétraèdre est équifacial, ce système, devenant alors celui des axes de symétrie de la quadrique considérée, et par conséquent aussi de la quadrique autopolaire de centre G, de la quadrique circonscrite de Steiner et de la quadrique inscrite de Steiner, apparaît comme tout indiqué pour une étude précise du tétraèdre équifacial.

Le plan $A_2A_3A_4$ a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0 ;$$

l'équation générale de quadriques circonscrites au tétraèdre de centre G prend la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 1 ,$$

avec $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1$. Le rayon r de la sphère inscrite (de centre G) et le rayon R de la sphère circonscrite (de centre G) sont donnés par les formules

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 ,$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} .$$

Les quatre hauteurs et les perpendiculaires menées aux faces en leurs orthocentres respectifs sont tangentes à une même sphère de centre G et de rayon δ:

$$\delta^2 = R^2 - 9r^2 .$$

4. — *Propriété caractéristique des tétraèdres équifaciaux.* — Déterminons le moment d'inertie d'un tétraèdre solide, homogène par rapport à la droite A_1G joignant un sommet au centre de gravité G.

La distance Δ_{12} de A_2 à A_1G est:

$$\Delta_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{A_1G} .$$

Σ_{12} désignant l'aire du triangle ayant pour base A_1A_2 et pour sommet le milieu de A_3A_4. D'où (notations du paragraphe 9):

$$4 \cdot \Delta_{12}^2 \cdot \overline{A_1G}^2 = A_3^2 + A_4^2 + 2\varpi_{34} .$$

Δ_{13} et Δ_{14} désignant la distance à cette même droite A_1G des sommets A_3 et A_4, nous avons:

$$4\overline{A_1G}^2\left(\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{14}^2\right) = 3\left(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2\right) - A_1^2 .$$

Si M est la masse totale du tétraèdre, il suffit pour l'équivalence de prendre quatre masses $\frac{M}{20}$ placées aux sommets et une cinquième masse en G. Le moment d'inertie du corps relativement à la droite A_1G est donc

$$I_1 = \frac{M}{80} \cdot \frac{3(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2) - A_1^2}{\overline{A_1G}^2} .$$

L'ellipsoïde central d'inertie de Cauchy du tétraèdre solide ne saurait donc être en général homothétique à l'ellipsoïde de Steiner. La condition pour que cette disposition soit réalisée est l'égalité des quatre aires des faces.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'ellipsoïde central d'inertie de Cauchy soit homothétique à des ellipsoïdes de Steiner est que le tétraèdre soit équifacial.

5. — *Tétraèdres orthocentriques du système* T. — La condition d'égalité des trois sommes de carrés d'arêtes opposées se traduit par les relations:

$$\cos \varphi = 0 ,$$
$$3(\lambda + \mu) + 2(A + B + C) = 0 ;$$

il faut donc prendre

$$\omega' = 0 , \quad \omega = \frac{\pi}{2} , \quad \rho^2 = -2\lambda , \quad \rho'^2 = -2\mu ,$$

$$\lambda + \mu = -\frac{2}{3}(A + B + C) = -2s ;$$

la somme des carrés d'arêtes opposées est alors:

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 = \frac{16}{3}(A + B + C) .$$

Les arêtes A_1A_2 et A_3A_4 sont tangentes à des lignes de courbure en M et M′. Ces points M et M′ — ainsi que les autres milieux d'arêtes — sont nécessairement situés sur une sphère de centre G:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{A + B + C}{3} = s ; \quad L^2 = M^2 = N^2 = s .$$

On peut remarquer que l'existence de l'orthocentre H implique que les normales aux sommets du tétraèdre (lorsqu'il est orthocentrique) à la quadrique circonscrite (Q′) soient concourantes. Si donc on considère les points d'intersection de la droite A_1A_2 avec la quadrique (Q), avec les notations ci-dessus introduites, la condition de concours des normales en ces deux points à la quadrique Q' se met sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{X}{\alpha} & A & 1 \\ \frac{Y}{\beta} & B & 1 \\ \frac{Z}{\gamma} & C & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{B - C}{\frac{l}{A + \lambda} + \frac{m}{A + \mu}} = 0 ,$$

qui, développée. s'écrit

$$(A - B)(B - C)(C - A)\, lm\, \lambda\mu = 0 .$$

D'où il résulte que $lm = 0$: la droite considérée, tangente en M à la quadrique (Q), doit être une tangente à l'une des deux lignes de courbure de (Q).

Ce résultat peut être obtenu en observant que la condition pour que les normales à une quadrique aux extrémités d'une de ses cordes soient concourantes est que cette corde soit portée par une droite du complexe tétraédral attaché à cette quadrique, ses homothétiques et leurs quadriques homofocales. La droite actuellement considérée doit donc être l'une des deux génératrices d'intersection du cône du complexe tétraédral par le plan tangent en M à (Q): ce sont précisément les deux directions principales en M de la quadrique (Q).

La conclusion est qu'il existe une ∞' de tétraèdres orthocentriques dans le système considéré.

Pour construire un tel tétraèdre orthocentrique, on prendra arbitrairement un point M sur la biquadratique intersection de la quadrique Q avec la sphère concentrique d'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = s = \frac{A + B + C}{3} ;$$

l'arête A_1A_2, *de milieu* M, *sera l'une des deux directions principales en* M ; *l'arête* A_3A_4 *sera la parallèle à l'autre direction principale de* M *menée par le point diamétralement opposé* M' *au point* M.

Le tétraèdre est ainsi complètement déterminé. *Les arêtes appartiennent à un même complexe tétraédral et sont des tangentes à des lignes de courbure de la quadrique* (Q), *tangente aux arêtes en leurs milieux.*

La sphère considérée est la sphère orthoptique de la quadrique inscrite, concentrique et homothétique à Q, *et aussi la première sphère de douze points du tétraèdre.*

6. — *Le lieu de l'orthocentre des tétraèdres* T *orthocentriques.* — La normale au sommet A_1 du tétraèdre à la quadrique circonscrite

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} - 3 = 0$$

peut être représentée paramétriquement par des équations

$$x = X_1\left(1 + \frac{t}{A}\right),$$

tandis que la normale au sommet A_2 est représentée par des équations

$$x = X_2\left(1 + \frac{t'}{A}\right).$$

Mais les coordonnées des sommets étant

$$X_1 = X\left(1 + \frac{\rho l}{A + \lambda}\right), \qquad X_2 = X\left(1 - \frac{\rho l}{A + \lambda}\right), \quad \text{etc.}$$

$$\rho^2 = -2\mu,$$

ces normales se rencontrent :

$$t = \lambda - \rho l, \qquad t' = \lambda + \rho l;$$

les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de leur point de concours, qui n'est autre que l'orthocentre H, sont alors :

$$x_0 = X\frac{(A + \lambda)^2 - l^2\rho^2}{A + \lambda}, \quad \text{etc.}$$

on vérifie que les normales en A_3 et A_4 concourent au même point H. Les coordonnées de H en fonction des coordonnées X, Y, Z du milieu M de l'arête A_1A_2 sont en définitive fournies par les relations

$$\frac{3\,A x_0}{2\,X}(\lambda - \mu) = A(A + B + C) + 3BC - 6\lambda\mu\ ,$$

avec la condition

$$\lambda + \mu = -\frac{2}{3}(A + B + C)\ ,$$

exprimant que, sur l'ellipsoïde Q, *le point* M *a pour lieu une biquadratique sphérique :*

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{A + B + C}{3}\ .$$

Nous poserons:

$$A - B = \gamma\ , \qquad B - C = \alpha\ , \qquad C - A = \beta\ ;$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 0\ ;$$

A, B, C seront considérées comme racines d'une équation cubique

$$A^3 - 3sA^2 + 3qA - p = 0$$

et nous prendrons un paramètre variable θ, défini par:

$$\lambda\mu = q + \frac{A}{3}\ .$$

Soient encore:

$$K = 3(s^2 - q)\ ,$$
$$3\,K = A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3\,K\ , \qquad \alpha^2 + \beta^2 + K^2 = 6\,K\ ,$$
$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = 9\,K^2\ .$$

La biquadratique, lieu des milieux des arêtes, est alors représentée par les formules:

$$\frac{3\,\beta\gamma}{A}X^2 = \beta\gamma - \theta\ , \quad \text{etc.,}$$

ou encore

$$\frac{3(A-B)(A-C)}{A} \cdot X^2 = \wp u - \varepsilon_1 \,, \quad \text{etc.} \ldots$$

les constantes elliptiques étant

$$e_1 = \beta\gamma + K \,, \qquad e_2 = \gamma\alpha + K \,, \qquad e_3 = \alpha\beta + K \,,$$

$$e_1 - e_2 = \gamma(\beta - \alpha) = (A - B)(2C - A - B) \;;$$

$$g_2 = 12K^2 \,, \qquad g_3 = 4(\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2K^3) \;;$$

$$\theta = \wp u - \wp v = \wp u - K \,,$$

$$\wp v = K \,, \qquad \wp'^2 v = -4\alpha^2\beta^2\gamma^2 < 0 \,, \qquad \wp'' v = 0 \,,$$

$$\wp 2v = -2K \,.$$

Pour l'orthocentre H:

$$-A\beta\gamma x_0^2 = \frac{s^2 - \lambda\mu}{A^2 - 2As + \lambda\mu} = (BC + As - 2\lambda\mu)^2 \,,$$

$$9A\beta\gamma x_0^2(\theta - K) = (2\theta + \beta\gamma)^2 \cdot (\theta - \beta\gamma) \,,$$

$$= 4\theta^3 - 3\beta^2\gamma^2\theta - \beta^3\gamma^3 \,,$$

$$9A\beta\gamma x_0^2 = \frac{4\theta^3 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}{\theta - K} - 3\beta^2\gamma^2 \;;$$

introduisons un nouveau paramètre τ, lié à θ par la relation:

$$\frac{4\theta^3 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}{\theta - K} = 3\alpha\beta\gamma\tau \;;$$

nous obtenons finalement les formules suivantes pour la représentation paramétrique du lieu de l'orthocentre H:

$$3Ax_0^2 = \alpha\tau - \beta\gamma \;; \quad \text{etc.}$$

ou encore (les fonctions elliptiques n'étant pas les mêmes que celles utilisées pour la représentation ci-dessus donnée de la biquadratique lieu des milieux des arêtes):

$$A\beta\gamma x_0^2 = \wp u - e_1 ,$$
$$B\gamma\alpha y_0^2 = \wp u - e_2 ,$$
$$C\alpha\beta z_0^2 = \wp u - e_3 ;$$

$$2\alpha\beta\gamma\sqrt{ABC}\, x_0 y_0 z_0 = \wp' u .$$
$$\alpha\beta\gamma\tau = 3(\wp u + K^2) ,$$
$$= 3(\wp u - \wp v) ;$$

les constantes elliptiques sont:

$$3e_1 = \beta^2\gamma^2 - 3K^2 , \quad \wp v - e_1 = -\frac{1}{3}\beta^2\gamma^2 ,$$
$$3e_2 = \gamma^2\alpha^2 - 3K^2 , \quad \wp v - e_2 = -\frac{1}{3}\gamma^2\alpha^2 ,$$
$$3e_3 = \alpha^2\beta^2 - 3K^2 , \quad \wp v - e_3 = -\frac{1}{3}\alpha^2\beta^2 ,$$
$$\wp v = -K^2 , \quad \wp'^2 v = -\frac{4}{27}\alpha^4\beta^4\gamma^4 < 0 , \quad \wp'' v = \frac{4}{3}\alpha^2\beta^2\gamma^2 .$$
$$\left(\frac{\wp'' v}{\wp' v}\right)^2 = -12 , \quad \wp 2v = 2K^2 - 3 .$$
$$3(e_1 - e_2) = \gamma^3(\alpha - \beta) = (A - B)^3(A + B - 2C) ; \quad e_1 - e_2 = \gamma(J - CK) ,$$
$$g_2 = \frac{4}{3}K(9K^3 - 2\alpha^2\beta^2\gamma^2) ,$$
$$g_3 = \frac{4}{27}\left[(\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 9K^3)^2 - 27K^6\right] .$$

Supposons $A > B > C$; les points réels de la biquadratique (H) correspondent aux points de l'ovale de la cubique de Weierstrass.

Il y a dégénérescence lorsque $A + C = 2B$. C'est en même temps le cas de dégénérescence des fonctions elliptiques représentatives du lieu des milieux des arêtes des tétraèdres orthocentriques T.

Le lieu de l'orthocentre est ainsi une biquadratique gauche définie par les quadriques:

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = K \ ,$$

$$A^2x_0^2 + B^2y_0^2 + C^2z_0^2 = J \ ,$$

avec:

$$J = 3\,ABC + 9\,s^3 - 12\,qs = 3\,(ABC + Ks - qs) \ ;$$

$$-3\,J = A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta \ ;$$

à signaler aussi la quadrique

$$\Sigma\, A\,(B + C)\,x_0^2 = 3\,(sq - p)$$

ainsi que le cône de sommet G dirigé par la biquadratique:

$$\Sigma\, A\,(B - C)^2\,(B + C - 2\,A)\,x_0^2 = 0 \ .$$

La courbe est à comparer à la *polhodie de Poinsot*, pour l'analogie des équations. Le plan tangent à la quadratique

$$\Sigma\, Ax_0^2 = K \ ,$$

le long de cette biquadratique reste tangent à une sphère de centre G.

Il y a décomposition en deux coniques symétriques dans le cas singulier de dégénérescence des fonctions elliptiques $A + C = 2B$. Les ellipsoïdes fondamentaux $EE'E''E'''$ liés au système des tétraèdres sont à hyperbole focale équilatère. L'ellipsoïde

$$\Sigma\, Ax_0^2 = K \ ,$$

polaire réciproque de E par rapport à une sphère concentrique, a ses plans cycliques orthogonaux, sous cette condition

$$A + C = 2\,B \ , \qquad \alpha = \gamma \ .$$

Le cône se décompose alors en deux plans passant par l'axe moyen:

$$\sqrt{A}\,x_0 = \pm \sqrt{C}\,z_0 \ .$$

Le cône de sommet G et contenant la biquadratique lieu des milieux des arêtes se décompose en même temps en les deux plans:

$$\sqrt{C}\,X = \pm \sqrt{A}\,Z\,.$$

7. — *Les deux autres normales issues de l'orthocentre.* — Lorsque le tétraèdre T est orthocentrique, quatre des normales issues de l'orthocentre H à l'ellipsoïde E circonscrit sont les hauteurs du tétraèdre. Voici des propriétés des deux autres normales, *qui sont d'ailleurs réelles.*

Si la cubique des normales relatives à l'ellipsoïde de Steiner E (j'ai précédemment spécifié que parmi l'infinité d'ellipsoïdes circonscrits de centre G, je donnais le nom d'ellipsoïde de Steiner à celui dont les plans tangents sont parallèles aux faces du tétraèdre, parce que cet ellipsoïde seul généralise l'ellipse steinerienne circonscrite de la Géométrie du triangle) est représentée par les équations

$$x_0 = x\left(1 + \frac{t}{A}\right) \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{Ax_0}{t + A}\,,$$

l'équation du problème des normales est l'équation du sixième degré

$$\sum \frac{Ax_0^2}{(t + A)^2} = 3\,.$$

Soient $t_1 t_2 t_3 t_4$ les paramètres correspondant aux quatre sommets $A_1A_2A_3A_4$ et $t_5 t_6$ les deux autres solutions M_5M_6. Nous avons les relations telles que

$$A\beta^2\gamma^2 x_0^2 = -3(A + t_1)(A + t_2)(A + t_3)(A + t_4)(A + t_5)(A + t_6)\;;$$

d'autre part

$$x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)\cdot\frac{Ax_0}{(A + t_1)(A + t_2)}\,,$$

$$2X = x_1 + x_2 = Ax_0\left(\frac{1}{A + t_1} + \frac{1}{A + t_2}\right).$$

La condition d'orthogonalité d'un couple d'arêtes opposées (à remarquer que cette condition est unique) du tétraèdre prend la forme

$$\sum \frac{A^2 x_0^2}{(A + t_1)(A + t_2)(A + t_3)(A + t_4)} = 0$$

et se met finalement sous la forme

$$\Sigma A \alpha^2 (A + t_5)(A + t_6) = 0$$

établissant une relation involutive entre t_5 et t_6. De même en écrivant que M, milieu de A_1A_2, est sur la quadrique E'', nous obtenons la relation

$$\sum \frac{A x_0^2}{(A + t_1)(A + t_2)} = -1 ,$$

qui, combinée avec la relation analogue entre t_3 et t_4, donne, compte tenu de la relation d'orthogonalité,

$$\sum \frac{A x_0^2}{(A + t_1)(A + t_2)(A + t_3)(A + t_4)} = 0 .$$

L'autopolarité du tétraèdre par rapport à E''' conduirait d'ailleurs au même résultat. D'où une nouvelle relation involutive entre t_5 et t_6:

$$\Sigma \alpha^2 (A + t_5)(A + t_6) = 0 .$$

En résumé, les trois expressions $\alpha^2(A + t_5)(A + t_6)$ sont proportionnelles à B — C, C — A, A — B et par suite les trois expressions

$$\alpha (A + t_5)(A + t_6) ,$$

sont égales entre elles. D'où:

$$t_5 + t_6 = -2s , \qquad t_5 \cdot t_6 = q ;$$

t_5 et t_6 sont les racines de l'équation du second degré

$$t^2 + 2st + q = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \cdot (t^3 + 3st^2 + 3qt + p) = 0 ,$$

dérivée de l'équation cubique ayant — A, — B, — C pour racines

$$\frac{1}{t+A}+\frac{1}{t+B}+\frac{1}{t+C}=0\ ;$$

$$(t_5-t_6)^2=\frac{4}{3}K>0\ .$$

$$(A+t_5)(A+t_6)=-\frac{\beta\gamma}{3}\ .$$

Les points M_5M_6 sont toujours réels. Le milieu de la corde M_5M_6 a pour coordonnées ξ, η, ζ:

$$\xi=\frac{A(\beta-\gamma)}{\beta\gamma}x_0\ ,\quad \text{etc.},$$

il décrit donc une biquadratique gauche affine au lieu de l'orthocentre H. Le faisceau des quadriques définissant cette nouvelle biquadratique a pour équation:

$$\sum\frac{\beta^2\gamma^2}{(\beta-\gamma)^2}\left(1+\frac{\varphi}{A}\right)\xi^2=J+\varphi K\ ;$$

le cône de sommet G:

$$\sum\frac{\xi^2}{A(B+C-2A)}=0\ .$$

8. — *Lieu des sommets des tétraèdres orthocentriques.* — Moins simple est le lieu des sommets des tétraèdres orthocentriques.

Les plans des faces enveloppent une développable circonscrite à E′ et à la surface polaire réciproque de la surface normopolaire de la quadrique circonscrite. Les sommets A_i sont situées *sur la courbe d'intersection de* E *et d'une surface homothétique à la surface normopolaire de* E.

Les calculs relatifs à la surface normopolaire montrent que l'on a tout d'abord les relations suivantes pour M_5 et M_6:

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=3\ ,$$

$$\frac{x}{Ax_0}+\frac{y}{By_0}+\frac{z}{Cz_0}=0\ ,$$

la droite M_5M_6 est donc l'intersection de ces deux plans: d'où les expressions des coordonnées de cette droite. En outre, on obtient pour les sommets le lieu

$$\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right)\left(\frac{x^2}{A} - \frac{1}{3}\right) = 0 \ ;$$

(c'est la surface déduite de la surface normopolaire en écrivant que le point de coordonnées $-3x$, $-3y$, $-3z$ est sur la surface normopolaire). Le lieu des sommets du tétraèdre est ainsi la courbe d'intersection de la quadrique

$$\sum \frac{x^2}{A} = 3$$

et de la surface du quatrième degré:

$$\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^2}{A} - 3\right)\left(\frac{x^2}{A} - \frac{1}{3}\right) = 0 \ .$$

II. — La géométrie des quadruplets.

9. — *Généralités.* — Soit un tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$. Nous désignerons par A_i l'aire de la face opposée au sommet A_i et par a_{ij} la longueur de l'arête joignant les sommets A_i et A_j. V désignera le volume du tétraèdre.

L'équation d'un plan quelconque P en coordonnées barycentriques étant $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$, les coordonnées u_i du plan seront les distances respectives de ce plan aux sommets A_i du tétraèdre, sous l'unique condition que ces coordonnées u_i satisfassent à la relation fondamentale:

$$\Phi = 9V^2 \ ,$$

dans laquelle Φ représente la forme quadratique suivante à 6 termes

$$\Phi = \Sigma \varpi_{ij} (u_i - u_j)^2 \ .$$

les ϖ_{ij} sont 6 coefficients, liés aux aires de faces par les quatre relations:

$$A_1^2 = \varpi_{12} + \varpi_{13} + \varpi_{14} ,$$
$$A_2^2 = \varpi_{21} + \varpi_{23} + \varpi_{24} ,$$
$$A_3^2 = \varpi_{31} + \varpi_{32} + \varpi_{34} ,$$
$$A_4^2 = \varpi_{41} + \varpi_{42} + \varpi_{43} ,$$
$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji} .$$

Les distances n'intervenant dans la relation fondamentale que par leurs différences mutuelles (ce qui exprime que la relation reste invariante lorsque le plan P se déplace parallèlement à lui-même) il y a intérêt à introduire les 6 fonctions suivantes:

$$U_{ij} = u_i - u_j ,$$

avec $U_{ij} = - U_{ji}$. Alors Φ prend la forme

$$\Phi = \Sigma\varpi_{ij} U_{ij}^2 .$$

L'équation tangentielle du cercle à l'infini est:

$$\Phi = 0 .$$

Les coordonnées barycentriques x_i d'un point quelconque M de l'espace et celles x_i' d'un second point quelconque M' étant supposées multipliées par deux facteurs non déterminés, nous poserons:

$$\Delta x_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} - \frac{x_i'}{x_1' + x_2' + x_3' + x_4'} .$$

Dans le cas particulier de coordonnées barycentriques absolues, $\Sigma x_i = \Sigma x_i' = V$, l'expression précédente se réduit à

$$\Delta x_i = \frac{x_i - x_i'}{V} ;$$

ou encore si les coordonnées absolues ont été réduites par division par V, $\Sigma x_i = \Sigma x_i' = 1$, l'expression précédente est $\Delta x_i = x_i - x_i'$.

En prenant, en tout cas, l'expression générale de Δx_i, la distance de deux points quelconques MM' est donnée en coordonnées barycentriques par la formule à six termes:

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = - \Sigma a_{12}^2 \Delta x_1 \,.\, \Delta x_2 \,.$$

L'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre en résulte immédiatement:

$$\Sigma a_{ij}^2 \Delta x_i \,.\, \Delta x_j = 0 \;;$$

les coefficients sont les carrés des longueurs des arêtes du tétraèdre.

Si quatre masses (m_1, m_2, m_3, m_4) sont respectivement placées aux sommets du tétraèdre de référence, le centre des masses Γ a des coordonnées barycentriques proportionnelles aux quatre nombres m_i. Inversement tout point de l'espace peut être considéré comme étant centre de quatre masses placées aux sommets A_i et proportionnelles aux coordonnées barycentriques du point.

Soit maintenant un plan quelconque P; ses coordonnées u_i sont supposées vérifier la relation fondamentale; elles représentent dès lors les distances respectives du plan aux sommets du tétraèdre. En outre, la distance d'un point quelconque de l'espace de coordonnées barycentriques proportionnelles à des nombres x_i est

$$\mathrm{D} = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \,.$$

Le moment d'inertie I par rapport au plan P du système matériel constitué par les quatre masses m_i placées aux sommets A_i du tétraèdre est donc égal à

$$\mathrm{I} = \Sigma m_i u_i^2 \,.$$

Si le plan P passe par le centre Γ des masses,

$$\Sigma m_i u_i = 0 \;,$$

on peut écrire (avec la masse totale M)

$$\begin{aligned} \mathrm{MI} &\equiv (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + m_3 u_3^2 + m_4 u_4^2) \\ &\quad - (m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4)^2 \\ &\equiv \Sigma m_i m_j (u_i - u_j)^2 . \end{aligned}$$

Par suite, pour un plan quelconque passant par Γ, l'expression du moment d'inertie planaire I prend la forme:

$$\mathrm{MI} = \Sigma m_i m_j \mathrm{U}_{ij}^2 .$$

10. — *Détermination des axes de l'ellipsoïde central d'inertie du quadruplet.* — I est une fonction de deux variables quand le plan P pivote autour du centre Γ. Posons

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv \mathrm{I} + 2\sigma \cdot \Sigma m_i u_i - \rho \sum \varpi_{ij} \mathrm{U}_{ij}^2 ;$$

et écrivons les quatre équations de maximum — minimum:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 .$$

$$m_1 (u_1 + \sigma) + \rho\left(-\mathrm{A}_1^2 u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4\right) = 0 . \quad \text{etc.}$$

En ajoutant membre à membre ces quatre équations linéaires, il vient $\mathrm{M}\sigma = 0$; et, par suite, en général, le paramètre σ doit être pris égal à zéro. Le système des quatre équations linéaires et homogènes, en u_i

$$\left(\frac{m_1}{\rho} - \mathrm{A}_1^2\right) u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4 = 0 ,$$

conduit à l'équation suivante du troisième degré en ρ:

$$\begin{vmatrix} \frac{m_1}{\rho} - \mathrm{A}_1^2 & \varpi_{12} & \varpi_{13} & \varpi_{14} \\ \varpi_{21} & \frac{m_2}{\rho} - \mathrm{A}_2^2 & \varpi_{23} & \varpi_{24} \\ \varpi_{31} & \varpi_{32} & \frac{m_3}{\rho} - \mathrm{A}_3^2 & \varpi_{34} \\ \varpi_{41} & \varpi_{42} & \varpi_{43} & \frac{m_4}{\rho} - \mathrm{A}_4^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

A chaque racine de cette équation correspond un système de coordonnées (u_i) d'un plan principal d'inertie au centre Γ.

Comme les équations linéaires ne sont autres que les équations

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial u_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0 \ ,$$

en les ajoutant membre à membre, après multiplications respectives par les u_i, il vient

$$\frac{1}{\rho}\,\mathrm{I} - \Phi = 0 \ ; \qquad \Phi = 9\mathrm{V}^2$$

et par suite

$$\rho = \frac{\mathrm{I}}{9\mathrm{V}^2} \ .$$

L'équation cubique en ρ n'est autre, à un facteur près affectant l'inconnue, que l'équation aux moments d'inertie centraux (moments planaires).

Le développement du déterminant du quatrième ordre donne:

$$\mathcal{R}_0\,\rho^3 - \mathcal{R}_1\,\rho^2 + \mathcal{R}_2\,\rho - m_1 m_2 m_3 m_4 = 0$$

avec

$$\mathcal{R}_0 = \sum m_1 (\mathrm{A}_2^2 \mathrm{A}_3^2 \mathrm{A}_4^2 - 2\varpi_{23}\varpi_{24}\varpi_{34} - \mathrm{A}_2^2\varpi_{34} - \mathrm{A}_3^2\varpi_{24} - \mathrm{A}_4^2\varpi_{32}) \ ,$$

$$\mathcal{R}_1 = \sum m_i m_j (\mathrm{A}_i^2 \mathrm{A}_j^2 - \varpi_{ij}^2) \ ,$$

$$\mathcal{R}_2 = \sum \mathrm{A}_1^2 m_2 m_3 m_4 = m_1 m_2 m_3 m_4 \sum \frac{\mathrm{A}_i^2}{m_i} \ .$$

Mais les formules (avec les diêdres ζ_{ij})

$$\varpi_{12} = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \cos \zeta_{34} \ , \quad \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \sin \zeta_{34} = \frac{3}{2}\,\mathrm{V} a_{34} \ ,$$

transforment $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ en les expressions suivantes:

$$\mathcal{R}_0 = \sum m_1 \,.\, \mathrm{A}_2^2 \mathrm{A}_3^2 \mathrm{A}_4^2 (1 - \cos^2 \zeta_{12} - \cos^2 \zeta_{13} - \cos^2 \zeta_{14} -$$
$$2 \cos \zeta_{12} \cos \zeta_{13} \cos \zeta_{14}) \ ,$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{9}{4}\,\mathrm{V}^2 \cdot \sum m_i m_j a_{ij}^2 \ ;$$

l'expression trigonométrique entre parenthèses dans l'expression de $\mathcal{R}_0$ n'est autre que le carré du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre A_1. L'expression de ce sinus est:

$$\Omega'_1 = \frac{9}{2} \cdot \frac{V^2}{A_2 A_3 A_4} ,$$

ce qui réduit $\mathcal{R}_0$ à la valeur

$$\mathcal{R}_0 = \frac{81}{4} MV^2 .$$

Finalement *l'équation aux moments planaires centraux d'inertie du quadruplet est:*

$$I = M\omega ,$$

$$\omega^3 - \omega_0 \omega^2 + \omega_1 \omega - \frac{36 V^2}{M^4} m_1 m_2 m_3 m_4 = 0 ;$$

les coefficients ω_0, ω_1 de l'équation cubique en ω ayant pour expressions:

$$M^2 \omega_0 = \sum a_{ij}^2 m_i m_j .$$

$$\omega_1 = \frac{4 m_1 m_2 m_3 m_4}{M^3} \cdot \sum \frac{A_i^2}{m_i} .$$

La puissance du point Γ par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre a pour expression

$$\mathfrak{T} = -\frac{1}{M^2} \sum a_{ij}^2 m_i m_j ;$$

ainsi le moment d'inertie polaire en Γ, égal à $M\omega_0$, a pour expression $- M . \mathfrak{T}$.

Le moment d'inertie polaire du quadruplet au centre des masses Γ *est égal au produit par la masse totale de la puissance, changée de signe, du centre* Γ *par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre.*

Cette proposition se déduit du reste de la remarque que le moment d'inertie polaire au centre O de la sphère circonscrite (de rayon R) est MR^2. Au centre de gravité Γ du système matériel, le moment polaire prend donc la valeur $M(R^2 - \overline{O\Gamma}^2)$, c'est-à-dire $- M . \mathfrak{T}$.

Si, d'autre part, I (coordonnées A_i) est le centre de la sphère inscrite (rayon r) au tétraèdre et si D_I et D_Γ représentent respectivement les distances du centre I et du centre des masses Γ au plan polaire du point I par rapport à la quadrique conjuguée $\sum \frac{X_i^2}{m_i} = 0$ de centre Γ, les relations

$$3V = r \cdot \Sigma A_i , \qquad MD_\Gamma = \Sigma A_i ,$$

$$rD_\Gamma = \frac{3V}{M} ,$$

$$\frac{3V}{r} \cdot D_I = \sum \frac{A_i^2}{m_i} ,$$

$$M \cdot D_\Gamma \cdot D_I = \sum \frac{A_i^2}{m_i} ,$$

conduisent à d'intéressantes interprétations géométriques du coefficient ω_1.

Le coefficient ω_0 est nul, lorsque Γ est sur la sphère circonscrite et réciproquement.

Le coefficient ω_1 est nul lorsque Γ est sur la surface, du troisième degré d'équation

$$\sum \frac{A_i^2}{m_i} = 0$$

et réciproquement. Cette surface généralise le cercle circonscrit au triangle: dans la transformation inverse (généralisant la transformation isogonale du plan) elle est la transformée du plan de l'infini. Elle est aussi la généralisation du cercle circonscrit au triangle, sous le point de vue du théorème des droites de Simon-Wallace.

En résumé, les formules relatives aux trois moments centraux d'inertie en Γ sont:

$$\left\{ \begin{aligned} & M(I + I' + I'') = \sum a_{ij}^2 m_i m_j , \\ & M(I I' + I' I'' + I'' I) = 4 m_1 m_2 m_3 m_4 \sum \frac{A_i^2}{m_i} , \\ & M \cdot I I' I'' = 36 V^2 m_1 m_2 m_3 m_4 . \end{aligned} \right.$$

11. — *Application au tétraèdre solide et homogène.* — La masse totale du tétraèdre étant M, nous prenons aux sommets quatre masses égales:

$$m_i = \frac{M}{20},$$

la cinquième masse en G n'intervenant pas dans les calculs des moments d'inertie centraux. Les formules relatives aux carrés des rayons de gyration ω, ω' et ω'' sont:

$$I = M\omega ,$$

$$16(\omega + \omega' + \omega'') = \sum a_{ij}^2 ,$$

$$16(\omega\omega' + \omega'\omega'' + \omega''\omega) = \sum A_i^2 ,$$

$$\omega\omega'\omega'' = \frac{9}{64} V^2 .$$

12. — D'une manière générale, les cosinus directeurs (δ_i) d'une direction définie comme orthogonale à un plan donné (u_i) sont donnés par la formule:

$$\delta_i = -\frac{1}{2\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

c'est-à-dire:

$$9V^2 \cdot \delta_i = -A_1^2 u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4 .$$

Dans le cas actuel, d'un axe de symétrie de la quadrique d'inertie de centre (m_i), l'équation trouvée précédemment

$$\left(\frac{m_1}{\rho} - A_1^2\right) u_1 + \varpi_{12} u_2 + \varpi_{13} u_3 + \varpi_{14} u_4 = 0 ,$$

conduit à la formule

$$\delta_i = -\frac{m_i u_i}{I} ;$$

la condition $\Sigma \delta_i = 0$ qui exprime que (δ_i) sont des coordonnées du point à l'infini de l'axe est équivalente à celle, $\Sigma m_i u_i = 0$ qui exprime que le plan principal contient le centre de la quadrique d'inertie.

Tout plan donné peut être considéré comme plan central d'inertie pour un choix convenable du centre Γ des quatre masses. A tout plan donné, peut être associé un point de ce plan, qui est le centre Γ et dont les coordonnées seront définies par les formules

$$m_i = \frac{\psi}{u_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_i},$$

ψ *étant arbitraire.*

Il en résulte:

$$\Sigma m_i u_i = 0 \;;$$

et si les u_i sont les distances aux sommets, il vient pour le moment d'inertie central correspondant, l'expression suivante:

$$\mathrm{I} = \sum m_i u_i^2 = 2\psi\Phi, \qquad \mathrm{I} = 18\mathrm{V}^2 \cdot \psi .$$

13. — *Lieu du centre Γ des masses associé à un plan se déplaçant parallèlement à une direction donnée.* — Prenons un plan de coordonnées $u_i + \lambda$, λ étant un paramètre variable. La direction de la perpendiculaire (δ_i) à ce plan est invariable. Le lieu de Γ, associé à ce plan variable, est défini par les équations

$$m_i = \frac{\delta_i}{u_i + \lambda},$$

qui représentent une *cubique gauche, circonscrite au tétraèdre.* La cubique a pour points à l'infini le point de paramètre λ infini, de coordonnées δ_i et qui n'est autre que le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à ces plans. Les deux autres points à l'infini de la cubique ont des paramètres définis par l'équation du second degré:

$$\sum_1^4 \frac{\delta_i}{u_i + \lambda} = 0 .$$

De l'identité

$$\sum m_i u_i = -\lambda \cdot \sum \frac{\delta_i}{u_i + \lambda},$$

il résulte que le plan $\lambda = 0$, rencontre la cubique au point $\Gamma\left(m_i = \frac{\delta_i}{u_i}\right)$ qui lui est associé et aux deux points à l'infini qui viennent d'être mis en évidence.

Tout plan de la direction donnée rencontre la cubique en le point Γ *associé et en deux points à l'infini.*

14. — *Questions relatives aux axes centraux.* — Les coordonnées plückériennes de l'axe central d'inertie Δ, perpendiculaire au plan (u_i) au centre associé Γ sont, à un facteur près:

$$p_{12} = m_3 m_4 \mathrm{U}_{34} = m_3 m_4 (u_3 - u_4) .$$

Dans un tétraèdre quelconque, un axe central Δ *peut-il passer par le sommet* A_1 ?

Les conditions

$$p_{12} = 0 , \qquad p_{13} = 0 , \qquad p_{14} = 0$$

exigent que $u_2 = u_3 = u_4$. Le plan doit être parallèle à la face opposée et Δ coïncide avec la hauteur $\mathrm{A}_1\mathrm{H}_1$.

Un axe central Δ *peut-il rencontrer l'arête* $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$?

$$p_{12} = 0 , \qquad u_3 = u_4 ;$$

le plan doit être parallèle à l'arête $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ et réciproquement.

Cas d'un plan parallèle à deux arêtes opposées $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ *et* $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$.

$$u_1 = u_2 , \qquad u_3 = u_4 , \qquad p_{12} = 0 , \qquad p_{34} = 0 .$$

L'axe central d'inertie perpendiculaire à un tel plan, au centre Γ associé, est la perpendiculaire commune aux deux arêtes considérées. D'où la construction géométrique du centre Γ.

La cubique gauche lieu des centres Γ associés aux plans ayant cette direction commune dégénère en une droite Δ.

III. — La géométrie des masses du tétraèdre orthocentrique.

15. — Pour un tétraèdre quelconque, la formule à six termes

$$\overline{MM'}^2 = - \Sigma a_{ij}^2 \Delta x_i \Delta x_j$$

donnant le carré de la distance de deux points ne peut pas être mise sous la forme

$$\overline{MM'}^2 = \sigma \cdot \Sigma \lambda_i \cdot (\Delta x_i)^2$$

analogue à celle de la géométrie plane. Puisque $\Sigma \Delta x_i = 0$, l'existence d'une telle formule entraîne la relation

$$0 = \sigma \Sigma \lambda_i (\Delta x_i)^2 + \Sigma a_{ij}^2 \Delta x_i \Delta x_j \equiv \sigma \Sigma \lambda_i \cdot \Sigma (\Delta x_i) ,$$

ce qui exige

$$a_{ij}^2 = \sigma (\lambda_i + \lambda_j) ,$$

et par suite:

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 = a_{13}^2 + a_{24}^2 = a_{14}^2 + a_{23}^2 = \sigma (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) ;$$

les sommes des carrés d'arêtes opposées sont égales et le tétraèdre est orthocentrique.

Le tétraèdre orthocentrique est caractérisé par l'existence de quatre nombres $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ tels que

$$a_{ij}^2 = \sigma (\lambda_i + \lambda_j) .$$

Il en résulte que les aires des quatre faces sont données par les formules:

$$4 A_1^2 = \sigma^2 (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_4 \lambda_2) \quad \text{etc.,}$$

ce qui exige que les paramètres ϖ_{ij} aient les expressions suivantes :

$$4 \varpi_{12} = \sigma^2 \cdot \lambda_3 \lambda_4 , \quad \text{etc.} \ldots$$

On a enfin la condition

$$36\,V^2 = \sigma^3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \sum \frac{1}{\lambda_i} \,.$$

La condition de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre quelconque

$$(A_1\,H) \qquad \frac{x_2}{\varpi_{12}} = \frac{x_3}{\varpi_{13}} = \frac{x_4}{\varpi_{14}} \,,$$

est

$$\varpi_{12} \cdot \varpi_{34} = \varpi_{13} \cdot \varpi_{24} = \varpi_{14} \cdot \varpi_{23} \;;$$

elle exige que ϖ_{ij} soit de la forme $\varpi_{ij} = \rho \cdot \mu_i \cdot \mu_i$ avec quatre paramètres μ_i, ce qui revient à prendre, avce les notations ci-dessus:

$$4\varpi_{12} = \sigma^2 \lambda_3 \lambda_4 \,.$$

Dans ces conditions, si les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont (H_i) avec $\Sigma\,H_i = 1$, on devra poser:

$$H_i = \frac{1}{\lambda_i} \,,$$

avec:

$$\sigma^3 = 36\,V^2 \cdot H_1 H_2 H_3 H_4 \,.$$
$$36\,V^2 = \sigma^3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \,.$$

16. — *Forme spéciale de l'équation cubique pour les tétraèdres orthocentriques.* — Considérons le produit

$$\Pi = \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_1 \theta_1\right)^{m_1} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_2 \theta_2\right)^{m_2} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_3 \theta_3\right)^{m_3} \cdot$$
$$\cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_4 \theta_4\right)^{m_4} \,,$$

avec des paramètres σ et θ_i non précisés pour le moment. L'équation $\frac{d\Pi}{d\omega} = 0$ s'écrit

$$\sum \frac{m_i}{M\omega - \sigma m_i \theta_i} = 0 \,,$$

$$M\omega^3 - \mathcal{P}\omega^2 + \mathcal{Q}\omega - \mathcal{R} = 0 \,,$$

avec

$$\mathcal{P} = \frac{\sigma}{M} \cdot \Sigma\, \theta_1 m_1 (m_2 + m_3 + m_4) \ ,$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\sigma^2}{M^2} \cdot \Sigma\, m_1 (m_2 m_3\, \theta_2 \theta_3 + m_3 m_4\, \theta_3 \theta_4 + m_4 m_2\, \theta_4 \theta_2) \ ,$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma^3}{M^3}\, m_1 m_2 m_3 m_4\, \Sigma\, \theta_2 \theta_3 \theta_4 \ .$$

Elle est identique à celle donnant les moments d'inertie centraux du quadruplet (m_i) si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément:

$$\begin{cases} \Sigma\, m_i m_j \left[\sigma(\theta_i + \theta_j) - a_{ij}^2\right] = 0 \ , \\ \Sigma\, m_2 m_3 m_4 \left[\sigma^2 (\theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_4 + \theta_4 \theta_2) - 4 A_1^2\right] = 0 \ , \\ \sigma^3\, \Sigma\, \theta_2 \theta_3 \theta_4 = 36\, V^2 \ . \end{cases}$$

Ces conditions sont remplies quelles que soient les masses m_i si le tétraèdre est orthocentrique avec $\theta_i = \lambda_i$.

Ainsi donc — et c'est encore une propriété caractéristique des tétraèdres orthocentriques — *l'équation en* $\omega = \frac{I}{M}$ *aux moments centraux planaires d'inertie dans le cas d'un quadruplet disposé aux sommets d'un tétraèdre orthocentrique est identique à l'équation donnant les maximum et minimum de la fonction suivante* $\Pi(\omega)$:

$$\Pi \left(\omega - \frac{\sigma}{M} \cdot m_i \lambda_i\right)^{m_i} .$$

17. — Une propriété analogue est à signaler pour la géométrie plane. Pour un triangle quelconque, on aura à considérer l'équation aux maximum — minimum du produit:

$$\Pi = \left(\omega - \frac{\sigma}{M} \alpha p\right)^{\alpha} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} \beta q\right)^{\beta} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} \gamma r\right)^{\gamma} ,$$

α, β, γ sont les masses placées aux sommets du triangle ABC; $M = \alpha + \beta + \gamma$, la masse totale; $\sigma = 2S$; $I = M\omega$; $p = \operatorname{cotg} A$, $q = \operatorname{cotg} B$, $r = \operatorname{cotg} C$; $a^2 = \sigma(q + r)$, etc. Toutes ces formules sont analogues à celles relatives au tétraèdre orthocentrique.

18. — *Formules spéciales au tétraèdre orthocentrique.* — Les calculs de la Géométrie des masses, en coordonnées barycentriques, se présentent généralement sous une forme simplifiée lorsque le tétraèdre de référence est orthocentrique. Nous poserons en introduisant quatre paramètres α_i

$$a_{ij}^2 = \alpha_i + \alpha_j \,, \qquad 4\varpi_{12} = \alpha_3\alpha_4 \,, \quad \text{etc.}$$

les coordonnées de l'orthocentre H seront $H_1H_2H_3H_4$:

$$\alpha_1 H_1 = \alpha_2 H_2 = \alpha_3 H_3 = \alpha_4 H_4 = h \,,$$
$$H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 1$$
$$h = \sum \frac{1}{\alpha_i} \,.$$

Pour le volume V du tétraèdre fondamental:

$$h^3 = 36V^2 \cdot H_1 H_2 H_3 H_4 \,,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 36V^2 h \;;$$
$$A_1^2 = \frac{9V^2}{h} H_1(1 - H_1) \,, \qquad \varpi_{12} = \frac{9V^2}{h} \cdot H_1 H_2 \,.$$

Les hauteurs h_i des tétraèdres:

$$h_i^2 = \frac{\alpha_i}{1 - H_i} = \frac{h}{H_i(1 - H_i)}$$

La distance MM′ de deux points $M(x_i)$ et $M'(x'_i)$ est généralement dans le cas du tétraèdre orthocentrique

$$\overline{MM'}^2 = \Sigma\, \alpha_i \cdot (\Delta x_i)^2 \,,$$
$$\Sigma\, x_i = 1 \,, \qquad \Sigma\, x'_i = 1 \,, \qquad \Delta x_i = x_i - x'_i \,.$$

En particulier, la distance d'un point quelconque $M(x_i)$ de l'espace à l'orthocentre H prend la forme:

$$\overline{HM}^2 = -h + \Sigma\, \alpha_i x_i^2 \,, \qquad \Sigma\, x_i = 1 \;;$$

le rayon ρ de la sphère conjuguée est défini par la relation

$$\rho^2 = -h \;;$$

l'équation de la sphère conjuguée est:

$$\Sigma \alpha_i x_i^2 = 0 .$$

La formule donnant la distance $r = \mathrm{HM}$ d'un point quelconque M à l'orthocentre est donc

$$r^2 - \rho^2 = \Sigma \alpha_i x_i^2 .$$

Distances de l'orthocentre aux sommets A_i du tétraèdre :

$$\overline{\mathrm{HA}}_i^2 = \alpha_i - h .$$

Soit α le rayon de la première sphère des douze points, dont le centre est le centre G de gravité du tétraèdre homogène:

$$\overline{\mathrm{GH}}^2 = \alpha^2 + \rho^2 , \qquad \mathrm{GH} = \mathrm{OG} .$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 16\alpha^2 ,$$

$$\Sigma a_{ij}^2 = 48\alpha^2 .$$

Si R est le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre de centre O:

$$\overline{\mathrm{OH}}^2 = 4(\alpha^2 + \rho^2) = \mathrm{R}^2 + 3\rho^2 , \qquad \overline{\mathrm{OG}}^2 = \alpha^2 + \rho^2 = \mathrm{R}^2 - 3\alpha^2 ,$$

$$\mathrm{R}^2 = 4\alpha^2 + \rho^2 ,$$

$$\Sigma \overline{\mathrm{HA}}_i^2 = 4\mathrm{R}^2 .$$

Les coordonnées O_i du centre de la sphère circonscrite O sont définies par les équations

$$\Sigma \mathrm{O}_i = 1 , \qquad \mathrm{H}_i + \mathrm{O}_i = \frac{1}{2} .$$

19. — Avec les notations précédentes, l'équation cubique aux moments d'inertie centraux I pour un centre des masses Γ_i est celle qui donne le maximum ou le minimum du produit:

$$\Pi (\mathrm{I} - m_i \alpha_i)^{m_i} ,$$

c'est-à-dire l'équation :

$$\sum_1^4 \frac{m_i}{\mathrm{I} - m_i \alpha_i} = 0 .$$

Sous cette forme — spéciale aux tétraèdres orthocentriques — il est manifeste que les racines sont réelles; elles sont séparées par les nombres $m_i \alpha_i$.

Les moments principaux centraux étant I_1, I_2, I_3, on a pour le tétraèdre orthocentrique :

$$M(I_1 + I_2 + I_3) = M \cdot \Sigma m_i \alpha_i - \Sigma \alpha_i m_i^2 \ ;$$

$$M(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1) = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 m_1 m_2 (m_3 + m_4) \ ;$$

$$M I_1 I_2 I_3 = 36 V^2 m_1 m_2 m_3 m_4 \ .$$

Pour que l'ellipsoïde central d'inertie en Γ soit une sphère, il faut que la quadrique conjuguée au tétraèdre, de centre Γ soit une sphère: ce qui exige que le tétraèdre soit orthocentrique et que Γ soit l'orthocentre H. Pour $m_i = H_i$, l'équation cubique a bien une racine triple $I = h$.

Dans un tétraèdre orthocentrique, l'équation du cercle de l'infini se simplifie:

$$\Phi = \Sigma \varpi_{ij} (u_i - u_j)^2 = \frac{9 V^2}{h} [\Omega - \Pi^2] \ ,$$

en posant:

$$\Omega = \Sigma H_i u_i^2 \ , \qquad \Pi = \Sigma H_i u_i \ ;$$

$\Pi = 0$ est l'équation tangentielle de l'orthocentre; $\Omega = 0$ est l'équation tangentielle de la sphère conjuguée. La condition pour que les u_i soient les distances aux sommets du plan (u_i) est donc:

$$\Phi = 9 V^2 \ , \qquad \Omega - \Pi^2 = h \ .$$

La condition entre les cosinus directeurs $h_i \delta_i$ d'une direction quelconque avec les hauteurs du tétraèdre, est dans le cas des tétraèdres orthocentriques

$$- \Delta \equiv \Sigma \alpha_i \delta_i^2 = 1 \ .$$

La perpendiculaire au plan u_i est définie par les relations

$$\alpha_i \delta_i = \Pi - u_i \ ,$$

ou

$$h \delta_i = H_i (\Pi - u_i) \ ,$$

les u_i satisfaisant à la condition $\Phi = 9V^2$ et les δ_i à la condition $\Delta = -1$.

Le centre des masses $\Gamma(m_i)$ associé à un plan donné u_i est défini par les relations:

$$m_i = H_i\left(\frac{\Pi}{u_i} - 1\right).$$

Le moment d'inertie correspondant est, *avec ces expressions des masses*,

$$I = \Sigma m_i u_i^2 = \rho^2 ,$$

égal au carré du rayon de la sphère conjuguée.

Inversement, si les masses m_i, quelconques, sont données, le plan principal et central d'inertie, correspondant à la racine I de l'équation cubique a pour équation:

$$\sum \frac{X_i}{I - m_i \alpha_i} = 0 .$$

20. — *Cas particuliers.* — Γ *est dans le plan* A_1A_2H.

$$\frac{m_3}{H_3} = \frac{m_4}{H_4} ;$$

l'équation cubique admet alors la racine simple $I = h$. Le plan central correspondant est le plan:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0 \qquad \frac{u_3}{\alpha_3} + \frac{u_4}{\alpha_4} = 0 ,$$

$$\frac{X_3}{H_3} = \frac{X_4}{H_4} ;$$

c'est-à-dire le plan A_1A_2H.

Γ *est sur la hauteur* A_1H. Prenons:

$$m_2 = H_2 , \qquad m_3 = H_3 , \qquad m_4 = H_4 ;$$

racine double $I = h$; racine simple: $I = \frac{m_1 \alpha_1}{M}$. Les plans centraux sont les plans passant par la hauteur et le plan mené par Γ parallèlement à la base correspondante. La quadrique d'inertie est de révolution autour de la hauteur.

21. — *Propriétés des tétraèdres orthocentriques solides, homogènes, avec deux arêtes opposées égales.* — L'équation cubique en I, mise sous la forme

$$\frac{\mathrm{I}(m_1 + m_2) - m_1 m_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\mathrm{I} - m_1\alpha_1)(\mathrm{I} - m_2\alpha_2)} + \frac{\mathrm{I}(m_3 + m_4) - m_3 m_4(\alpha_3 + \alpha_4)}{(\mathrm{I} - m_3\alpha_3)(\mathrm{I} - m_4\alpha_4)} = 0 \ ,$$

admet la racine simple

$$\mathrm{I} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ ,$$

dans le cas particulier où le point Γ est sur la surface cubique d'équation

$$\frac{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}}{a_{12}^2} = \frac{\dfrac{1}{m_3} + \dfrac{1}{m_4}}{a_{34}^2} \ .$$

C'est une surface cubique, circonscrite au tétraèdre, passant par l'orthocentre; elle est, dans la transformation $\mathrm{X}_i \mathrm{X}'_i = 1$, réciproque du plan d'équation

$$\frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2}{a_{12}^2} = \frac{\mathrm{X}_3 + \mathrm{X}_4}{a_{34}^2}$$

parallèle aux arêtes $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$, mené par le point (α_i) réciproque de l'orthocentre.

Ainsi sont mises en évidence, trois surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre orthocentrique auxquelles correspondent des cas de résolution de l'équation cubique.

En particulier, si le tétraèdre orthocentrique a deux arêtes opposées égales

$$a_{12} = a_{34} \ ,$$

la surface correspondante

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

contient le centre de gravité G. D'où le résultat suivant:

Lorsque, dans un tétraèdre orthocentrique, solide et homogène, deux arêtes opposées sont égales, l'équation aux moments d'inertie centraux de ce corps admet une racine rationnelle:

$$a_{12} = a_{34} \,, \qquad \mathrm{M} = \text{masse du tétraèdre} \,.$$

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{20} a_{12}^2 \,.$$

(c'est la valeur du moment central du tétraèdre régulier d'arête a_{12}).

22. — *Application aux tétraèdres homogènes avec un trièdre trirectangle.* — Dans le cas d'un tétraèdre OABC, trirectangle en O,

$$\mathrm{OA} = a \,, \qquad \mathrm{OB} = b \,, \qquad \mathrm{OC} = c \,,$$

l'équation de l'ellipsoïde central par rapport aux axes rectangulaires parallèles à OA, OB et OC est:

$$3(b^2 + c^2)\mathrm{X}^2 + 3(c^2 + a^2)\mathrm{Y}^2 + 3(a^2 + b^2)\mathrm{Z}^2$$
$$+ 2bc\,\mathrm{YZ} + 2ca\,\mathrm{ZX} + 2ab\,\mathrm{XY} = \frac{80}{\mathrm{M}} \,.$$

Prenons une densité telle que M = 80. L'équation en S de l'ellipsoïde prend la forme:

$$\tau^3 + (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 3a^4 - 3b^4 - 3c^4)\tau$$
$$+ 2(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \,,$$

en posant:

$$\mathrm{S} = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \tau \,.$$

Sous cette forme, lorsque deux arêtes opposées sont égales (par exemple $c^2 = a^2 + b^2$), l'équation a bien une racine rationnelle $\tau = 0$, $\mathrm{S} = 4c^2$, conformément au théorème précédent.