

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1934)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA MESURE DES GRANDEURS  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** IV. — Volumes.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25986>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA MESURE DES GRANDEURS<sup>1</sup>

PAR

M. Henri LEBESGUE,  
Membre de l'Institut (Paris).

## IV. — VOLUMES.

Le chapitre relatif aux aires a été rédigé de façon qu'on puisse en déduire, paragraphe par paragraphe, une théorie des volumes par des modifications presque toujours évidentes et se réduisant souvent à des substitutions de mots. On obtient ainsi des exposés relatifs aux volumes correspondant à ce que j'ai appelé le premier, le deuxième, le troisième exposé de la théorie des aires; il ne saurait être question d'étendre aux volumes le quatrième exposé, celui relatif aux équivalences finies, puisque M. Dehn a prouvé que deux polyèdres de même volume peuvent ne pas être transformables l'un en l'autre par équivalence finie.

Je ne vais pas développer ces trois exposés relatifs aux volumes, je me contenterai d'indiquer celles des modifications à apporter au chapitre précédent qui sont un peu moins immédiates. D'ailleurs je ne traduirai pas, paragraphe par paragraphe, *comme il serait possible*, le premier exposé, je l'abrégerai en utilisant les résultats acquis pour les aires.

44. — Grâce à un réseau T de cubes on définira le volume comme au § 24 on avait défini l'aire, puis on remplacera la traduction mot à mot du § 25 par ce qui suit.

<sup>1</sup> Voir *L'Enseignement mathématique*, XXXI<sup>e</sup> année, p. 173-206. — XXXII<sup>e</sup> année, p. 23-51.

Soit  $\omega xyz$  le trièdre trirectangle formé de trois arêtes d'un cube du réseau T et considérons un prisme droit ou un cylindre droit dont la hauteur est parallèle à  $\omega z$ ; nous supposerons que la section droite du cylindre a une aire B et que la hauteur est de longueur H.

Les plans des faces des cubes de T qui sont parallèles à  $\omega xy$  découpent sur la hauteur une graduation totale  $T_z$  formée de segments de longueur 1, les segments  $U_z$ , de segments  $U_{1,z}$  de longueur  $\frac{1}{10}$ , de segments  $U_{2,z}$  de longueur  $\frac{1}{10^2}$ , etc. Les plans des faces des cubes de T qui sont parallèles à  $\omega z$  découpent sur la section droite du cylindre un réseau total  $T_{xy}$  formé de carrés  $U_{xy}$  de côté 1, de carrés  $U_{1,xy}$  de côté  $\frac{1}{10}$ , etc. Cette graduation et ce réseau permettent de mesurer la longueur de la hauteur et l'aire de la section droite; soient  $n_{i,z}$ ,  $N_{i,z}$ ,  $n_{i,xy}$ ,  $N_{i,xy}$  les nombres que fournissent respectivement pour ces mesures les segments  $U_{i,z}$  et les carrés  $U_{i,xy}$ . On sait que  $\frac{N_{i,xy} - n_{i,xy}}{100^i}$

$\frac{N_{i,z} - n_{i,z}}{10^i}$  tendent vers zéro lorsque  $i$  augmente indéfiniment, et que  $\frac{n_{i,xy}}{100^i}$  et  $\frac{n_{i,z}}{10^i}$  tendent vers B et H.

Or,  $n_i$  et  $N_i$  étant les nombres fournis par les cubes  $U_i$  de T pour le cylindre considéré, on a:

$$n_i = n_{i,z} \times n_{i,xy} ; \quad N_i = N_{i,z} \times N_{i,xy} ;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{N_i - n_i}{1000^i} &= \frac{N_{i,z}}{10^i} \times \frac{N_{i,xy}}{100^i} - \frac{n_{i,z}}{10^i} \times \frac{n_{i,xy}}{100^i} \\ &= \frac{N_{i,z} - n_{i,z}}{10^i} \times \frac{N_{i,xy}}{100^i} + \frac{n_{i,z}}{10^i} \times \frac{N_{i,xy} - n_{i,xy}}{100^i}, \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro. Donc le cylindre a un volume. Les valeurs approchées de ce volume sont

$$\frac{n_{i,z}}{10^i} \times \frac{n_{i,xy}}{100^i} \quad \text{et} \quad \frac{N_{i,z}}{10^i} \times \frac{N_{i,xy}}{100^i},$$

valeurs qui comprennent entre elles le nombre BH; donc le volume est BH.

45. — Ce volume reste donc le même pour un déplacement relatif de T et du cylindre dans lequel  $\omega z$  reste parallèle à lui-même; ou, bien entendu, dans un déplacement laissant fixe la direction  $\omega x$  ou la direction  $\omega y$ .

Généralisons ce résultat en montrant que si un corps C a un volume, il en a encore un et égal au premier, après un déplacement relatif de C et de T dans lequel  $\omega z$  reste parallèle à lui-même. Soient C' la nouvelle position de C par rapport à T,  $\Gamma'_i$  et  $\Lambda'_i$  les nouvelles positions de  $\Gamma_i$  et  $\Lambda_i$  supposées entraînées avec C,  $\Gamma_i$  et  $\Lambda_i$  étant les figures formées respectivement par les  $n_i$  cubes U<sub>i</sub> de T contenus dans C et les N<sub>i</sub> cubes U<sub>i</sub> couvrant C.

Chaque cube U<sub>i</sub>, de  $\Gamma_i$  ou  $\Lambda_i$ , a été transformé par le déplacement considéré en un cube U'\_i de même volume; donc, pour j assez grand, les cubes U<sub>j</sub> contenus dans U'\_i ont des volumes dont la somme est aussi peu inférieure qu'on le veut à  $\frac{1}{1000^i}$  et la somme des volumes de ceux qui couvrent U'\_i est aussi peu supérieure qu'on le veut à ce même nombre. D'où il résulte que, pour j assez grand, les cubes U<sub>j</sub> fournissent pour C' une valeur  $\frac{n'_j}{1000^j}$  supérieure à tout nombre pris inférieur à  $\frac{n_i}{1000^i}$  et une valeur  $\frac{N'_j}{1000^j}$  inférieure à tout nombre pris supérieur à  $\frac{N_i}{1000^i}$ . Donc, pour j assez grand, on a:

$$\frac{N'_j - n'_j}{1000^j} \leq \frac{N_i - n_i}{1000^i} + \varepsilon,$$

si petit que soit  $\varepsilon$ ; en d'autres termes C' a un volume et ce volume étant la limite commune de  $\frac{n'_j}{1000^j}$  et  $\frac{n_i}{1000^i}$  est aussi celui de C.

Soient maintenant C et C' deux corps égaux et supposons que C ait un volume; désignons par  $\omega\zeta$  et  $\omega\zeta_1$ , des axes entraînés par C et dont les positions, quand C est en C', sont  $\omega'\zeta'$ ,  $\omega'\zeta'_1$ ; on

supposera  $\omega\zeta$  confondu avec  $\omega z$  et  $\omega'\zeta'_1$  parallèle à  $\omega z$  et de même sens.

Effectuons sur C d'abord une rotation autour de  $\omega z$  qui amène  $\omega\zeta_1$  dans le plan  $\omega xz$ , puis la rotation autour de  $\omega y$  qui amène  $\omega\zeta_1$  en  $\omega z$ , enfin le déplacement laissant  $\omega z$  parallèle à lui-même qui amène  $\omega\zeta_1$  en  $\omega'\zeta'_1$ . C est venu en C' et par trois déplacements dont chacun conserve le volume; donc C' a un volume et égal à celui de C.

46. — *Ce résultat est la propriété  $\gamma$  pour les volumes*; et, puisque les propriétés  $\beta$  et  $\gamma$  et l'effet du changement d'unité s'étudient pour les volumes comme pour les aires, la théorie des volumes est en un sens achevée; seulement on ne sait pas encore à quels corps elle s'applique et si, parmi ces corps, se trouvent, par exemple, tous les polyèdres.

*Tout polyèdre a un volume* et, plus généralement, tout corps borné, limité par des domaines plans et des parties de surfaces latérales de cylindres dont les sections droites ont des aires, a un volume. En effet, on a vu qu'un cylindre dont la section droite a une aire avait un volume quand ses génératrices étaient parallèles à  $\omega z$ ; donc, § 45, dans toute position; en d'autres termes la surface totale d'un tel cylindre peut être enfermée dans des cubes  $U_i$  dont la somme des volumes est arbitrairement petite pour  $i$  assez grand; à plus forte raison en est-il de même d'un domaine plan découpé dans la base ou d'une partie découpée dans la surface latérale. Et le théorème énoncé en résulte.

47. — Il ne reste donc plus qu'à calculer le volume des divers polyèdres; avant de le faire, indiquons une autre variante de la première méthode; variante s'appliquant d'ailleurs à l'étude des aires comme il suit:

Supposons que, dans cette étude, nous ayons traité les § 24 à 28; à la place du § 29 nous raisonnons ainsi:

On a vu que l'aire d'un rectangle de côtés parallèles à  $\omega x$ ,  $\omega y$  est le produit de ses côtés; d'où il résulte comme précédemment qu'une translation n'altère pas les aires. Examinons l'effet d'une rotation sur un carré de côté  $c$ ; divisons le carré dans sa nouvelle position par des parallèles à  $\omega x$ ,  $\omega y$  en quatre triangles

rectangles égaux et un petit carré; soient  $a, b$  les côtés des triangles,  $a < b$ ; le petit carré sera de côté  $b - a$ . Par des translations effectuées sur deux des carrés on obtiendra, outre le petit carré d'aire  $(b - a)^2$ , deux rectangles chacun d'aire  $ab$ ; donc un polygone d'aire, § 27,

$$(b - a)^2 + 2ab = a^2 + b^2 = c^2.$$

L'aire d'un carré est donc indépendante de sa position; d'où, pour un domaine  $s$  ayant une aire et pour lequel on a les nombres  $n_i$  et  $N_i$ , le fait qu'après un déplacement  $\frac{n_i}{100^i}$  et  $\frac{N_i}{100^i}$  représentent encore les aires de deux polygones, l'un contenu dans  $s$ , l'autre le contenant. Ainsi un déplacement n'influe ni sur l'existence de l'aire, ni sur sa valeur.

Revenons aux volumes et supposons que, suivant pas à pas l'exposé relatif aux aires, on arrive à l'analogie du § 29, on dira:

Le volume d'un cube n'est pas modifié par un déplacement quelconque; un tel déplacement résultant de déplacements dans lesquels l'un des plans  $\omega_{xy}, \omega_{yz}, \omega_{zx}$  glisse sur lui-même, il suffira de supposer que  $\omega_{xy}$  glisse sur lui-même. Soient  $n_{i,xy}, N_{i,xy}, n_{i,z}, N_{i,z}$  les nombres relatifs à ce cube, § 44, avant le déplacement; après, les nombres  $n_{i,z}$  et  $N_{i,z}$  seront restés les mêmes et les autres seront devenus  $n'_{i,xy}; N'_{i,xy}$ . De sorte qu'après, le volume du cube sera compris entre

$$\frac{n_{i,z}}{10^i} \times \frac{n'_{i,xy}}{100^i} \quad \text{et} \quad \frac{N_{i,z}}{10^i} \times \frac{N'_{i,xy}}{100^i};$$

et les seconds facteurs de ces produits tendent, d'après l'étude des aires, vers l'aire de la base du cube, laquelle est indépendante du déplacement.

L'invariance du volume d'un cube étant ainsi établie, il en résulte qu'un déplacement n'influe ni sur l'existence, ni sur la valeur des volumes.

48. — Voici donc plusieurs façons de présenter la première méthode, toutes au fond aussi longues quand on les expose complètement. On en imaginera bien d'autres. Toutes exigent,

de plus, le calcul des volumes; ce calcul peut se faire par les procédés classiques. Ici, j'indique quatre simplifications ou remarques. La première est celle qui consiste à calculer d'emblée le volume d'un prisme droit, § 44.

Ceci fait, on en déduit, à la façon ordinaire, que le volume d'un prisme, à bases parallèles, est le produit de la section droite par l'arête. Puis, au lieu de passer par toute la filière des divers parallélépipèdes, on remarque que les deux théorèmes des projections des segments et des aires donnent:

$$\frac{\text{aire de section droite}}{\text{aire de base}} = \frac{\text{hauteur}}{\text{arête}},$$

d'où le volume comme produit de la base par la hauteur. Cette simplification est employée par bien des professeurs; la suivante ne semble pas l'être, elle s'appuie d'ailleurs sur les considérations du § 44.

*Par une symétrie, droite ou oblique, par rapport à un plan P, un corps C ayant un volume est transformé en un corps C' de même volume.* Puisque nous pouvons prendre le réseau T dans n'importe quelle position par rapport à C, plaçons des faces des cubes U dans P. La symétrie transforme les cubes U<sub>i</sub> en parallélépipèdes Π<sub>i</sub> dont les bases parallèles à P sont égales à celles des cubes U<sub>i</sub> et dont les hauteurs correspondantes sont aussi égales à celles des U<sub>i</sub>; donc Π<sub>i</sub> a même volume que U<sub>i</sub>. Or si n<sub>i</sub> et N<sub>i</sub> sont les nombres relatifs à C, il en résulte que C' contient des Π<sub>i</sub> de volume total  $\frac{n_i}{1000^i}$  et est contenu dans des Π<sub>i</sub> de volume total  $\frac{N_i}{1000^i}$ . Le théorème auxiliaire est démontré.

Revenant à la méthode classique, soit ABCD un tétraèdre; considérons le prisme triangulaire ABCDEF limité par les plans ABC, DAB, DAC, le plan CBEF passant par CB et parallèle à DA, et le plan DEF parallèle à ABC. Ce prisme est formé de trois tétraèdres ABCD, EBCD, EFCD. Deux quelconques de ces tétraèdres dérivent l'un de l'autre par une symétrie oblique; par exemple, ceux qui ont une face commune sont symétriques par rapport à cette face. Donc ils ont même volume: le tiers du produit de la base ABC par la hauteur issue de D.

49. — Le calcul des volumes des polyèdres est virtuellement fini<sup>1</sup>. Ma quatrième remarque, très accessoire, est relative au volume du tronc de pyramide: Généralisons la figure qui vient de nous servir en prenant deux triangles  $abc$ ,  $def$  à côtés parallèles et de mêmes sens et le solide  $S$  limité par ces triangles et les plans  $abde$ ,  $bcef$ ,  $caf$ . Si  $def$  est égal à  $abc$  on a un prisme, si  $def$  ou  $abc$  est réduit à un point on a un tétraèdre; dans ces trois cas les volumes sont  $HB$ ,  $\frac{HB}{3}$ ,  $\frac{Hb}{3}$ ;  $B$  étant la base dans le plan  $abc$ ,  $b$  celle dans le plan  $def$ ,  $H$  la hauteur. Le premier de ces volumes peut aussi bien s'écrire  $Hb$  ou  $H\left(\frac{B}{5} + \frac{4b}{5}\right)$ , il a quantité d'expressions. Pour que les deux autres aient aussi plusieurs expressions il faut introduire une autre aire que celle de la base du tétraèdre. Soit  $b_m$  la section du solide par le plan équidistant de  $abc$  et  $def$ . Pour le prisme on a  $b_m = B = b$ ; pour le tétraèdre, soit  $4b_m = B$ ,  $b = 0$ , soit  $4b_m = b$ ,  $B = 0$ . Les trois volumes seront donc représentés par la même formule

$$H(\lambda B + \mu b + \nu b_m),$$

si l'on a, à cause du prisme,  $\lambda + \mu + \nu = 1$ ,

à cause du tétraèdre  $b = 0$ ,  $\lambda + \nu \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ ,

à cause du tétraèdre  $B = 0$ ,  $\mu + \nu \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ ,

d'où

$$\lambda = \mu = \frac{1}{6}, \quad \nu = \frac{2}{3}.$$

Ceci donne la formule  $\frac{H}{6}(B + b + 4b_m)$ .

L'avantage d'avoir une formule commune où  $B$ ,  $b$ ,  $b_m$  interviennent linéairement est évident; car cette formule continuera à s'appliquer aux corps qu'on pourrait construire à partir de corps pour lesquels elle est valable et relatifs aux mêmes plans de bases, en réunissant plusieurs de ces corps, en enlevant

<sup>1</sup> Il conviendrait pourtant de le prouver en démontrant que tout polyèdre (convexe ou non) est formé par la réunion d'un nombre fini de tétraèdres.

d'autres, etc.; bref, en réalisant une sorte de somme algébrique de corps.

Par exemple, la formule s'applique à un tétraèdre BCDE qui a deux sommets dans  $abc$ , deux dans  $def$  car un tel tétraèdre s'obtient en enlevant du prisme ABCDEF les deux tétraèdres ABCD, EFCD.

Par exemple encore, la formule s'applique à chaque solide S précédemment considéré, car S est constitué des trois tétraèdres  $abcd$ ,  $ebcd$ ,  $efcd$ .

En particulier, elle s'applique à un tronc de pyramide triangulaire; donc à un tronc de pyramide quelconque, car celui-ci est formé par la réunion de troncs triangulaires. Or, si on désigne par D, d, δ les distances des plans de B, b,  $b_m$  au sommet de la pyramide, on a:

$$\frac{D}{\sqrt{B}} = \frac{\delta}{\sqrt{b_m}} = \frac{d}{\sqrt{b}} = \frac{D - \delta}{\sqrt{B} - \sqrt{b_m}} = \frac{\delta - d}{\sqrt{b_m} - \sqrt{b}}$$

et, puisque les deux derniers numérateurs sont égaux:

$$\sqrt{B} - \sqrt{b_m} = \sqrt{b_m} - \sqrt{b}, \quad \sqrt{b_m} = \frac{1}{2}(\sqrt{B} + \sqrt{b}), \\ b_m = \frac{1}{4}(B + b + 2\sqrt{Bb}),$$

et pour le volume  $\frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$ .

Cette façon d'obtenir le volume du tronc de pyramide est à la fois moins naturelle et moins rapide que celle qui consiste à faire la différence de deux pyramides, mais elle met en évidence l'importance de la formule des trois niveaux, formule sur laquelle je reviendrai.

50. — En ce qui concerne la première méthode appliquée aux polyèdres je n'ai rien de plus à dire, je passe donc à la seconde et à la troisième consistant, je le rappelle, à utiliser d'abord les considérations classiques pour évaluer des volumes satisfaisant aux conditions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , en supposant qu'il soit possible d'y satisfaire, à démontrer par cela même la propriété  $\delta$ , puis à constater que les nombres obtenus vérifient bien en effet  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Par

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  je désigne, bien entendu, les énoncés de la théorie des aires modifiés par le remplacement des mots aire et domaine par volume et corps.

La constatation se faisait, dans le cas des aires, en utilisant les formules qui, pour les polygones, dérivent de la formule de quadrature en coordonnées polaires pour la seconde méthode, de la formule de quadrature en coordonnées rectangulaires pour la troisième. Maintenant, elle utilisera l'application aux polyèdres des formules de cubature en coordonnées polaires de l'espace, en coordonnées semi-polaires, ou en coordonnées rectangulaires; d'où trois procédés. Le premier d'entre eux est classique, j'indique seulement la modification de présentation analogue à celle qui m'a servi au § 33, parce qu'elle utilise un théorème des projections pour les aires qu'on a peu l'habitude d'employer dans les classes malgré sa commodité.

On sait qu'on oriente un plan en se donnant un angle  $\omega_{xy}$  de ce plan; si l'on considère deux plans orientés on appelle angle de ces deux plans, l'angle des seconds axes  $\omega_y, \omega_{y'}$  de deux angles droits qui les orientent et tracés de façon que leurs premiers axes soient confondus sur la ligne d'intersection des deux plans. Il est clair que, suivant que le cosinus de cet angle est positif ou négatif, il y a accord ou désaccord entre l'orientation donnée de l'un des plans et l'orientation du même plan résultant de la projection de l'angle qui oriente l'autre. La valeur absolue de ce cosinus est le nombre qui intervenait dans le théorème sur la projection d'une aire donnée au § 43.

Mais nous allons donner des signes aux aires; pour cela dans un plan orienté par  $\Omega_{XY}$ , considérons un domaine que nous affecterons de la même orientation qu'un angle  $\omega_{xy}$ . Suivant qu'il y aura accord ou non entre les orientations de  $\Omega_{XY}$  et  $\omega_{xy}$  nous affecterons l'aire de  $\Delta$  — nous ne nous occuperons que de domaines pourvus d'aires — du signe + ou du signe -. Alors, en affectant une projection orthogonale de  $\Delta$  sur un plan orienté de l'orientation définie par la projection de  $\omega_{xy}$ , on voit que l'on a la formule des projections

$$\text{aire de projection de } \Delta = \text{aire de } \Delta \times \cos(\text{angle de projection}) .$$

Considérons un polyèdre  $\Pi$  et soit  $\omega_{xyz}$  un trièdre trirect-

tangle que nous faisons mouvoir de façon que  $\omega$  ne sorte pas de  $\Pi$ . Si nous amenons  $\omega$  dans une face,  $\omega z$  normal à cette face et dirigé vers l'intérieur,  $\omega xy$  définit l'orientation de la face. Le théorème des projections s'énonce ainsi:

*La somme des aires des projections orthogonales des faces orientées d'un polyèdre est nulle.*

Soit  $F + F' + \dots + F^{(k)}$  cette somme ; traçons les projections des arêtes du polyèdre, chaque projection de face est alors décomposée en polygones  $p$  et en supposant les aires  $P$  de ces polygones affectées des mêmes signes que celles des projections des faces dont ils dérivent, la somme s'écrira

$$(P_1 + P_2 + \dots P_k) + (P'_1 + P'_2 + \dots P'_k) + \dots .$$

Dans cette somme le même polygone  $p$  pourra intervenir plusieurs fois et donner des termes tantôt positifs tantôt négatifs ; le théorème affirme que  $p$  donne autant de termes positifs que de termes négatifs. En effet, prenons une perpendiculaire au plan de projection  $H$  et passant par un point  $\Omega$  intérieur à  $p$ , plaçons sur cette perpendiculaire l'axe  $\Omega Z$  d'un trièdre  $\Omega XYZ$  de même orientation que  $\omega xyz$  et dont la face  $\Omega XY$  fixe l'orientation de  $H$ ; plaçons d'ailleurs  $\omega xyz$  de façon que  $\omega$  soit en l'un des points de la frontière de  $\Pi$  qui se projettent en  $\Omega$ ,  $\omega z$  étant normal à cette frontière et dirigé vers l'intérieur. Enfin, faisons tourner  $\Omega XYZ$  autour de  $\Omega Z$  et  $\omega xyz$  autour de  $\omega z$  pour rendre  $\Omega X$  et  $\omega x$  parallèles et de même sens. Alors le cosinus de l'angle de  $H$  et du plan de la face orientée par  $\omega xy$  est positif ou négatif, c'est-à-dire que  $p$  intervient dans la projection de cette face pour une contribution positive ou négative, suivant que l'angle  $\Omega Y$ ,  $\omega y$  est aigu ou obtus; c'est-à-dire, car cet angle est aussi l'angle de  $\Omega Z$  et de  $\omega z$  et de plus  $\omega z$  est dirigé vers l'intérieur, suivant qu'en parcourant  $\Omega Z$  dans le sens positif on entre ou on sort du polyèdre au passage par le point de projection  $\Omega$  considéré.

Mais il est clair qu'en parcourant l'axe  $\Omega Z$  en entier on rencontre autant de points d'entrée que de points de sortie; le théorème est démontré.

L'application à la question qui nous intéresse est immédiate.

Soit  $O$  un point; comme au § 33 on montre que le polyèdre  $\Pi$  est la somme algébrique de pyramides de sommet  $O$  et dont les bases sont les diverses faces de  $\Pi$  et par application de la formule trouvée pour le volume d'une pyramide on attache à  $\Pi$  la somme

$$\sum \frac{1}{3} \Phi_i \times \overline{H_i O} .$$

$\Phi_i$  étant l'aire (positive) d'une face  $\varphi_i$ ,  $H_i$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $\varphi_i$ ,  $\overline{H_i O}$  étant mesuré suivant le sens pris par  $\omega z$  quand on place  $\omega xyz$  dans la position qui fixe l'orientation de  $\varphi_i$ .

Il reste à vérifier que ce nombre est positif et satisfait aux conditions  $\beta$  et  $\gamma$ ; cela résulte de suite, § 33, du fait qu'il ne dépend pas de  $O$ . Soit, en effet,  $O$  remplacé par  $O'$ ; la somme variera de

$$\frac{OO'}{3} \sum \Phi_i \cos (\overline{OO'}, \overline{HO}) = \frac{OO'}{3} \sum \Phi_i \cos (\varphi_i, OXY) ,$$

le trièdre  $OXYO'$  étant pris trirectangle et de même orientation que  $\omega xyz$ . D'après notre théorème des projections, la somme du deuxième membre est nulle, ce qui démontre l'invariance de nombre attaché à  $\Pi$ .

51. — Les deux autres procédés doivent employer des expressions du volume d'un polyèdre quelconque déduites des formules de cubature en coordonnées semi-polaires ou en coordonnées ordinaires. Ces deux formules comportent une intégration en  $z$  et une intégration double en  $x, y$ ; ces deux intégrations peuvent être effectuées dans l'ordre que l'on veut. Cela conduit soit à décomposer le polyèdre en troncs de prismes en menant par les arêtes des plans parallèles à  $oz$ , soit à le décomposer en tranches en menant par les sommets des plans parallèles à  $oxy$ .

Prenons la première décomposition; nous avons à évaluer le volume de chaque tronc de prisme par une intégrale double étendue à la section droite de ce prisme, calculée à l'aide des coordonnées polaires si l'on employait les coordonnées semi-polaires de l'espace, à l'aide des coordonnées ordinaires si l'on employait

les coordonnées cartésiennes de l'espace. Ceci conduit à effectuer sur la section droite respectivement les décompositions des §§ 33 et 35. Donc, à considérer le polyèdre, dans le premier cas, comme une somme algébrique de troncs de prismes triangulaires de génératrices parallèles à  $oz$  et ayant tous une arête portée par  $oz$ , et, dans le second, comme une somme de troncs de prismes de génératrices parallèles à  $oz$  et dont les sections droites sont des trapèzes de bases parallèles à  $oy$ , pouvant éventuellement se réduire à des triangles.

Toute cette analyse avait pour but unique de nous fournir la décomposition à adopter; bien entendu, dans les exposés élémentaires, on ne parlera pas d'intégrale, on ne dira rien de l'origine des décompositions qu'on posera sans explications préalables. On dira donc: décomposons tout polyèdre de telle et telle manière en une somme algébrique de troncs de prismes triangulaires ou trapézoïdaux et faisons la somme algébrique de leurs volumes considérés arbitrairement comme donnés par la formule des trois niveaux, par exemple; cette somme est le nombre que nous attachons au polyèdre.

Bien entendu il faudra vérifier les propriétés  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; je passe sur ces vérifications qu'on imaginera facilement dans l'un et l'autre des deux cas que nous venons de considérer et j'examine ce que donne la décomposition en tranches.

Le calcul du volume d'une de ces tranches grâce aux coordonnées polaires n'est pas de nature élémentaire, il conduirait à subdiviser la tranche à l'aide de paraboloïdes hyperboliques; mais les coordonnées ordinaires en donnent une expression élémentaire: A chaque face latérale de la tranche, attachons le tronc de prisme, à base trapézoïdale ou triangulaire, formé des points des projetantes sur  $yoz$  des points de la face, chaque projetante étant limitée à la face et à  $yoz$ . Le polyèdre est une somme algébrique de ces troncs de prismes, d'où encore une expression du volume d'un polyèdre quelconque que l'on vérifiera satisfaire à  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

52. — Voici donc esquissés trois exposés remplaçant, pour les volumes, celui du § 35 pour les aires; nous allons donner au dernier d'entre eux une forme plus voisine de celle du § 35.

Nous décomposons le polyèdre donné en tranches par les plans parallèles à  $oxy$  menés par les sommets ; chacune de ces tranches est un solide limité par deux polygones situés dans deux plans parallèles à  $oxy$  que nous appellerons les plans de base et par des trapèzes, réduits éventuellement à des triangles, dont les bases sont respectivement dans les deux plans de base. La décomposition ultérieure a montré qu'une tranche était une somme algébrique de troncs de prismes à génératrices parallèles à  $ox$  et dont une des bases est une face latérale, trapèze ou triangle, de la tranche. La décomposition de chacun des troncs trapézoïdaux par un plan diagonal, permet de ne considérer que des troncs triangulaires ; chacun d'eux se décompose en trois tétraèdres comme un prisme triangulaire, finalement on peut considérer une tranche comme une somme algébrique de tétraèdres dont les quatre sommets sont dans les deux plans de base. Réciproquement d'ailleurs toute somme algébrique de tels tétraèdres a la forme de ces corps que nous avons dénommés tranches. Les tranches sont donc les polyèdres les plus généraux pour lesquels les considérations du § 49 légitiment la formule des trois niveaux. Dès lors, pour montrer que les conditions  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont compatibles on peut dire, guidé par l'analyse précédente mais sans y faire allusion :

Divisons tout polyèdre donné en tranches par des plans parallèles à  $oxy$  ; chaque tranche à une hauteur  $H_i$ , deux polygones de base d'aires  $B_i$  et  $b_i$  et le plan équidistant des plans de base donne une section d'aire  $\beta_i$ . Au polyèdre nous attachons  $\alpha$ ), le nombre  $\sum \frac{H_i}{6} (B_i + b_i + 4\beta_i)$ . Reste à vérifier les propriétés  $\beta$  et  $\gamma$ .

Comme au § 35 on examine d'abord des cas particuliers de  $\beta$  : celui d'une tranche somme de deux autres ayant les mêmes plans de base et celui d'une tranche somme de deux autres ayant un polygone de base en commun et situés de part et d'autre. Ce second cas seul demande explication ; la vérification résultera d'un simple calcul algébrique dès que l'on aura appris à calculer l'aire de la section d'une tranche ( $H$ ,  $B$ ,  $b$ ,  $b_m$ ) par un plan parallèle aux plans de base et distant de ces plans de  $L$  et  $l$ , ( $H = L + l$ ).

Dans le cas où  $b = 0$ ,  $b_m = \frac{B}{4}$ , cette aire est  $\left(\frac{l}{H}\right)^2 B$ ; si  $B = 0$ ,  $b_m = \frac{b}{4}$ , elle est  $\left(\frac{L}{H}\right)^2 b$ ; si  $B = b = b_m$  elle est  $B$ ; or une tranche étant une somme algébrique de tétraèdres dont les quatre sommets sont dans les plans de base, est, par cela même, § 49, une somme algébrique de tétraèdres et de prismes triangulaires rentrant tous dans l'un des trois cas particuliers ci-dessus.

La section de toute tranche sera donc donnée par l'expression  $\lambda B + \mu b + \nu b_m$ , si  $\lambda, \mu, \nu$  sont choisis de façon que cette formule convienne dans les trois cas particuliers envisagés,

$$\lambda + \frac{\nu}{4} = \left(\frac{l}{H}\right)^2; \quad \mu + \frac{\nu}{4} = \left(\frac{L}{H}\right)^2; \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

D'où la formule

$$\frac{1}{H^2} [l(l-L)B + L(L-l)b + 4Ll b_m]$$

à partir de laquelle la vérification se fait algébriquement.

La vérification de  $\beta$  dans le cas général s'en déduit comme au § 35. La vérification de  $\gamma$  se réduit de même au calcul du nombre attaché à un tétraèdre, ce qui se fait comme au § 35.

53. — Nous avons donc finalement, outre d'autres, trois exposés exactement semblables à ceux relatifs aux aires. Je répète que je ne considère pas ces exposés comme devant être adoptés pour les classes; mais l'étude que nous venons de faire me paraît recommandable aux futurs professeurs comme un exemple de ces efforts de compréhension par rapprochement de chapitres éloignés des mathématiques, en l'espèce la géométrie élémentaire et le calcul intégral, qui peuvent leur servir à dominer l'enseignement qu'ils auront à donner et qu'on devrait exiger d'eux si l'on s'occupait plus de former des professeurs au lieu de se préoccuper presque uniquement d'en recruter.

Quant aux conséquences relatives à la pratique de l'enseignement à tirer de cette étude, elles sont celles que j'ai dites au § 40 : éviter certaines longueurs traditionnelles et surtout oser dire que le volume a une définition et la donner. Ce serait naturellement la première définition, édulcorée au besoin. Avec cette

définition, on évaluerait les volumes des corps ronds sans donner prise au grave reproche du § 42.

La présentation de cette évaluation pourrait être faite comme il suit:

Nous avons attaché un volume aux corps dont la frontière était constituée de parties planes et de parties cylindriques, pourvu que les sections droites des cylindres appartiennent à la famille des courbes planes dont chacune peut être enfermée dans des carrés dont la somme des aires est aussi petite qu'on le veut. Nous allons, à l'aide de ces courbes planes, engendrer deux nouvelles familles de surfaces dont chacune peut être enfermée dans des polyèdres dont la somme des volumes est aussi petite que l'on veut; aux corps limités par de telles surfaces et par les précédentes notre définition nous permet d'attacher un volume.

Soit  $\Gamma$  une courbe de la nature indiquée; on peut l'enfermer dans des carrés  $C_i$  d'aire totale inférieure à  $\varepsilon$ ;  $\Sigma (\text{aire } C_i) < \varepsilon$ . Considérons la portion de surface conique, limitée par  $\Gamma$  et un point  $S$ , sur le cône de sommet  $S$  et de directrice  $\Gamma$ ; et soit  $H$  la distance de  $S$  au plan de  $\Gamma$ . Cette portion de surface est enfermée dans les pyramides dont  $S$  est le sommet et dont les  $C_i$  sont les bases. La somme de leurs volumes est

$$\frac{H}{3} \Sigma (\text{aire } C_i) < \frac{\varepsilon H}{3},$$

*la surface conique considérée jouit donc de la propriété désirée.*

Faisons tourner  $\Gamma$  autour d'un axe de son plan ne traversant pas  $\Gamma$ ; on peut supposer que l'axe ne traverse pas les  $C_i$  et que ceux-ci ont des côtés parallèles à l'axe; soit alors  $h_i$  le côté de  $C_i$ ,  $R_i$  la distance de son centre à l'axe.  $C_i$  engendre un corps cylindrique dont la base est une couronne circulaire, d'où la somme des volumes de ces corps

$$\begin{aligned} \Sigma h_i \pi \left[ \left( R_i + \frac{h_i}{2} \right)^2 - \left( R_i - \frac{h_i}{2} \right)^2 \right] &= 2\pi \Sigma R_i h_i^2 \\ &= 2\pi \Sigma [R_i (\text{aire } C_i)] < 2\pi R \varepsilon, \end{aligned}$$

si  $R$  est pris supérieur à tous les  $R_i$ , et la conclusion: *le corps de révolution engendré a un volume.* De là on déduira les volumes

classiques; bien entendu on modifiera la forme dans laquelle on les donne habituellement afin que les énoncés ne fassent plus appel à la notion d'aire des surfaces gauches; notion non encore élucidée. Mais ce sera la seule modification à apporter et la démonstration aura acquis une valeur dont elle manque complètement avec l'exposé ordinaire.

54. — Dans ce chapitre, il n'a été question jusqu'ici que de technique; pour les observations et discussions j'ai pu renvoyer aux paragraphes correspondants du chapitre relatif aux aires. Mais il est une objection à faire, tout aussi bien pour les quadratures que pour les cubatures, et qu'il faut discuter: *puisqu'il ne s'agit que de définir et d'obtenir des nombres, ne devrions-nous pas faire une plus large place au calcul?*

Au chapitre I, j'ai dit que les nombres entiers n'étaient que des symboles matériels inventés pour servir de comptes rendus aux expériences physiques de dénombrement et qu'il était puéril de ne pas oser montrer, écrire ces symboles. Au chapitre II, j'ai dit que les nombres quelconques n'étaient eux aussi que des symboles destinés à servir de comptes rendus à des expériences physiques; schématisées géométriquement certes, mais de telle manière que l'on peut presque dire que l'opération n'a pas été schématisée, que ce sont seulement les objets sur lesquels elle porte qui l'ont été: Au lieu de placer un mètre en bois sur le mur à mesurer, nous avons porté un segment unité sur un segment à mesurer. J'ai dit qu'il ne fallait pas craindre d'écrire ces nombres, de calculer avec eux au lieu de se borner à noter algébriquement des calculs supposés et non effectués.

Puis, aux chapitres III et IV, j'ai dit que les aires et les volumes ne sont que les mêmes nombres, les mêmes symboles, mais utilisés comme comptes rendus d'autres opérations, les opérations de quadrature et de cubature. Pourquoi dans ces chapitres ai-je si souvent *raisonné* sur les nombres au lieu de les écrire et de calculer effectivement; ne me suis-je pas mis, de ce fait, en contradiction avec moi-même? Pourquoi n'ai-je pas calculé les nombres  $n_i$  et  $N_i$  dont j'ai parlé?

Théoriquement un seul calcul suffirait pour donner toute la théorie des aires des polygones: celui de l'aire d'un triangle en

position quelconque par rapport au réseau T de carrés servant à la définition des aires, et un seul calcul: celui du volume d'un tétraèdre quelconque, donnerait toute la théorie des volumes des polyèdres. En effet, de l'existence de l'aire de triangle résulterait que les segments de droite peuvent être utilisés pour délimiter des domaines qui auront des aires, donc que tout polygone a une aire; proposition qui a été l'objet de notre § 26. Comme au § 27 on en déduirait que le polygone formé par la réunion de plusieurs autres a pour aire la somme des aires des polygones composants. Puis, le § 29 où l'on prouvait que deux polygones égaux ont la même aire, serait remplacé par la constatation que l'aire calculée pour un triangle en position quelconque est indépendante de cette position.

Sur ce dernier point la simplification serait sensible; sur les deux autres, il n'y en aurait aucune, car il faudrait donner les mêmes explications aux élèves, qu'on se base sur le calcul des aires de certains rectangles comme nous l'avons fait ou sur le calcul des aires des triangles. De plus, les évaluations d'aires seraient obtenues différemment; mais les procédés classiques que nous avons employés sont fort simples et le calcul effectif des nombres  $n_i$  et  $N_i$ , à le supposer possible mathématiquement, serait pédagogiquement tout à fait impossible. Examinons-le.

Au § 25 j'aurais pu présenter le calcul de l'aire d'un rectangle, de côtés parallèles à ceux des carrés du réseau T, d'une façon plus numérique, plus conforme aux procédés d'exposition que j'ai préconisés dans les chapitres I et II, en disant: soit à évaluer les nombres  $n_i$  et  $N_i$  pour le rectangle placé comme il a été dit et dont deux sommets opposés ont pour coordonnées:  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ , c'est-à-dire: 1,41..., 1,73...; 2,23..., 2,64...

Les carrés  $U_1$  qui comptent dans  $n_1$  sont ceux dont les points ont des abscisses comprises entre 1,5 et 2,2 et dont les ordonnées sont comprises entre 1,8 et 2,6 ils sont en nombre  $7 \times 8 = n_1$ , de même ceux qui comptent dans  $N_1$  sont ceux dont les abscisses et ordonnées sont comprises entre 1,4 et 2,3; 1,7 et 2,7 d'où  $N_1 = 9 \times 10$ .

Le mode de présentation ainsi esquissé conviendrait peut-être mieux que celui du § 25 pour de très jeunes élèves; mais il ne saurait être question, pour de tels élèves, d'un exposé logique-

ment complet de la théorie des aires, c'est pourquoi j'ai préféré l'exposé du § 25 qui m'a permis, au § 44, de parler de volumes de cylindres alors que la présentation plus numérique n'aurait permis de parler que de certains parallélépipèdes rectangles.

Dès, en effet, qu'il ne s'agit plus du cas simple des rectangles ou des parallélépipèdes rectangles spéciaux en bonne position par rapport au réseau T, le calcul des  $n_i$  et  $N_i$  est impossible, au moins pratiquement, même si l'on s'adresse à des étudiants terminant leurs études de Faculté. Qu'on essaie de calculer  $n_i$  et  $N_i$  pour le triangle dont deux sommets sont les points indiqués et dont le troisième a pour coordonnées  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{8}$ ? Il faudrait, par exemple, calculer les abscisses des points de rencontre du périmètre de ce triangle avec les droites portant les côtés des carrés  $U_i$  et tenir compte de toutes les décimales de ces nombres ! Il est bien clair qu'on ne calculera jamais  $n_i$  et  $N_i$ , mais seulement des valeurs assez approchées de ces nombres pour pouvoir leur être substituées dans la définition de l'aire; il est clair aussi qu'au cours de ces approximations l'aire des rectangles spéciaux considérés au § 25 interviendra, que, pour le calcul des abscisses dont j'ai parlé, ou sera conduit à diviser un triangle quelconque en deux par une parallèle à  $\omega x$ , bref, qu'on en reviendra à des raisonnements équivalents à ceux utilisés ci-dessus.

55. — Le fait qu'il faut raisonner sur les  $n_i$  et  $N_i$  et non calculer avec eux peut être rapproché d'une observation importante. Quel qu'ait été notre souci d'écartier la métaphysique des considérations mathématiques, nous n'avons pourtant pas réussi à ne considérer que le concret. J'ai dit plus haut que les opérations de mesures géométriques n'étaient que des opérations physiques appliquées à des objets schématisés; ceci est vrai quant au procédé employé mais, dans son emploi, il y a entre le cas physique et le cas géométrique une différence essentielle: celui-ci nécessite une répétition indéfinie de l'opération. Une mesure géométrique commence physiquement, elle ne s'achève que métaphysiquement !

Il serait vain d'essayer d'écartier cette difficulté, elle tient à la notion de point. On n'atteint cette notion que par une opération de l'esprit qui comporte un passage à la limite, donc une

répétition indéfinie; toute mesure géométrique est condamnée à utiliser cette même répétition. Pour s'en dispenser, il faudrait renoncer à parler de points, donc des nombres en général; il faudrait utiliser, par exemple, cette arithmétique des nombres de trois chiffres, à laquelle Klein a plusieurs fois fait allusion et que personne n'a jamais construite: une arithmétique dans laquelle les nombres de trois chiffres ne serviraient pas à écrire des valeurs approchées de nombres sous-entendus, mais dans laquelle il n'existerait *vraiment* que des nombres de trois chiffres.

Cette arithmétique n'existant pas, force nous est de nous en passer. Au reste, il nous faudrait aussi une arithmétique des nombres de quatre chiffres, une aussi des nombres de cinq chiffres, etc., pour être prêts à traduire des mesures physiques de plus en plus précises; le procédé auquel les hommes sont arrivés, celui qui emploie des nombres à une infinité de chiffres, paraît à la fois le plus naturel et le plus simple. Mais ceci a pour conséquence que ce qui nous intéresse dans une mesure géométrique, notre but, ce ne sont pas les nombres obtenus au premier ou au second stade de la mesure, c'est le nombre auquel nous ne parviendrons que par une opération de l'esprit. Les  $n_i$  et  $N_i$  n'ont donc pour nous aucune importance par eux-mêmes, ils ne sont que des instruments utilisés en vue d'atteindre notre but; il est licite d'en employer d'autres, si d'autres plus maniables se présentent à nous. C'est à bon droit que nous ne nous sommes pas crus obligés de les calculer, c'est à bon droit que nous avons dit que le nombre mesure était le compte rendu complet de nos opérations bien qu'il ne nous fournisse pas en général les nombres  $n_i$  et  $N_i$ . Ceux-ci n'ont qu'une valeur contingente; en recommandant la mesure avec une autre position relative du domaine et du réseau T nous arrivons à d'autres nombres  $n_i$  et  $N_i$ ; de même, deux expérimentateurs arrivant à la même valeur d'une constante physique n'ont pas pour cela noté les mêmes nombres expérimentaux au cours de leurs opérations.

56. — Pour préciser ce que j'avais dit antérieurement et éviter tout malentendu, je viens de m'arrêter longuement sur l'un des sens possibles de la question: « Ne devrait-on pas utiliser plus le calcul? » qui n'est pas celui qu'on lui donnerait

volontiers: convient-il d'obtenir l'aire d'un triangle, le volume d'un tétraèdre par la considération de domaines voisins, non constitués nécessairement par des  $U_i$ , dont les aires ou volumes résultent des formules donnant les sommes de carrés ou de cubes des nombres entiers ? On connaît bien cette méthode, elle est utilisée par quelques professeurs dans les classes; on peut dire que, pour le triangle, elle n'apporte que des complications, que, pour le tétraèdre, elle a l'avantage de dispenser de la comparaison de deux tétraèdres, qu'elle permet de ne raisonner que sur un tétraèdre. Mais elle ne dispense en aucune manière de toute la partie délicate du raisonnement et qui embarrasse les élèves, je veux dire de la construction des domaines voisins et du passage à la limite. Cette méthode serait beaucoup plus en accord avec l'exposé complet indiqué ici qu'avec l'exposé habituel et, dans un exposé complet, il n'y aurait aucun inconvénient à obtenir par sommation le volume du tétraèdre.

Je n'en dirais pas autant s'il s'agissait d'un cours destiné à de plus jeunes élèves; calculer, c'est agir et, par suite, le calcul plaît mieux aux enfants que le raisonnement; ils se plient volontiers à ses règles comme aux règles de tout jeu. Pour un mathématicien, calculer c'est raisonner, c'est analyser plus profondément les faits géométriques sousjacents; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est oublier tout fait géométrique pour ne plus voir que des symboles. Quand, dans une question, le volume du tétraèdre par exemple, il y a calcul et raisonnement, l'élève est persuadé qu'il a répondu de façon parfaite quand il a écrit sur le tableau les deux ou trois lignes d'égalités nécessaires; peu importe, à son avis, qu'il ait remplacé le raisonnement par un bafouillage quelconque.

Si, comme je le crois, l'enseignement mathématique moyen a pour but une formation de l'esprit et non l'acquisition d'une technique et de connaissances mathématiques, le calcul n'y doit pas jouer un grand rôle. Dans un enseignement plus élevé, s'adressant à des jeunes gens ayant été entraînés à raisonner directement sur les faits géométriques, mécaniques ou physiques, assez pour que dorénavant rien ne puisse leur masquer ces faits, le calcul prendra sa place prépondérante.

57. — Ces observations ne s'expliqueraient guère si je n'avais en vue que la question sans importance réelle : vaut-il mieux calculer le volume du tétraèdre de telle façon ou de telle autre ? Mais, dernièrement, un Inspecteur de l'Enseignement primaire de France a fait la suggestion suivante : ne conviendrait-il pas de calculer les aires et les volumes par les formules du calcul intégral ?

Son idée est la suivante, je pense : on calculerait l'aire d'un rectangle, le volume d'un parallélipipède rectangle à la façon ordinaire ; considérant ces aire et volume comme des notions premières ou comme des notions suffisamment explicitées par quelques allusions au carrelage d'une pièce, à la construction d'un mur de briques. Puis on démontrerait, ce qui est déjà au programme du baccalauréat français, que l'aire limitée par l'axe des  $x$ , les ordonnées  $a$  et  $X$  et un arc de la courbe  $y = f(x)$ , [ $a < X$ ,  $f(x)$  continue et positive] est une fonction de  $X$  dont  $f'(X)$  est la dérivée ; on prouverait une propriété analogue pour les volumes,  $f(x)$  devenant l'aire de la section par le plan d'abscisse  $x$ , et on appliquerait ces théorèmes à l'aire du triangle et du cercle, aux volumes de la pyramide, du cylindre, du cône, de la sphère.

Examinons si cette façon de faire irait, conformément aux principes du § 18, dans le sens de l'utilité la plus immédiate sans pour cela diminuer la vertu éducative du cours de mathématiques. Et d'abord, combien, parmi les enfants de 15 à 16 ans qui reçoivent l'enseignement moyen, auront par la suite à calculer des aires ou des volumes ? On peut admettre que tous auront, quelques fois en leur vie, l'occasion d'estimer combien il faut de rouleaux de papiers peints pour un mur ou de mètres carrés de tapis pour une pièce. Mais il n'y en a pas un sur cent qui aura jamais à s'occuper d'autre chose que de rectangles et de parallélipipèdes rectangles, corps étudiés dès l'enseignement primaire. Et il n'y en a pas un sur mille qui aura à établir une formule de quadrature ou de cubature et non pas à utiliser une formule établie avant lui.

L'utilité immédiate se réduit donc à ceci : Commencer dès l'enseignement moyen à utiliser le calcul intégral parce que des élèves, formant une minorité mais une minorité importante, devront, dans la suite de leurs études, se familiariser avec ce calcul.

58. — Mais l'étude des aires et volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager: Elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort; elle montre comment on a épuré une notion vulgaire en la distinguant de notions voisines, comment on l'a précisée en mettant en relief ce qui la caractérise, et comment on est ainsi arrivé à l'énoncer en termes logiques, c'est-à-dire à en faire une notion mathématique. Sans doute, nous ne réfléchissons pas nous-mêmes à cela quand nous donnons cet enseignement; mais s'il n'est pas justifié par son utilité pratique, s'il n'est pas conservé par simple routine, ce ne peut être que pour cet intérêt culturel qu'il s'impose. Et il s'impose puisque, sans lui, on n'établirait aucun lien entre ces deux pivots des mathématiques: Le point et le nombre. Il faut qu'en plus de la définition du nombre, c'est-à-dire de la mesure des longueurs, on traite d'autres mesures pour faire sentir l'extraordinaire précision qu'apporte le nombre dans les questions où on l'emploie; le nombre qui seul donne confiance et certitude au Physicien. Et, en même temps, faire sentir que cette puissance du nombre n'est pas une vertu mystérieuse qu'il possède, qu'elle vient uniquement des efforts d'analyse faits sur la notion étudiée pour lui donner la précision du nombre; ne pas laisser croire qu'il suffit de parler en hurluberlu d'un nombre non défini ou mal défini pour préciser une question; le nombre vient en dernier, pour constater en quelque sorte le progrès acquis.

Sans doute aussi nos élèves profitent très inégalement de ces occasions de culture, chacun suivant son niveau intellectuel, et aucun ne serait prêt à disserter sur les avantages qu'il a recueillis de l'étude des aires et volumes. Mais n'est-ce pas beaucoup, et mieux, que certains soient déjà entraînés par cette étude à faire dans d'autres circonstances des efforts analogues à ceux qu'ils ont vu faire là; et l'on trouve des élèves capables de ces efforts. Qu'on ne s'en étonne pas; prenez un élève moyen de la classe de Mathématiques ayant reçu l'enseignement ordinaire sans qu'on lui ait parlé des propriétés  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . Montrez-lui que ces propriétés caractérisent les aires, par les procédés des §§ 31 ou 35 par exemple, l'élève s'intéressera aux démonstrations, nouvelles pour lui, mais il vous dira qu'il connaissait bien le

fait à démontrer. Ce disant, il se trompera certes, sa réponse prouve du moins qu'il avait acquis une certitude inconsciente; rien d'étonnant alors à ce qu'il s'efforce, l'occasion venue, d'acquérir des certitudes analogues.

L'exposé ordinaire, qu'il énonce effectivement ou non les propriétés  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , s'appuie si directement sur ces propriétés qu'il les imprime au moins dans l'inconscient. Ce gros avantage disparaîtrait entièrement, je le crains, avec un exposé basé sur les intégrales. Ce n'est pas que l'exposé ordinaire dise plus que celui-ci sur l'origine des notions, quelques mots sur carrelages et briquetages et rien de plus, mais il fait beaucoup plus manier les notions sous leur forme la plus élémentaire. C'est à transporter des triangles ou des tétraèdres, à décomposer des corps en parties respectivement égales ou équivalentes qu'on se familiarise avec  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ; or, avec l'exposé par les intégrales, tout ceci disparaît; il ne resterait plus que le remplissage des rectangles avec des carrés et des parallélépipèdes rectangles avec des cubes, ce qui serait trop peu pour faire acquérir vraiment l'idée de l'importance des propriétés caractéristiques.

59. — Ajoutez à cela que, comme je l'ai dit, toutes les facultés d'attention des élèves seraient accaparées par les calculs au détriment des raisonnements.

On en peut faire dès maintenant la constatation: reprenez le même élève moyen, qui a tiré si bon parti de l'exposé ordinaire des aires et volumes, et demandez-lui de reproduire la démonstration, qu'on lui a donnée, du théorème classique relatif à la dérivée de l'aire de certains domaines<sup>1</sup>. Ce sera effroyable.

Quoi d'étonnant? Il a fallu des siècles pour voir dans les notions d'intégrale et de dérivée, qu'on avait depuis la plus haute antiquité sous les aspects d'aire et de tangente, deux notions inverses et l'on voudrait que le moindre élève de la classe de Mathématiques, totalement dépourvu de génie mathématique, comprenne cela parfaitement, d'emblée, par la seule vertu des mots.

---

<sup>1</sup> L'énoncé complet de ce théorème est nécessairement assez long; ceci n'excuse cependant pas suffisamment cette phrase qu'on trouvait jadis dans les programmes officiels français: *Dérivée de l'aire d'une courbe considérée comme fonction de l'abscisse.*

que nous aurons prononcés devant lui, de sorte qu'on puisse prendre ce fait pour base unique de l'édifice. C'est avoir de l'enseignement une idée vraiment trop haute et je m'étonne qu'un Inspecteur général ait de telles illusions.

Ce n'est pas le lieu d'essayer d'analyser les difficultés qui ont arrêté nos ancêtres, mais notons pourtant que, sur un point au moins, nos jeunes élèves se trouvent exactement dans l'état d'esprit des hommes du XVII<sup>e</sup> siècle: pour eux, la notion de fonction se confond avec celle d'expression. Ou plutôt il y a deux genres de fonctions pour nos élèves: les vraies, celles des problèmes; [c'est  $ax + bx^2 + c$ ,  $\frac{3x - 2}{7 - 6x}$ , etc., elles ont des expressions] et celles des *discours* du cours [c'est  $f(x)$ , notation passepourtout qui prend un sens précis dans les applications où elle devient  $3 \cos x - 2$ ]. Celles-ci sont tellement inexistantes qu'on *les dessine* pour leur donner une réalité, meschanique eut-on dit autrefois. Et ce dessin correspond à un besoin si pédagogiquement nécessaire que, dans les enseignements de la mécanique, où l'on est bien obligé de parler de fonctions qui ne sont pas des expressions, on avait pris, dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, l'habitude de multiplier les graphiques, courbe des espaces, des vitesses, des accélérations, et on insistait sur les moyens matériels pour passer des uns aux autres.

Eh bien, ce qui trouble le plus nos élèves dans le raisonnement sur la dérivée de certaines aires, c'est qu'on y considère une mauvaise fonction  $f(x)$ , concrétisée en une courbe, et que l'on va calculer sur une fonction plus mauvaise encore, qui n'est concrétisée par rien, tout à fait inexistante pour eux, une aire<sup>1</sup>. Pour les élèves, il y a là un raisonnement fort abstrait; à nos yeux, au contraire, rien de plus concret. Pour faire comprendre, nous nous aidons d'une figure, d'inégalités, efficaces en effet pour ceux qui sont capables de voir, de calculer et de raisonner tout à la fois. Mais beaucoup se révèlent incapables de cette triple attention et, pour ceux-là, la propriété qu'on veut mettre à la base de la théorie des aires et volumes reste obscure et nuageuse.

---

<sup>1</sup> La phrase citée dans la note précédente n'apporte certainement pas la clarté qui manque.

60. — Peut-être n'est-il pas inutile de signaler en terminant une difficulté du raisonnement qui permet l'application du calcul intégral aux questions de cubature, dont il semble que certains auteurs de manuels aient fait trop bon marché.

Pour simplifier le calcul de l'accroissement de l'aire obtenu en reculant une droite, qui limite le domaine, de l'abscisse  $x$  à l'abscisse  $x + h$  on admet volontiers que la fonction  $f(x)$  définissant la courbe frontière est constamment croissante ou décroissante de  $x$  à  $x + h$ . Cette restriction n'est pas gênante parce qu'elle est satisfaite dans tous les cas pratiques et surtout parce que les élèves la croient remplie d'elle-même pour  $h$  assez petit. Au reste, si l'on ne fait aucune hypothèse restrictive sur la fonction continue  $f(x)$ , le raisonnement n'en est guère plus compliqué.

Mais supposons qu'il s'agisse de cubature. Nous avons un corps dont les sections par les plans parallèles à  $yoz$  ont une aire  $A(x)$  fonction continue de l'abscisse  $x$  du plan sécant et nous voulons évaluer le volume de la partie du corps comprise entre les plans d'abscisses  $x$  et  $x + h$ . Cette partie est comprise dans un cylindre de hauteur  $h$  et dont la section droite est la réunion des projections sur  $yoz$  des sections du corps pour les plans parallèles à  $yoz$  et d'abscisse comprise entre  $x$  et  $x + h$ ; elle contient un cylindre analogue dont la section droite est la partie commune aux projections indiquées. Il faut prouver que ces deux sections droites ont des aires et qui tendent vers  $A(x)$  quand  $h$  tend vers zéro; or cela n'est nullement évident et ne peut être démontré que si l'on précise mieux ce que l'on entend par un corps. Ces précisions données, le raisonnement est loin d'être immédiat même quand on suppose déjà fait l'exposé développé au début de ce chapitre; c'est dire qu'on ne peut essayer d'être rigoureux qu'en sacrifiant la généralité dans un mode d'exposition qui vise à être simple et rapide. Si donc, contrairement à ce que j'ai vu toujours faire, on désire être rigoureux il faut introduire des restrictions. La plus naturelle consiste à supposer que, de deux sections parallèles à  $yoz$ , l'une d'elles contient toujours l'autre en projection; mais qui ne voit que la nécessité de restrictions de cette nature pour mettre hors de question l'existence de pro-

priétés simples du volume, met en question l'existence même de ce volume ?

61. — J'ai renvoyé à ce dernier paragraphe des observations, un peu en marge de mon sujet, qui tendent à répondre à cette objection formulée parfois contre le calcul de l'aire du triangle ou celui du volume du tétraèdre à l'aide des sommes de carrés ou de cubes d'entiers: ces sommes ne s'obtiennent que par des artifices que les élèves apprennent par cœur et qui ne leur apprennent rien.

Ceci est certes exact, mais l'objection vise uniquement le mode d'exposition ordinairement adopté; on l'écarterait en se rapprochant un peu plus des faits historiques.

Au XVII<sup>e</sup> siècle les mathématiciens ont évalué, en particulier pour les calculs d'aires et de volumes, des sommes de termes  $u_1$ ,  $u_2$ , ... donnés en fonction de leur indice et ceci a préparé et rendu possible l'invention du calcul infinitésimal. Les procédés qu'ils ont employés ont des aspects très divers mais, après coup, on reconnaît qu'ils procèdent tous de la remarque suivante. Les sommes à calculer sont:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad \dots \quad s_p = u_1 + u_2 + \dots + u_p, \quad \dots \quad (1)$$

On a donc  $s_p - s_{p-1} = u_p$  pour toute valeur de  $p$  supérieure à 1. Or, supposons que nous ayons trouvé, peu importe comment, une fonction  $\sigma_p$  de  $p$  telle que, pour tout  $p > 1$ , on ait  
(2)  $\sigma_p - \sigma_{p-1} = u_p$ ; alors

$$s_n = u_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + \dots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) = \sigma_n - \sigma_1 + u_1.$$

Le calcul des sommes (1) revient donc à la recherche de  $\sigma_p$  vérifiant l'égalité (2).

Précisons; ce que nous voulons c'est une *expression*  $\sigma_p$  algébrique ou trigonométrique de  $p$  qui vérifie (2),  $u_p$  étant donné. Nous sommes donc dans les conditions où se trouve un ouvrier à qui l'on demande s'il a un outil pour telle besogne; il passe en revue les outils de sa boîte pour voir si l'un d'eux convient. Et cette revue lui est facile et est rapide s'il connaît déjà bien

ce que peut donner chacun de ses outils; s'il a fait une fois l'inventaire des possibilités que lui fournit son outillage.

Opérons comme cet ouvrier et demandons-nous quels sont les  $u_p$  que nous fournissent les diverses expressions de  $p$ , que nous savons manier, mises à la place de  $\sigma_p$  dans (2); nous aurons ainsi fait l'inventaire des sommes que nous pourrons effectuer.

Inutile d'insister et de dire comment, partant de  $\sigma_p$  polynôme en  $p$  on atteint les  $u_p$  qui sont des polynomes (d'où en particulier les sommes nécessaires à l'aire du triangle ou au volume du tétraèdre), partant des  $\sigma_p$  de la forme  $Aa^p$  on arrive aux progressions géométriques, de  $\sigma_p = A \cos(px + h)$  on arrive à des sommes d'expressions trigonométriques, etc.

Il me semble que cette légère modification d'exposition en change toute la portée. D'abord, le calcul y apparaît comme étant au service du bon sens, du raisonnement, comme étant dirigé par eux et non comme s'y substituant et les remplaçant grâce à un mystérieux pouvoir. Ensuite, cet exposé préparera nos élèves à comprendre, comme les hommes du XVII<sup>e</sup> siècle ont été préparés à comprendre et à découvrir, les procédés de calcul des intégrales indéfinies et la relation entre intégration et différentiation, opérations limites respectivement du calcul des  $s$  à partir des  $u$  et du calcul des  $u$  à partir des  $\sigma$ .

(A suivre.)