Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN SYSTÈME DE CONIQUES
Autor: Bioche, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25329

SUR UN SYSTÈME DE CONIQUES

PAR

Ch. Bioche (Paris).

1. — On sait que si un polygone de $2n$ côtés est inscrit dans une conique les points d'intersection des côtés de rang pair avec ceux de rang impair qui ne sont pas sur la conique, se trouvent sur une courbe de degré $n - 2$. Le théorème de Pascal est un cas particulier de cette proposition, qui s'applique au cas où des côtés deviennent des tangentes à la conique. Si on considère quatre points A, B, C, D les tangentes en ces points à une conique du faisceau dont A, B, C, D sont les points de base coupent les côtés de chacun des trois quadrilatères ayant A, B, C, D pour sommets en 8 points situés sur une même conique que j'appellerai *conique des 8 points* correspondant au quadrilatère. Je me suis proposé d'étudier le système des coniques des 8 points correspondant aux trois quadrilatères ABCD et aux coniques du faisceau.

2. — Si on prend des coordonnées trilinéaires de façon que les points de base soient donnés par $X^2 = Y^2 = Z^2$ l'équation générale des coniques du faisceau correspondant peut s'écrire

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0$$

α, β, γ étant liés par la relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

et étant tous trois différents de zéro s'il s'agit de coniques non décomposées en deux droites. Si on désigne par T le produit

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\beta Y + \gamma Z - \alpha X)(\gamma Z + \alpha X - \beta Y)(\alpha X + \beta Y - \gamma Z)$$

qui, égalé à zéro, représente le système des tangentes à une conique, aux points de base, et par Q le produit

$$(X^2 - Y^2)(X^2 - Z^2)$$

qui, égalé à zéro, représente un des quadrilatères ABCD, l'équation générale des quartiques qui passent par l'ensemble des points d'intersection des deux systèmes de droites peut s'écrire

$$\lambda Q - T = 0 \ .$$

3. — Si on cherche à déterminer λ de façon que la quartique correspondante se décompose en deux coniques dont l'une aurait pour équation

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0)$$

on trouve facilement que, pour $\lambda = \alpha^2\beta\gamma$ on a

$$\alpha^2\beta\gamma Q - T = (\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2)[(\alpha^3 + \alpha\beta\gamma) X^2 + \beta^3 Y^2 + \gamma^3 Z^2] \ .$$

Donc l'équation de la conique des 8 points correspondant au quadrilatère Q, s'obtient en égalant à zéro le dernier facteur. Les équations des coniques correspondant aux trois quadrilatères sont:

$$\alpha^3 X^2 + \beta^3 Y^2 + \gamma^3 Z^2 + \alpha\beta\gamma X^2 = 0 \ ,$$

$$\alpha^3 X^2 + \beta^3 Y^2 + \gamma^3 Z^2 + \alpha\beta\gamma Y^2 = 0 \ ,$$

$$\alpha^3 X^2 + \beta^3 Y^2 + \gamma^3 Z^2 + \alpha\beta\gamma Z^2 = 0 \ .$$

4. — Ces équations montrent que les trois coniques, correspondant à une même conique du faisceau sont bitangentes à la conique (C)

$$\alpha^3 X^2 + \beta^3 Y^2 + \gamma^3 Z^2 = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0) \qquad \text{(C)}$$

les cordes de contact étant les côtés du triangle de référence.

Les coniques des 8 points qui se réduisent à deux droites sont formées par les couples de tangentes à (C) aux points situés sur un des côtés du triangle de référence. Elles correspondent aux coniques du faisceau pour lesquelles α, β, γ sont proportionnels aux nombres

$$\sqrt{5}+1 \qquad -(\sqrt{5}-1) \qquad -2$$

ou s'en déduisent par permutation.

5. — On peut voir que l'enveloppe des coniques (C) est le système des quatre coniques

$$YZ \pm ZX \pm XY = 0 \ ,$$

les points de contact étant donnés par

$$\alpha X = \pm \beta Y = \pm \gamma Z$$

les signes correspondant à ceux de l'équation précédente.

6. — Par chaque point du plan il passe une ou trois coniques (C) réelles. Les régions qui correspondent aux deux cas sont limitées par les quatre coniques, enveloppes des coniques (C). Pour reconnaître le nombre des coniques (C) réelles passant par un point de ces régions il suffit de remarquer que les points A, B, C, D sont dans les régions à *trois* coniques, et les côtés du triangle de référence dans les régions à *une* conique.