Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1933)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CENTRE DE COURBURE

Autor: Humbert, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25328

SUR LE CENTRE DE COURBURE

PAR

M. Pierre HUMBERT (Montpellier).

La bibliographie de la question étant remarquablement copieuse, il m'est difficile d'affirmer l'absolue originalité de la construction ci-dessous indiquée pour le centre de courbure d'une courbe plane: je la crois cependant nouvelle, et je pense en tout cas que certaines des applications du principe mis en avant doivent être données ici pour la première fois.

Commençons par énoncer la remarque suivante, sans doute déjà connue, et qui se démontre sans difficulté soit par la géométrie infinitésimale, soit par l'analyse.

Une courbe C étant donnée, portons sur la normale en un de ses points M un vecteur MN dont la longueur l est une fonction connue des coordonnées de M. Le point N décrit une courbe C′: soit θ l'angle de la tangente en N à C′ avec la tangente en M à C.

D'autre part, menons par un point quelconque du plan, l'origine O par exemple, un vecteur OP équipollent à MN. Quand M et N décrivent respectivement les courbes C et C′, P décrit une courbe Γ: soit φ l'angle de la tangente en P à Γ avec la tangente en M à C.

Entre les deux angles θ et φ, la longueur l et le rayon de courbure r de C en M existe la relation

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r + l}{l} \operatorname{tg} \varphi \ .$$

Si l'on connaît alors les directions des trois tangentes, on obtiendra le centre de courbure ω à C en M par la construction qu'indique la figure 1, où MR est la tangente en M à C, NR la tangente en N à C′, NS la parallèle menée par N à la tangente en P à Γ. La figure MRSω est un rectangle.

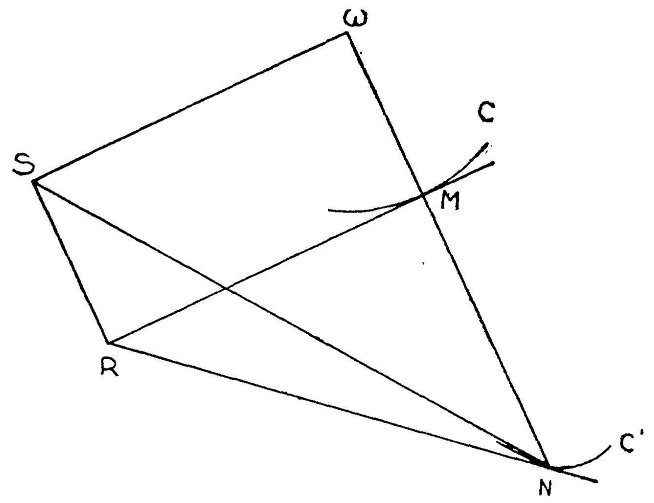

Fig. 1.

Supposons alors que l'on se place dans le cas particulier suivant : la courbe C ayant pour équation $y = y(x)$, portons sur la normale la longueur $l = y\sqrt{1 + y'^2}$: le point N obtenu se trouve sur l'axe des x, et la courbe C′ se réduit à cet axe. La direction de la tangente NR est donc connue; il suffira de déterminer la direction de la tangente à Γ pour avoir, par une construction simple, le centre de courbure ω.

Or la courbe Γ a une équation aisée à obtenir: les coordonnées X, Y d'un de ses points satisfont en effet aux relations

$$X^2 + Y^2 = y^2(1 + y'^2) \ ,$$

$$X + Yy' = 0 \ ,$$

d'où l'on tire

$$X = yy' \ ,$$

$$Y = y \ .$$

Ainsi, toutes les fois que la courbe représentée par ces deux équations paramétriques aura une tangente facile à construire, on obtiendra, par le procédé indiqué, le centre de courbure de la courbe C, $y = y(x)$.

Exemples. — 1. — Parabole $y^2 = 2px$. On a $yy' = p$, et la courbe Γ est la droite, parallèle à l'axe des y, d'équation $X = p$. On retrouvera une construction classique du centre de courbure de la parabole.

2. — Cycloïde

$$x = a(u - \sin u) \ , \qquad y = a(1 - \cos u) \ .$$

On en tire

$$yy' = a \sin u$$

d'où l'équation de la courbe Γ:

$$X^2 + (Y - a)^2 = a^2 \ ,$$

cercle tangent à l'axe des x en O. On est encore ramené à une construction classique.

3. — Parabole semi-cubique $x = y^{\frac{3}{2}}$: on obtient $yy' = \frac{2}{3} y^{\frac{1}{2}}$, ou $X^2 = \frac{4}{9} Y$, donc une parabole.

4. — Courbe $y = e^x$, qui donne $yy' = y^2$, donc pour Γ la parabole $Y^2 = X$. La construction qu'on en déduit pour le centre de courbure de la courbe exponentielle est peut-être nouvelle: par le point M de C menons la parallèle à l'axe des x, et portons sur cette droite, vers les x positifs, un segment MQ égal à $\frac{1}{4}$ (demi-paramètre de la parabole $Y^2 = X$). La bissectrice de l'angle QNO sera parallèle à la tangente en P à Γ, et l'on obtiendra ainsi le point S de notre figure 1, d'où le point ω (fig. 2).

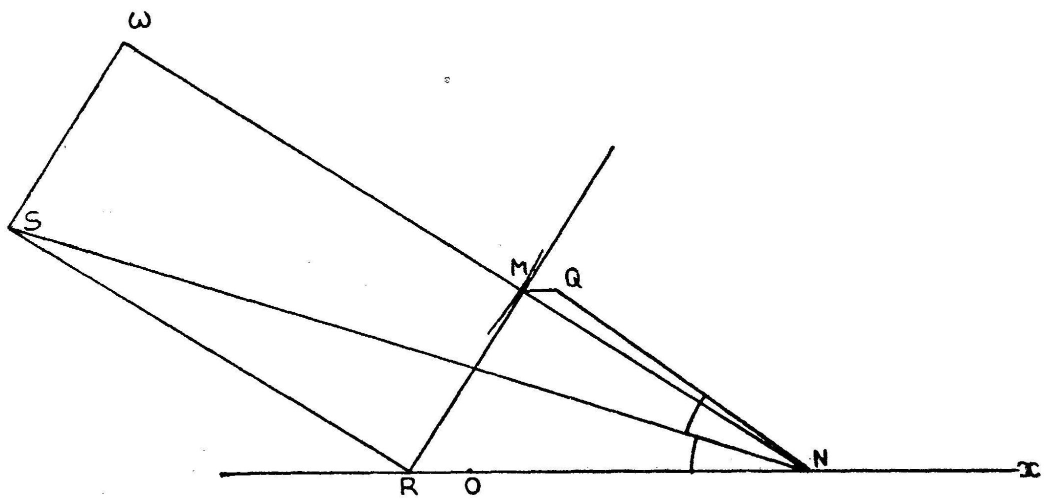

Fig. 2.

5. — La courbe C a pour équation

$$x = li(y^2)$$

où *li* est le *logarithme intégral*, défini par

$$li(z) = \int_0^z \frac{dz}{\log z} \cdot$$

En dérivant, nous aurons

$$1 = \frac{2yy'}{\log y^2} = \frac{yy'}{\log y},$$

donc la courbe Γ est la courbe exponentielle $Y = e^X$. Sa sous-tangente étant égale à l'unité, on obtiendra la construction suivante, que j'ai toutes raisons de croire nouvelle: menons

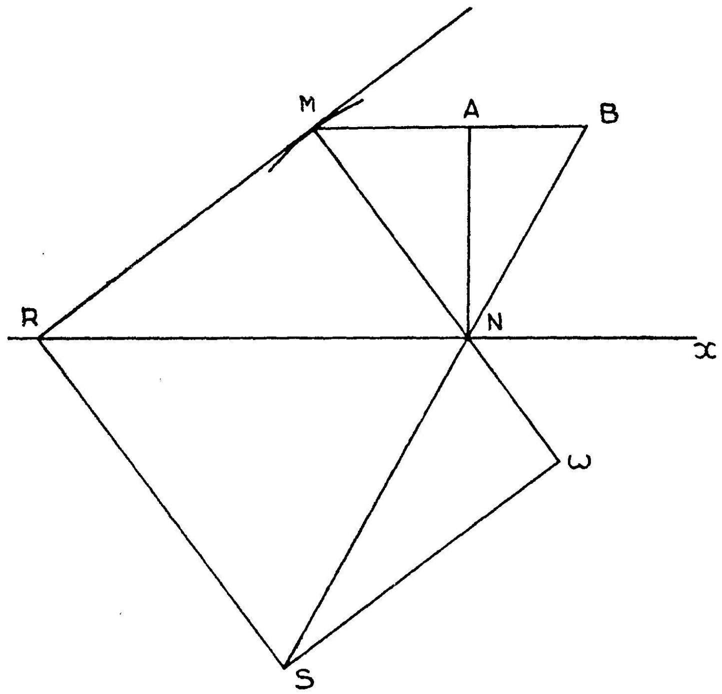

Fig. 3

par N la parallèle à l'axe des y et par M la parallèle à l'axe des x. Ces deux droites se coupent en A: portons à partir de A sur la droite MA, vers les x positifs, un segment AB égal à 1: la droite NB est parallèle à la tangente en P à Γ, d'où les points S et ω.