Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1933)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA CUBATURE GÉOMÉTRIQUE DU CYLINDROÏDE

Autor: d'OCAGNE, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25327

SUR LA CUBATURE GÉOMÉTRIQUE DU CYLINDROÏDE

PAR

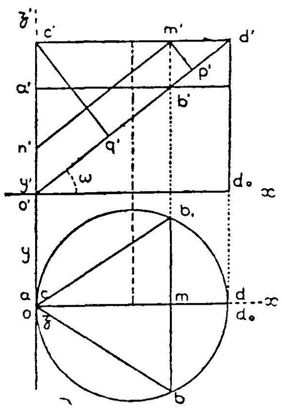
M. Maurice d'OCAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

Aux exercices d'intégration géométrique que j'ai donnés dans le précédent volume de *L'Enseignement mathématique* (pp. 207 et 210), j'ajouterai encore celui-ci qui me semble pouvoir offrir quelque intérêt par la simplicité non seulement du résultat mais aussi de la méthode purement géométrique qui permet de ramener cette cubature d'une surface du troisième degré à celle d'un cône du second.

Rappelons d'abord la définition du *cylindroïde* ou *conoïde de Plücker:* coupant le cylindre de révolution ayant pour base le cercle de diamètre od par le plan de bout de trace verticale $o'd'$, on engendre la surface au moyen des droites horizontales (ab, $a'b'$), (ab_1, $a'b'$) qui rencontrent la génératrice (oc, $o'c'$) du cylindre et sa section par le plan $o'd'$.

On sait que tous les plans de bout passant par oy coupent la surface suivant des ellipses projetées horizontalement suivant des cercles tangents en o à oy. Chacune de ces coniques peut être dite *principale* (les coniques *secondaires* étant les intersections de la surface par ses plans tangents, qui d'ailleurs se projettent également sur le plan horizontal suivant des cercles) et la portion du cylindre projetant limitée aux plans horizontaux $o'd'$ et $c'd'$, *cylindre correspondant.*

Appelons *tronc du cylindroïde* le volume inclus dans la surface et limité à la directrice rectiligne (oc, $o'c'$) et à l'une des coniques



principales, par exemple celle de grand axe $o'd'$. Ce volume est engendré par le triangle abb_1. En posant

$$om = x \ , \quad mb = y \ , \quad o'a' = z \ , \quad o'c' = h \ ,$$

on a donc

$$V = \int_0^h xy \, dz \ .$$

Si nous menons par m' la perpendiculaire $m'p'$ et la parallèle $m'n'$ à $o'd'$, en posant $m'n' = u$ et $m'p' = v$, et appelant ω l'angle que le plan $o'd'$ fait avec le plan horizontal, nous avons

$$x = u \cos \omega \ , \qquad h - z = \frac{v}{\cos \omega}$$

et la formule devient, si $c'q' = k$,

$$V = \int_k^0 - uy \, dv = \int_0^k uy \, dv \ .$$

Or, le plan de trace verticale $m'n'$ coupe le cône de sommet o' ayant pour base le cercle de diamètre $c'd'$ suivant un arc de parabole de corde, projetée en m', égale à bb_1 ou $2y$, et de flèche $m'n'$ ou u. Cet arc de parabole limite un segment d'aire σ donnée par la formule, facile à obtenir de façon tout élémentaire,

$$\sigma = \frac{2}{3} \cdot 2y \cdot u = \frac{4}{3} uy \ .$$

Il en résulte que

$$V = \frac{3}{4} \int_0^k \sigma \, dv = \frac{3}{4} V_0 \ ,$$

si V_0 est le volume du cône $o'c'd'$, ou

$$V = \frac{V_1}{4} \ ,$$

si V_1 est le volume du cylindre $o'c'd'd'_0$. Ainsi *le volume d'un tronc de cylindroïde limité à une de ses coniques principales est égal au quart du volume du cylindre correspondant.*